Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

ПРАКТИКУМ З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ЧАСТИНА IV

Івано-Франківськ

2020

УДК 517.1 : 517.2
ББК 22.161я73
П 69

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" як навчальний посібник для студентів математичних та технічних спеціальностей (протокол № 7 від 5 травня 2020 р.).

Рецензенти:

Бандура А.І., доктор фізико-математичних наук, доцент (Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу),

Філевич П.В., доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет "Львівська політехніка").

П 69 Практикум з математичного аналізу. – Частина IV. / О.В. Голубчак, А.В. Загороднюк, І.Я. Івасюк, М.І. Копач, В.В. Кравців, Г.П. Малицька, М.В. Марцінків, А.В. Соломко, С.В. Шарин. – 2-ге вид., переробл. і доповн. – Івано-Франківськ : Сімик, 2020. – 173 с.

У посібнику наведені короткі відомості з теоретичного курсу математичного аналізу, а також вправи та приклади розв'язування деяких з них. Четверта частина посібника розкриває наступні теми: числові ряди, ознаки їх збіжності та властивості, збіжність і рівномірна збіжність функціональних послідовностей і рядів, степеневі ряди та їхні властивості, ряд Тейлора, розвинення функцій в степеневі ряди та ряди Фур'є.

Для студентів математичних та технічних спеціальностей, які вивчають курси "математичний аналіз I", "математичний аналіз II".

УДК 517.1 : 517.2
ББК 22.161я73

Зміст

Передмова

Навчальний посібник написано на підставі досвіду викладання практичного курсу математичного аналізу на факультеті математики та інформатики і фізико-технічному факультеті Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника для студентів математичних та технічних спеціальностей.

У четвертій частині посібника розглядається методика розв'язування практичних вправ з наступних тем: числові ряди, ознаки їх збіжності та властивості, збіжність і рівномірна збіжність функціональних послідовностей і рядів, степеневі ряди та їхні властивості, ряд Тейлора, розвинення функцій в степеневі ряди, збіжні послідовності і ряди з комплексними числами та степеневі ряди з комплексними членами, а також ряди Фур'є та перетворення Фур'є.

На початку кожного параграфу подаються короткі теоретичні відомості з кожної теми, які містять основні означення, формулювання важливих теорем та основні формули. Далі поміщено вправи для розв'язування. Друга частина кожного параграфу містить повне розв'язування вибраних вправ.

Маючи навчальний посібник зі зразками розв'язаних прикладів, викладач може зосередити увагу студентів на розв'язуванні більш складніших задач. Наявність теоретичного матеріалу та прикладів розв'язування задач допоможе студенту опрацьовувати матеріал посібника самостійно.

РОЗДІЛ І. Числові ряди

§1.1. Числовий ряд та його сума. Необхідна умова збіжності

Нехай $\{a_n\}$ – числова послідовність. Вираз $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ називається ***числовим рядом,*** а числа a_n та $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ – відповідно ***n-им елементом*** та ***частинною сумою цього ряду.***

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, то числовий ряд називається ***збіжним***, а число S називається його ***сумою.*** В такому випадку позначають $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S$.

Якщо границя $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ нескінченна або не існує, то ряд називається ***розбіжним.***

Ряд $\sum\limits_{n=m+1}^{+\infty} a_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots$ називається ***залишком*** числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ після n-го елемента (***n-им залишком ряду***).

Теорема 1. *Нехай* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *– числові ряди,* $c \in \mathbb{R}$. *Тоді виконуються співвідношення:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n;$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

причому із збіжності рядів праворуч випливає збіжність рядів ліворуч.

Теорема 2. *Числовий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збігається тоді і тільки тоді, коли збігається будь-який його залишок. У цьому разі для будь-якого* $m \in \mathbb{N}$ *справджується рівність*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n.$$

З останньої теореми випливає, що відкидання від ряду або приєднання до нього скінченної кількості елементів не впливає на збіжність ряду. Крім того, m-ий залишок збіжного ряду прямує до нуля при $m \to +\infty$.

Геометричною прогресією або ***геометричним рядом*** називають ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1}$, де $a \neq 0$, q – задані числа, які називають відповідно ***першим елементом*** та ***знаменником*** ряду. Зауважимо, що геометрична прогресія збіжна тоді і тільки тоді, коли $|q| < 1$, тоді сума $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Гармонічним рядом називається числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$. Гармонічний ряд є розбіжним і його сума $S = +\infty$.

Критерій Коші збіжності ряду. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збігається тоді і тільки тоді, коли*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N}) : \Big\{ |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon \Big\}.$$

Зауважимо, що збіжність ряду рівносильна збіжності послідовності $\{S_n\}$ його частинних сум, яка рівносильна фундаментальності цієї послідовності.

Необхідна умова збіжності ряду. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *– збіжний, то* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Умова є лише необхідною, бо, наприклад, гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ – розбіжний, хоча $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Вправи

1. За заданою послідовністю $\{a_n\}$ побудувати послідовність $\{S_n\}$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$:

1) $\{n\}$, 2) $\{3n-1\}$,

3) $\{n^2\}$, 4) $\{n^3\}$,

5) $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$, 6) $\left\{\dfrac{5^{n-1}-3^{n-1}}{25^{n-1}}\right\}$,

7) $\left\{\ln\dfrac{n+1}{n}\right\}$, 8) $\{e^{3n-1}\}$,

9) $\left\{(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n} k-1} n\right\}$, 10) $\left\{(-1)^{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2-1} n\right\}$.

2. За заданою частинною сумою ряду S_n побудувати числовий ряд та дослідити його на збіжність:

1) $S_n = n$, 2) $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

3) $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, 4) $S_n = \dfrac{n}{n+1}$,

5) $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, 6) $S_n = \dfrac{2+3^n}{3^n}$,

7) $S_n = \sin\dfrac{1}{2^n}$, 8) $S_n = (n-1)2^n + 1$,

9) $S_n = \dfrac{n^2+2n}{3(2n+1)(2n+3)}$, 10) $S_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = 2k, \\ 0, & \text{якщо } n = 2k+1. \end{cases}$

3. Користуючись означенням суми ряду, знайти суму даного ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3n+1}{(n-1)n(n+1)}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4}{n(n-2)(n-3)}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3n^2+n+1}{n^3(n+1)^3}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{5^{2n-1}}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)!(n+3)}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\dfrac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$,

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{2^n}\cos\frac{3}{2^n}$, 10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$.

4. Переконатися, що ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ збігається і знайти його залишок після n-го елемента:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+7n+10}$, $n = 30$,

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$, $n = 50$,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{2}{5^{n+1}} + \frac{3}{5^{n+2}}\right)$, $n = 3$,

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + (-1)^{n-1}2^{n-2}}{6^{n-1}}$, $n = 3$,

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$, $n = 5$,

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{2^{n+1}}\sin\frac{3}{2^{n+1}}$, $n = 5$,

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2n(2n-1)}$, $n = 5$,

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}}$, $n = 55$,

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(n^2+3n+2)(n^2+4n+5)}$, $n = 8$,

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{n^3+3}{n^3+3n^2+3n+2}$, $n = 3$.

5. Користуючись критерієм Коші, довести збіжність або розбіжність числових рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{5^n}$, $x \in \mathbb{R}$, 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$, 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^2+4}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^n$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+1}{n+3} \arcsin\frac{1}{n^2+2}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n(n+1)}$, $x \in \mathbb{R}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Довести, що якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ – збігаються і для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $a_n \le c_n \le b_n$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ також є збіжним. Яким є ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ при розбіжності рядів $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ і виконанні даної нерівності?

7. Довести, що якщо $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ є збіжним, то збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$. Довести, що зворотнє твердження не виконується.

8. Довести, що якщо $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = a \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ є розбіжним.

9. Довести, що якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ з додатними і монотонно спадними елементами збігається, то $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

10. Довести розбіжність гармонічного ряду, користуючись критерієм Коші.

11. У круг радіуса r вписано квадрат, у квадрат вписано круг і т. д. Знайти суми числових рядів, членами яких є площі заданих кругів і квадратів.

Приклади розв'язування вправ

2.9. Оскільки за означенням частинної суми числового ряду $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ і $S_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$, то $S_n - S_{n-1} = a_n$, де $n > 1$ і $S_1 = a_1$.

Тоді для $S_n = \dfrac{n^2+2n}{3(2n+1)(2n+3)}$ маємо:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2+2n}{3(2n+1)(2n+3)} - \frac{(n-1)^2+2(n-1)}{3(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{(n^2+2n)(2n-1)-((n-1)^2+2(n-1))(2n+3)}{3(2n-1)(2n+1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{2n^3-n^2+4n^2-2n-(n^2-2n+1+2n-2)(2n+3)}{3(4n^2-1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{2n^3+3n^2-2n-(n^2-1)(2n+3)}{3(4n^2-1)(2n+3)} =$$

$$= \frac{2n^3+3n^2-2n-2n^3-3n^2+2n+3}{3(4n^2-1)(2n+3)} = \frac{1}{(4n^2-1)(2n+3)}.$$

Отже, числовий ряд має вигляд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$. Із того, що $S_n = \frac{n^2+2n}{3(2n+1)(2n+3)}$, маємо:

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n}{3(2n+1)(2n+3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{3(2+\frac{1}{n})(2+\frac{3}{n})} = \frac{1}{12}. \qquad \blacktriangleright$$

3.10. Запишемо спочатку частинну суму заданого числового ряду:

$$S_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}.$$

Тоді

$$S_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = a_1,$$

$$S_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}.$$

Звідси

$$\operatorname{tg} S_2 = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right) = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$

Отже, $S_2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Далі,

$$S_3 = S_2 + a_3 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18}.$$

Звідки

$$\operatorname{tg} S_3 = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18}\right) = \frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}.$$

Отже, $S_3 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

Доведемо, що за методом математичної індукції виконується рівність

$$S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.$$

При $n = 1$ маємо $S_1 = a_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

Припустимо, що рівність справджується при $n = k$:

$$S_k = \operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}.$$

Доведемо, використовуючи припущення, що рівність справджується при $n = k+1$. Тоді

$$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \operatorname{arctg}\frac{k}{k+1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(k+1)^2}.$$

Звідси

$$\operatorname{tg} S_{k+1} = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(k+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)^2}}{1 - \frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{2(k+1)^2}} = \frac{(2k(k+1)+1)(k+1)}{2(k+1)^3 - k} = \frac{(2k^2+2k+1)(k+1)}{2k^3+6k^2+6k+2-k} =$$

$$= \frac{(2k^2+k+1)(k+1)}{2k^3+6k^2+5k+2} = \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+1}{(k+1)+1.}$$

Отже, $S_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$ виконується для довільного числа $n \in \mathbb{N}$.

Враховуючи, що $S_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$ – частинна сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^2}$, запишемо

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2n^2}$ є збіжним і його сума $S = \dfrac{\pi}{4}$. ▶

5.9. Доведемо, що для ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n(n+1)}$, $x \in \mathbb{R}$, виконується нерівність з критерію Коші. Тоді для заданого числового ряду отримаємо

$$0 < \left|\frac{\cos nx}{n(n+1)} + \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)}\right| <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \dfrac{1}{n+p} - \dfrac{1}{n+p+1}$ для довільного $p \geq 0$, то

$$\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n}.$$

Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді з того, що $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, випливає наступне твердження:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N}):$$

$$\left\{ \left| \frac{\cos nx}{n(n+1)} + \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)(n+p+1)} \right| < \varepsilon \right\},$$

тобто нерівність з критерію Коші виконується. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos nx}{n(n+1)}$ – збігається. ▶

10. Якщо критерій Коші не виконується, то існує хоча б одне $\varepsilon > 0$ і хоча б одне натуральне число p, що для довільного номера N існує таке $n > N$, для якого виконується нерівність

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| \geq \varepsilon.$$

Для гармонічного ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ виберемо номер N такий, що $n = p = N$. Тоді

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{N+N} > \frac{1}{2N} \cdot N = \frac{1}{2}.$$

Отже, нерівність виконується при $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, тобто гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ є розбіжним. ▶

§1.2. Числові ряди з невід'ємними елементами. Ознаки збіжності

Важливу роль в теорії числових рядів відіграють ряди з невід'ємними елементами. Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ називається ***невід'ємним,*** якщо $a_n \geq 0$ для довільного $n \in \mathbb{N}$.

Основною характеристикою такого ряду є те, що послідовність його частинних сум є неспадною, а отже, необхідною і достатньою умовою збіжності є обмеженість цієї послідовності.

Ознака порівняння. *Якщо існує номер N такий, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $0 \leq a_n \leq b_n$, то із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, а із розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ слідує розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.*

При виконанні нерівності $a_n \leq b_n$ для рядів з невід'ємними елементами ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ називається ***мажорантним рядом*** або ***мажорантою*** для ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Іншими словами, числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ мажорується рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Гранична ознака порівняння. *Якщо $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, та існує скінченна, відмінна від нуля, границя $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$, то ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ збігаються або розбігаються одночасно.*

Ознака Даламбера. *Нехай $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ – ряд з невід'ємними елементами. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$, то при $\alpha < 1$ ряд збігається, а при $\alpha > 1$ ряд розбігається.*

Зауважимо, що при $\alpha = 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ може як збігатись, так і розбігатись.

Ознака Коші. *Нехай $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ – ряд з невід'ємними елементами. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \beta$, то при $\beta < 1$ ряд збігається, а при $\beta > 1$ ряд розбігається.*

Зауважимо, що при $\beta = 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ може як збігатись, так і розбігатись.

Ознака Раабе. *Нехай* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *– ряд з невід'ємними елементами. Тоді, якщо існує границя* $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Big(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = p$, *то при* $p > 1$ *ряд збігається, а при* $p < 1$ *ряд розбігається.*

Для $p = 1$ знову маємо сумнівний випадок.

Інтегральна ознака Коші. *Якщо функція* $f(x) \geq 0$ *і* $f(x)$ *– незростаюча на проміжку* $[1; +\infty)$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$, *і невласний інтеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ *збігаються або розбігаються одночасно.*

Критерій збіжності узагальненого гармонічного ряду. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^k}$ *збігається, якщо* $k > 1$, *і розбігається при* $k \leq 1$.

Вправи

1. Використовуючи ознаки порівняння, дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{3^n + 1}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 4^{-\frac{n^2}{n+1}}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n \cdot 3^n}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 + 3}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{n^2 + 1}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n + 1}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n^4 + 1}}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n^2}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln n}{n^3}$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n(\sqrt{2} + \sin\sqrt{n})}{2^n + n}$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(n^2 + 2n)}{3^n + n^2}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\arcsin\frac{n-1}{n+1}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos\frac{\pi}{4^n}}{\sqrt[5]{2n^5 - 1}}$,

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n}$, 18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\Big)$,

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2\ln n}$, 20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+\ln n)}{\sqrt[4]{n^4+3n^2+1}\,\ln^3(n+2)}$.

2. Дослідити на збіжність числовий ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \arcsin\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{n+3}{n^2+4}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \arcsin\frac{(\sqrt{n+1})^3}{n^3+3n+2}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{n}}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(e^{\frac{1}{n}} - 1\Big)\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+3n^2+5}{n\sqrt[5]{n^{16}+n^4+1}}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\sin^2\Big(\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n}\Big)$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(1 - n\sin\frac{1}{n}\Big)^{\alpha}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(e^{\operatorname{tg}\frac{1}{n}} - 1\Big)^{\alpha}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\Big)^{\alpha}$.

3. Дослідити задані числові ряди за ознакою Даламбера:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+2n}{5^n}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 6\cdot 11\cdot\ldots\cdot(5n-4)}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n n!}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{5^{n^2}}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{3n}}{(2n-1)!}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{3^n(2n+3)}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+1)(a+n-1)}{(2n-1)!!}$, $a > 0$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!(3n+1)!}{(2n)!}$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 5^{3n}}$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n! a^n}{n^n}$, $a \neq e$, $a > 0$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n \cos\frac{\pi}{3n-1}$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

4. Дослідити ряди на збіжність за ознакою Коші:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{3n+2}\right)^n$, 2) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{n^2+4}{n^2+5}\right)^{n^3}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 4^{3n+1} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2+n}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n^2}{2n+1}\right)^n \arcsin^n \frac{1}{n}$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+2}\right)^n$, $a > 0$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{6n+1}{5n+3}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n^2}}{((3n)!)^n}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n} n \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}}{(3n^2+2n+1)^{\frac{n+3}{2}}}$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{(\ln(n+1))^{\frac{n}{2}}}$, $\alpha > 0$.

5. Дослідити задані ряди за інтегральною ознакою Коші:

1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$,

3) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{n^4-4}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n(\ln^4 n+1)}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+2)-\ln(n+1)}{\ln^2(n+1)}$,

7) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n+1}{n-1}$, 8) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln(\ln(n+1))}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+n^2}{n^3+1}\right)^2$.

6. Дослідити на збіжність числові ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$,

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5^n}{n \cdot 4^n}$,

3) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot n^2}{(4n-3)!!}$,

4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{3}{7}\right)^{2^n}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}^n \dfrac{1}{n}$,

6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{3}}{n^3}$,

7) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n-\sqrt{n}}$,

8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{7^n n!}{n^n}$,

9) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$,

10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \dfrac{n+1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})$,

12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3}{3n^3-1}$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} \sqrt{n+2}}{n \ln^2(n+1)}$,

14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \dfrac{\pi}{n}\right)$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$,

16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}}{n+3} \cos \dfrac{1}{n!} \ln \dfrac{3n+1}{3n-1}$,

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{tg} \dfrac{1}{n} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n}\right)$,

18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n-1)^n}{n^{n+1}}$,

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)}$,

20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^n$.

7. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p (\ln n)^\alpha}$ при різних дійсних значеннях p і α.

8. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p (\ln n)^\alpha (\ln \ln n)^\beta}$ при різних дійсних значеннях p, α, β.

9. Довести, що ознака Даламбера незастосовна до ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, де $a_{2n-1} = \dfrac{2^{n-1}}{3^n}$, $a_{2n} = \dfrac{2^n}{3^n}$, тоді як ознака Коші показує, що числовий ряд збігається.

10. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, якщо

$$1)\ a_n = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}dx}{x^2+1}, \qquad 2)\ a_n = \int\limits_{\pi n}^{\pi+\pi n} \frac{\cos^2 x dx}{x}.$$

Приклади розв'язування вправ

1.14. Спочатку дослідимо на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$. Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ є геометричним рядом, то він збігається до суми $S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$.

Використаємо граничну ознаку порівняння. Для цього знайдемо границю:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg}(n^2+2n)}{3^n+n^2}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2+2n)}{1+\frac{n^2}{3^n}} = \frac{\pi}{2}.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$ є збіжним, то з граничної ознаки порівняння випливає, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2+2n)}{3^n+n^2}$ є збіжним. ▶

3.14. За ознакою Даламбера знайдемо границю:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!a^n}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)a}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e}.$$

Якщо $a > e$, то $\frac{a}{e} > 1$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a^n}{n^n}$ є розбіжним. Якщо $0 < a < e$, то $\frac{a}{e} < 1$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a^n}{n^n}$ є збіжним за ознакою Даламбера. ▶

4.10. Для заданого ряду знайдемо границю $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, де

$$a_n = \left(\frac{3n^2}{2n+1}\right)^n \arcsin^n \frac{1}{n}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2}{2n+1}\right)^n \arcsin^n \frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{2n+1} \arcsin\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\arcsin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

Оскільки $\beta = \dfrac{3}{2} > 1$, то за ознакою Коші ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{3n^2}{2n+1}\Big)^n \arcsin^n \dfrac{1}{n}$ є розбіжним. ▶

5.5. Очевидно, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ вираз $\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}} > 0$. Функція $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$ визначена, неперервна і додатна на інтервалі $(1;+\infty)$.

Крім того, оскільки $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x+1} - \frac{x}{2\sqrt{x+1}}}{x^2(x+1)} = -\dfrac{3x+2}{2x^2(x+1)\sqrt{x+1}}$, то $f'(x) < 0$ при $x \in \big(-\dfrac{2}{3}; 0\big) \cup \big(0; +\infty\big)$. Отже, $f'(x) < 0$ при $x \in [1;+\infty)$, тобто функція $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$ монотонно спадає на цьому проміжку.

Дослідимо на збіжність невласний інтеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$.

Отримаємо

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} = \left| \begin{matrix} x+1=t^2, & x_1 = 1, & t_1 = \sqrt{2} \\ x = t^2-1, & x_2 = b, & t_2 = \sqrt{b+1} \\ & dx = 2tdt & \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{b+1}} \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{b+1}} \frac{2dt}{t^2-1} = \lim_{b\to+\infty} \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{b+1}} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \Big(\ln\left|\frac{\sqrt{b+1}-1}{\sqrt{b+1}+1}\right| - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \Big) = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \ln(3+2\sqrt{2}).$$

Отже, $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ є збіжним. В результаті отримаємо, що числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$ є збіжним. ▶

6.15. Розглянемо частинну суму заданого ряду:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k-1}) = (\sqrt{2}-2) + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) +$$

$$+ (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + \ldots + (\sqrt{n-1} - 2\sqrt{n-2} + \sqrt{n-3}) +$$

$$+ (\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} + \sqrt{n-2}) + (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = -1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$$

$$= -1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Тепер знайдемо границю:

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\Big(-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\Big) = -1.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$ є збіжним і його сума рівна -1. ▶

§ 1.3. Знакозмінні ряди. Ознаки збіжності

Ряд, знаки елементів якого змінюються, називається ***знакозмінним.*** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ називається ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, складений із абсолютних величин елементів даного ряду. Будь-який абсолютно збіжний ряд є збіжним, тобто із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ завжди випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ називається ***умовно збіжним***, якщо він збігається, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ – розбігається.

Для знакозмінних рядів справедливі наступні достатні ознаки збіжності.

Ознака порівняння. *Нехай для елементів рядів* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, $b_n > 0$, *виконується нерівність* $|a_n| \le b_n$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *є збіжним. Тоді ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *збігається абсолютно.*

Ознака Даламбера. *Якщо для знакозмінного ряду* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *існує границя* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha$, *то при* $\alpha < 1$ *ряд збігається абсолютно, а при* $\alpha > 1$ *ряд розбігається.*

Ознака Коші. *Якщо для ряду* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *існує границя* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \beta$, *то при* $\beta < 1$ *ряд збігається абсолютно, а при* $\beta > 1$ *ряд розбігається.*

Серед знакозмінних рядів виділяють множину знакопочережних рядів. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n,\ a_n > 0$, називається ***знакопочережним рядом***.

Для дослідження знакопочережних рядів найбільш зручною є ознака Лейбніца.

Ознака Лейбніца. *Нехай для знакопочережного ряду* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$, $a_n > 0$, *виконуються умови:*

1) $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots,$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0.$

Тоді даний ряд є збіжним.

Зауважимо, що сума знакопочережного збіжного ряду є меншою за перший елемент ряду, а його залишок R_n задовольняє нерівність

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

Наступні дві ознаки передбачають подання елементів ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ у вигляді $a_n = U_nV_n$ і дослідження послідовності $\{U_n\}$ і ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} V_n$.

Ознака Діріхле. *Якщо послідовність* $\{U_n\}$ *монотонна і нескінченно мала, а послідовність частинних сум ряду* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} V_n$ *обмежена, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_nV_n$ *збігається.*

Ознака Абеля. *Якщо послідовність* $\{U_n\}$ *монотонна і обмежена, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} V_n$ *збігається, то і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_nV_n$ *збігається.*

Вправи

1. Довести, що задані ряди є абсолютно збіжними:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!!}{(n+1)^n}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{3^n}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^3 \sin n e^{-\sqrt{n}}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{(n+2)\sqrt{\ln^3(n+3)}}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{\left[\frac{n}{4}\right]} \frac{n^n}{n! 3^{n+1}}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} - \sin \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{2^n + n^2}{3^n + n^2}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n^2+2}{n^3+4n}} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin 3n}{n \ln(n+1) \ln^2(\ln(n+2))}$.

2. Довести, що задані ряди є умовно збіжними:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \ln \frac{n+2}{n^2+4}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^7 n}{n}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{(-1)^n n^{n+1}}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n - \ln(n+1)}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt{n^2+2n+1} - \sqrt{n^2-2n+3}}{n}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \ln(n+1)}$.

3. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^3 n}{n}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\ln \frac{n}{n+1}\right)^n$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n^2 3^n}{4^n + 1}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+2)}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n \cos \frac{1}{n}}{\sqrt[3]{n}}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$,

7) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln \ln n}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+1}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1-\sqrt{n^2-2n+1}}{n}$.

4. Дослідити на збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln 2n}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n^2+1}}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos \frac{2}{\sqrt{n+4}}}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+2}}$,

9) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{[\cos n]+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

5. Нехай $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $a_n > 0$, – збіжний ряд. Довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ також є збіжним.

6. Довести, що коли ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ збігаються абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sqrt{|a_n b_n|}$ збігається абсолютно.

7. Довести ознаку Лейбніца як наслідок ознаки Діріхле.

8. Довести, що коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ збігається абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ збігається абсолютно.

9. Нехай $p \geq 2$ – натуральне число. Чи існує такий збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^p$ буде розбіжним.

10. Довести, що коли послідовність додатних чисел $\{a_n\}$ незростаюча і нескінченно мала, то ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ збігаються.

Приклади розв'язування вправ

1.6. Для заданого ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{4}\right]}\dfrac{n^n}{n!3^{n+1}}$ розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^n}{n!3^{n+1}}$. Очевидно, що для довільного натурального числа n справджується співвідношення

$$(-1)^{\left[\frac{n}{4}\right]}\frac{n^n}{n!3^{n+1}} \le \left|(-1)^{\left[\frac{n}{4}\right]}\frac{n^n}{n!3^{n+1}}\right| = \frac{n^n}{n!3^{n+1}}.$$

Дослідимо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^n}{n!3^{n+1}}$ на збіжність. За ознакою Даламбера отримаємо

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!3^{n+2}}\cdot\frac{n!3^{n+1}}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3\cdot n^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3} = \frac{e}{3}.$$

Оскільки $\dfrac{e}{3} < 1$, то числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^n}{n!3^{n+1}}$ – збіжний. Тоді початковий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{\left[\frac{n}{4}\right]}\dfrac{n^n}{n!3^{n+1}}$ є абсолютно збіжним. ▶

2.9. Спочатку дослідимо на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, який складається з абсолютних величин початкового ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

За граничною ознакою порівняння маємо:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ – розбіжний, то $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ – розбіжний.

Розглянемо тепер ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. За ознакою Лейбніца ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ збігається, бо $\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$ для довільного числа $n\in\mathbb{N}$ і $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Числова послідовність $\left\{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ є монотонно спадною і обмеженою, бо $0<\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\le\dfrac{\pi}{4}$. Тоді за ознакою Абеля заданий ряд збігається.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ є умовно збіжним. ▶

4.9. Зобразимо n-ий елемент ряду у вигляді

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{(\sqrt{n}+(-1)^n)(\sqrt{n}-(-1)^n)}=$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}{n-1}=(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}}{n-1}+\frac{(-1)^{2n+1}}{n-1}=(-1)^n\cdot\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}.$$

Для числового ряду $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ отримаємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}=0$, і послідовність $\left\{\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}\right\}$ є монотонно спадною, бо

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-\sqrt{x}}{(x-1)^2}=-\frac{x+1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0$$

при $x\in[2;+\infty)$. Отже, ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ є збіжним за ознакою Лейбніца.

Однак ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n-1}$ – розбіжний. Тоді початковий ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ є розбіжним. ▶

7. В числовому ряді $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ позначимо $U_n=a_n$, а $V_n=(-1)^{n-1}$. Оскільки послідовність $\{U_n\}$ є монотонно спадною і $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$, та послідовність частинних сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$ обмежена в сукупності, то умови ознаки Діріхле виконуються. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ збігається. Таким чином, ознака Лейбніца є частинним наслідком ознаки Діріхле. ▶

§ 1.4. Основні властивості числових рядів

Наведемо основні властивості числових рядів.

1) Лінійність. Якщо $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A \neq \infty$ і $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B \neq \infty$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha A + \beta B,$$

де α, β – довільні дійсні числа.

2) Сполучна властивість. Якщо $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$, то

$$(a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots + (a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}) + \ldots = S$$

для довільних $n_k \in \mathbb{N}$ таких, що $n_{k+1} > n_k$.

3) Абсолютно збіжний ряд залишається збіжним, і його сума не змінюється при довільній перестановці елементів цього ряду.

4) Змінюючи порядок розміщення елементів в умовно збіжному ряді, можна зробити суму ряду рівною будь-якому наперед заданому числу і навіть звести цей ряд до розбіжного.

5) Якщо знакозмінний ряд збігається абсолютно, то збігаються ряди, складені окремо із його додатних та від'ємних елементів. Якщо знакозмінний ряд збігається умовно, то такі ряди є розбіжними.

Добутком за Коші двох рядів $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ називається ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, де $c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1,\ n \in \mathbb{N}$.

6) Абсолютна збіжність добутку двох рядів. Добуток за Коші двох абсолютно збіжних рядів є абсолютно збіжним рядом і сума його дорівнює добутку сум цих рядів.

Часто на практиці виникає потреба скористатися сумою ряду, збіжність якого обґрунтована, але суму немає можливості знайти. Тоді, враховуючи те, що у збіжному ряді $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ його залишок після n-го елемента $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = S - S_n$, де S – невідома сума, має границю нуль, можна припустити, що $S \approx S_n$.

Однак, при цьому виникає проблема (в більшості випадків досить складна) про визначення кількості елементів, яка гарантує наближення суми n-ою частинною сумою з наперед заданою точністю.

Досить просто ця задача розв'язується у випадку, коли заданий ряд є знакопочережним. Для такого ряду виконується нерівність $|S_n - S| \le |a_{n+1}|$.

Вправи

1. Знайти суми рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{n}{2^n}+\frac{3}{2^n}\Big)$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\Big)$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cos\frac{2\pi n}{3}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!-1}{n!2^n}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{5^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{n^2}\Big)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{(2n-1)!}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{(2n)!}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{8n+\pi}{4(2n)!}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^{2n-1}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{8n-4-\pi}{4(2n-1)!}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)^{2n-2}$.

2. Скільки елементів заданого числового ряду треба взяти, щоб дістати його суму з точністю до ε, якщо:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \varepsilon=10^{-4}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \varepsilon=10^{-3}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \varepsilon=10^{-6}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}, \quad \varepsilon=10^{-2}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)!}, \quad \varepsilon=10^{-4}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}, \quad \varepsilon=10^{-3}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2n}{(4n+1)7^n}, \quad \varepsilon=10^{-3}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}, \quad \varepsilon=10^{-4}$.

3. Довести, що задані послідовності є нескінченно малими:

1) $\left\{\dfrac{a^n}{n!}\right\}$, 2) $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}$,

3) $\left\{\dfrac{n^n}{(n!)^2}\right\}$, 4) $\left\{\dfrac{\sqrt{n!}}{(3+\sqrt{1})(3+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(3+\sqrt{n})}\right\}$,

5) $\left\{\dfrac{n!}{n\ln 3(\ln 3+1)\cdot\ldots\cdot(\ln 3+n)}\right\}$, 6) $\left\{\dfrac{\ln 5(\ln 5+1)\cdot\ldots\cdot(\ln 5+n)}{n!n}\right\}$.

4. Дослідити на збіжність добуток за Коші даних рядів:

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n},\quad p>1,$$

$$2)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}},$$

$$3)\ \left(1-\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right),$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^\beta},\quad \alpha>0,\quad \beta>0.$$

5. Показати, що ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ – збіжний, а ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}+\ldots$$

є розбіжним.

6. Відомо, що $\dfrac{\pi^2}{8}=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$. Знайти суми рядів $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ та $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}$.

7. Члени ряду $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ переставити так, щоб:

1) сума ряду збільшилась вдвічі,

2) ряд став розбіжним.

8. Довести, що якщо ряди $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ і $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}b_n^2$ збігаються, то також збігаються ряди $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n\cdot b_n|$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)^2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n|}{n}$.

9. Довести, що $\Big(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^{n-1}\Big)^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na^{n-1}$, де $|a| < 1$.

Приклади розв'язування вправ

1.6. За означенням суми рядів отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{5^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{n^2}\Big)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5^{n-1}}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5^{n-1}}+\Big(-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n^2}+\ldots\Big)+$$

$$+\Big(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\ldots\Big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5^{n-1}}+$$

$$+\Big(-1+1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n^2}-\frac{(-1)^n}{n^2}+\ldots\Big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5^{n-1}}.$$

При використанні сполучної властивості отримаємо геометричний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5^{n-1}}$, сума якого $S=\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}$.

Отже, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{5^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{n^2}\Big)+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{5}{4}$. ►

3.4. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(3+\sqrt{1})(3+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(3+\sqrt{n})}$.

За ознакою Даламбера маємо, що

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{(n+1)!}}{(3+\sqrt{1})(3+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(3+\sqrt{n+1})}\cdot$$

$$\cdot\frac{(3+\sqrt{1})(3+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(3+\sqrt{n})}{\sqrt{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3+\sqrt{n+1}}=1.$$

Отже, ознака Даламбера не дає однозначної відповіді на питання, чи ряд є збіжним.

За ознакою Раабе маємо:

$$\lim_{n\to+\infty}n\Big(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big)=\lim_{n\to+\infty}n\Big(1-\frac{\sqrt{n+1}}{3+\sqrt{n+1}}\Big)=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{3+\sqrt{n+1}}=+\infty.$$

Отже, побудований ряд є збіжним.

Тоді за необхідною ознакою збіжності ряду маємо, що

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(3+\sqrt{1})(3+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot(3+\sqrt{n})} = 0.$$

Що й треба було довести. ►

4.3. Дослідимо на збіжність кожен із рядів зокрема. За ознакою Коші маємо, що ряди $1-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ і $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ є розбіжними.

За правилом множення рядів отримаємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$, де

$$c_n = a_1 b_n + b_1 a_n + \sum_{k=2}^{n-1} a_k b_{n-k+1},$$

звідки $a_1 = 1,\ a_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},\ b_1 = 1,\ b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right),\ n = 2,3,...$

Отже,

$$c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-k-1}\left(2^{n-k}+\frac{1}{2^{n-k+1}}\right) =$$

$$= 2\cdot 3^{n-2} + \frac{3^{n-2}}{2^{2n-2}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n}\cdot\frac{2^2}{3^2}\sum_{k=2}^{n-1}\left(2^{n-k}+\frac{1}{2^{n-k+1}}\right) =$$

$$= 2\cdot 3^{n-2} + \frac{3^{n-2}}{2^{2n-2}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - \frac{3^{n-2}}{2^{-2}}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{2^k} - \frac{3^{n-2}}{2^{2n-1}}\sum_{k=2}^{n-1}2^k =$$

$$= 2\cdot 3^{n-2} + \frac{3^{n-2}}{2^{2n-2}} - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 4\cdot 3^{n-2}\cdot\frac{\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right)}{\frac{1}{2}} - \frac{3^{n-2}}{2^{2n-1}}\cdot\frac{4(2^{n-2}-1)}{1} =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot 3^n + \frac{4}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{2}{9}\cdot 3^n + \frac{8}{9}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{8}{9}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n =$$

$$= \frac{12}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ є абсолютно збіжним рядом і його сума рівна

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}} = 4. \quad ►$$

Індивідуальні завдання до розділу I

1. Використовуючи означення, знайти суму заданого ряду. Обчислити частинні суми S_n для $n = 10$ і $n = 100$. Для кожного із випадків знайти абсолютну Δ_n та відносну δ_n похибки наближеної рівності $S_n \approx S$.

$$1)\ \frac{2}{1\cdot 7}+\frac{2}{3\cdot 9}+\frac{2}{5\cdot 11}+\frac{2}{7\cdot 15}+\ldots,$$
$$2)\ \frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 8}+\frac{1}{3\cdot 10}+\frac{1}{4\cdot 12}+\ldots,$$
$$3)\ \frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{3\cdot 7}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{7\cdot 11}+\ldots,$$
$$4)\ \frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+\frac{2}{9\cdot 11}+\ldots,$$
$$5)\ \frac{3}{5\cdot 8}+\frac{3}{8\cdot 11}+\frac{3}{11\cdot 14}+\frac{3}{14\cdot 17}+\ldots,$$
$$6)\ \frac{6}{4\cdot 7}+\frac{6}{7\cdot 10}+\frac{6}{10\cdot 13}+\frac{6}{13\cdot 16}+\ldots,$$
$$7)\ \frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+\frac{4}{13\cdot 18}+\ldots,$$
$$8)\ \frac{3}{2\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{3}{8\cdot 11}+\frac{3}{11\cdot 14}+\ldots,$$
$$9)\ \frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{2\cdot 6}+\frac{4}{3\cdot 7}+\frac{4}{4\cdot 8}+\ldots,$$
$$10)\ \frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+\ldots,$$
$$11)\ \frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 15}+\ldots,$$
$$12)\ \frac{5}{4\cdot 9}+\frac{5}{9\cdot 14}+\frac{5}{14\cdot 19}+\frac{5}{19\cdot 24}+\ldots,$$
$$13)\ \frac{4}{2\cdot 6}+\frac{4}{4\cdot 8}+\frac{4}{6\cdot 10}+\frac{4}{8\cdot 12}+\ldots,$$
$$14)\ \frac{9}{2\cdot 11}+\frac{9}{5\cdot 14}+\frac{9}{8\cdot 17}+\frac{9}{11\cdot 20}+\ldots,$$
$$15)\ \frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\frac{9}{4^2\cdot 5^2}+\ldots,$$
$$16)\ \frac{8}{1\cdot 9}+\frac{8}{5\cdot 13}+\frac{8}{9\cdot 17}+\frac{8}{13\cdot 21}+\ldots,$$
$$17)\ \frac{12}{1\cdot 7}+\frac{12}{4\cdot 10}+\frac{12}{7\cdot 13}+\frac{12}{10\cdot 16}+\ldots,$$
$$18)\ \frac{7}{6\cdot 13}+\frac{7}{13\cdot 20}+\frac{7}{20\cdot 27}+\frac{7}{27\cdot 34}+\ldots,$$

19) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots,$

20) $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 10}+\ldots,$

21) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{4\cdot 6}+\ldots,$

22) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots,$

23) $\frac{8}{1\cdot 9}+\frac{8}{9\cdot 17}+\frac{8}{17\cdot 25}+\frac{8}{25\cdot 33}+\ldots,$

24) $\frac{5}{2\cdot 7}+\frac{5}{7\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+\frac{5}{17\cdot 22}+\ldots,$

25) $\frac{4}{2\cdot 6}+\frac{4}{6\cdot 10}+\frac{4}{10\cdot 14}+\frac{4}{14\cdot 20}+\ldots,$

26) $\frac{9}{8\cdot 17}+\frac{9}{17\cdot 26}+\frac{9}{26\cdot 35}+\frac{9}{35\cdot 44}+\ldots,$

27) $2+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}+\frac{1}{500}+\frac{1}{5000}+\ldots,$

28) $\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{4}{7\cdot 9}+\frac{4}{11\cdot 13}+\frac{4}{15\cdot 17}+\ldots,$

29) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}+\ldots,$

30) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\ldots.$

2. Використовуючи необхідну умову збіжності ряду, довести, що заданий ряд є розбіжним.

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}},$

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2},$

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)},$

4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+5^n}{n^{10}},$

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}},$

6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1},$

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n(n+1)},$

8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+5},$

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{0,005},$

10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{\pi n}{n^2+1},$

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n},$

12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(\sqrt{n}-1)^2}{n+\sqrt{n}},$

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^3\operatorname{tg}^3\frac{\pi}{n},$

14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\ln n},$

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{7^n+5}{5^n+7},$

16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\frac{2n^2+3}{(n+1)(n+2)},$

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n+\sin 2^n},$

18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2,$

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, 20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$, 21) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$,

22) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n}+2}{2\sqrt[3]{n}+1}$, 23) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, 24) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(2+\frac{1}{n^3}\right)$,

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+\sqrt[3]{n})^3}{n^3-\sqrt{n}}$, 26) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\sin\frac{1}{n^2}$, 27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sqrt{n}+2)^2}{4n}$,

28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^n$, 29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\ln\frac{3n}{3n-1}$, 30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{4n^2+1}}{2n^2+3}$.

3. Знайти суму числового ряду:

1) $\sum\limits_{n=9}^{+\infty} \frac{2}{n^2-14n+48}$, 2) $\sum\limits_{n=9}^{+\infty} \frac{18}{n^2-13n+40}$,

3) $\sum\limits_{n=8}^{+\infty} \frac{4}{n^2-12n+35}$, 4) $\sum\limits_{n=8}^{+\infty} \frac{36}{n^2-11n+28}$,

5) $\sum\limits_{n=7}^{+\infty} \frac{6}{n^2-10n+24}$, 6) $\sum\limits_{n=7}^{+\infty} \frac{54}{n^2-9n+18}$,

7) $\sum\limits_{n=6}^{+\infty} \frac{8}{n^2-8n+15}$, 8) $\sum\limits_{n=6}^{+\infty} \frac{72}{n^2-7n+10}$,

9) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} \frac{10}{n^2-6n+8}$, 10) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} \frac{90}{n^2-5n+4}$,

11) $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{12}{n^2-4n+3}$, 12) $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{18}{n^2-n-2}$,

13) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{16}{n^2+4n+3}$, 14) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{36}{n^2+7n+10}$,

15) $\sum\limits_{n=10}^{+\infty} \frac{30}{n^2-14n+48}$, 16) $\sum\limits_{n=9}^{+\infty} \frac{54}{n^2-11n+28}$,

17) $\sum\limits_{n=9}^{+\infty} \frac{36}{n^2-12n+35}$, 18) $\sum\limits_{n=8}^{+\infty} \frac{72}{n^2-9n+18}$,

19) $\sum\limits_{n=8}^{+\infty} \frac{12}{n^2-10n+24}$, 20) $\sum\limits_{n=7}^{+\infty} \frac{18}{n^2-7n+10}$,

21) $\sum\limits_{n=7}^{+\infty} \frac{60}{n^2-8n+15}$, 22) $\sum\limits_{n=6}^{+\infty} \frac{36}{n^2-5n+4}$,

23) $\displaystyle\sum_{n=6}^{+\infty} \frac{48}{n^2 - 6n + 8}$, 24) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{54}{n^2 + n - 2}$,

25) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty} \frac{6}{n^2 - 4n + 3}$, 26) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{18}{n^2 - n - 2}$,

27) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{24}{n^2 + 4n + 3}$, 28) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{36}{n^2 + n - 2}$,

29) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{72}{n^2 + 6n + 8}$, 30) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{54}{n^2 + 5n + 4}$.

4. Дослідити на збіжність ряд за допомогою ознаки порівняння:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$, 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} n^2}{n(n+1)(n+2)}$,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 n}{n^3}$, 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos n}{n^3 + 2}$,

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 - \sin n}{n - \ln n}$, 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$,

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cos^2 n}{n^3 + 5}$, 8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \ln n}{n^2 - 3}$,

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 3}{n^3(2 + \cos n\pi)}$, 10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3 - \cos n}{\sqrt[4]{n^3}}$,

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1}$, 12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$,

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^3 n}{n^4 + 3}$, 14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}$,

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \sin n}{(n+1)(n+2)}$, 16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2 + \cos n\pi)\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7 + 5}}$,

17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5 + n}}$, 18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(2 + \cos n\pi)}{2n^2 - 1}$,

19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2 + 1}$, 20) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln \sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt{n^2 - n}}$,

21) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \cos n}{n^2 + 2}$, 22) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3 + \sin n}{\sqrt{n^3 - n}}$,

23) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2 \ln n + \sqrt[3]{\ln^2 n}}$, 24) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n(2+n^2)}}$,

25) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{2-\cos n}{\sqrt{n^2-n}}$, 26) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos n^2}{n^3+n}$,

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}^2 n}{n(n+1)}$, 28) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{2+\cos n}{\sqrt[4]{n^4-1}}$,

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1+\sin n}{n(n+2)}$, 30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n^2(2+\sin n)}$.

5. Дослідити на збіжність ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \operatorname{arctg} \dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}$, 2) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \operatorname{tg} \dfrac{n-1}{n^3-n}$,

3) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \dfrac{1}{n-1}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}+2} \operatorname{arctg} \dfrac{n+3}{n^2+5}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\left(1-\cos \dfrac{1}{n+1}\right)$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+4} \operatorname{tg} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln \dfrac{n^2+5}{n^2+4}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+4}} \sin \dfrac{1}{n+1}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+3}}\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln \dfrac{n^2+1}{n^2-n+2}$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n^3}$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3+2}{n^3+1}$,

13) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \dfrac{\pi}{n}$, 14) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{n+1}{(\sqrt[3]{n}-1)(n\sqrt[4]{n^3}-1)}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos \dfrac{\pi}{n}\right)$, 16) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$,

17) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \ln \dfrac{n^2+3}{n^2-n}$, 18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}-1}{n^3}}-1\right)$,

19) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \sqrt{n} \arcsin \dfrac{n+1}{n^3-2}$, 20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right)$,

21) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 22) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$,

23) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}}-1\right)$, 24) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$,

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, 26) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{2\pi}{2n+1}$,

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3+7n}{5^n+n}$, 28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\cdot\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$,

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)^2$, 30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{n}{n^2\sqrt[3]{n}+5}$.

6. Дослідити на збіжність ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^n+5}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n\cdot n^2}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n(n+1)!}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n}{n!}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{n+1}(n^3+1)}{(n+1)!}$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{10^n\cdot n!}{(2n)!}$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^{n-1}}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\operatorname{arctg}\frac{5}{n}$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$,

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n!\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$, 18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$,

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$, 20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$,

21) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{3^n\cdot n!}$, 22) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n\cdot\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$,

23) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!} \operatorname{tg} \frac{1}{5^n}$, 24) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{6^n(n^2-1)}{n!}$,

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n \cdot n^2}{(n+2)!}$, 26) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$,

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$, 28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$,

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2^{n+1} n!}$, 30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$.

7. Дослідити на збіжність ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n^n}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{-n^2}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{2n-1}{3n+1}\Big)^{\frac{n}{2}}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^4\Big(\frac{2n}{3n+5}\Big)^{n}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 \sin^n \frac{\pi}{2n}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\Big)^{n^2}$,

7) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3}{(\ln n)^n}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n^2}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{n}{3n-1}\Big)^{n^3}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{2n+1}{3n-2}\Big)^{n^2}$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^3 \operatorname{arctg}^n \frac{\pi}{3n}$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{2n+2}{3n+1}\Big)^{n} \cdot n^3$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{4n-3}{5n+1}\Big)^{n^2}$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{n}{10n+5}\Big)^{n^2}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \cdot \arcsin^n \frac{\pi}{4n}$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{n+2}{3n-1}\Big)^{n^2}$,

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^{n} \cdot \frac{n}{5^n}$, 18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{2n+3}{n+1}\Big)^{n^2}$,

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n^5}{(2n+1)^n}$, 20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{n-1} e^{-n}$,

21) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\Big(\frac{3n-1}{4n+2}\Big)^{2n}$, 22) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{2n}{4n+3}\Big)^{n^2}$,

23) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}}$, 24) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\Big(\dfrac{n}{3n-1}\Big)^{2n}$,

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{n^2}$, 26) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\Big(\dfrac{3n+2}{4n-1}\Big)^{n}$,

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{n+1}{2n-3}\Big)^{n^2}$, 28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{n}{3n+1}\Big)^{2n+1}$,

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n\cdot 3^{n+2}}{5^n}$, 30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \operatorname{arctg}^{2n}\dfrac{\pi}{4n}$.

8. Дослідити на збіжність ряд:

1) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n-1)\ln 2n}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\ln^2(3n+1)}$,

5) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(3n-1)\ln n}$, 6) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+2)\ln^2 n}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$, 8) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$,

9) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n-3)\ln(3n+1)}$, 10) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \dfrac{1}{(3n-5)\ln^2(4n-7)}$,

11) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-3)}}$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)\ln^2(n\sqrt{5}+2)}$,

13) $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \dfrac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln(n-2)}}$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$,

15) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+5)\ln^2(n+1)}$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n\sqrt{2}+1)\ln^2(n\sqrt{3}+1)}$,

17) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+3)\ln^2(n+7)}$, 18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)\ln 2n}$,

19) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$, 20) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(n+1)}$,

21) $\sum\limits_{n=5}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$, 22) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+3)\ln^2 2n}$,

23) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-3)\ln^2\frac{n}{2}}$, 24) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{2n+1}{(3n^2+2)\ln\frac{n}{2}}$,

25) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+5)\ln n}$, 26) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n^2-1)\ln n}$,

27) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{3n}{(2n^2+3)\ln n}$, 28) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$,

29) $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{n+1}{(5n^2-9)\ln(n-2)}$, 30) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{3n}{(n^2-2)\ln 2n}$.

9. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$,

3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{n^3}{(n+1)!}$, 4) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$,

7) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n\ln(\ln n)}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n^2}{(n+2)^3}$,

9) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[5]{n+5}}$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2}$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n!}$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cos\frac{\pi}{6n}$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(\sqrt[4]{n}+1)^3}$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^2}{(\sqrt{2n}+1)^5}$,

17) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$, 18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$,

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{n^3}{(n+1)!}$, 20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{2^n}{(n+1)3^n}$,

21) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{2^n}{n^{10}}$, 22) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$,

23) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n+3}$, 24) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\ln(\ln n)}$,

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$, 26) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n}}$,

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$, 28) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{n^2+1}{2^n(n-1)!}$,

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n \cdot n^n}{(2n)!}$, 30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{n}{(4n^2-1)^2}$.

10. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-3)^n}{3^n+n^3}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{n+2}{n\sqrt{n}}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-5)^n}{1-n\cdot 5^n}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{n^3}{(n+1)^4}$,

5) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{-2n+3}{3n+2}\right)^n$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n n^2}{(n+2)^4}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n \cdot n \cdot 2^n}{(n+1)^3}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^4 \operatorname{arctg}\dfrac{(-1)^n}{4^n}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+3}{2n-3}\right)^n$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{2^n}{n^{n+1}}$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln(2n+1)}$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{5n}{(\sqrt{5})^n}$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{e^n}{n\sqrt{n}+1}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}\operatorname{arctg}\dfrac{(-1)^n}{4n}$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{\sqrt{n}+10}{10^n}$,

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{3^n}{n^3}$, 18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \arcsin\dfrac{\pi}{\sqrt{2n+1}}$,

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$, 20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \sin\dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$,

21) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \arcsin\dfrac{\pi}{3^n}$, 22) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \dfrac{2n-1}{n^2(n+1)^2}$,

23) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\Big(\dfrac{\sin n}{n}\Big)^2$, 24) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{n}{e^n}$,

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{n^{100}}{100^n}$, 26) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$,

27) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}$, 28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{e^n}{n!}$,

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+3}}$, 30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4n}$.

11. Обчислити суму ряду із заданою точністю α :

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$, $\alpha=0,001$, 2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!!}$, $\alpha=0,0001$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!!}$, $\alpha=0,001$, 4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(-\dfrac{2}{5}\Big)^n$, $\alpha=0,01$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{n}{7^n}$, $\alpha=0,0001$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{3n^2}$, $\alpha=0,01$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $\alpha=0,01$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3}$, $\alpha=0,001$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$, $\alpha=0,001$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{n^3(n+1)}$, $\alpha=0,01$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{n}{2^n}$, $\alpha=0,1$, 12) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(-\dfrac{2}{3}\Big)^n$, $\alpha=0,1$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, $\alpha=0,0001$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$, $\alpha=0,001$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n^2}{3^n}$, $\alpha=0,1$, 16) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n!}$, $\alpha=0,01$,

17) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^n}$, $\alpha=0,001$, 18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3+1}$, $\alpha=0,01$,

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{2}{n^2(n+3)}$, $\alpha=0,01$, 20) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n^3+1)^2}$, $\alpha=0,001$,

21) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2+n^3}$, $\alpha=0,01$, 22) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot n}{(1+n^3)^2}$, $\alpha=0,001$,

23) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!2n}, \ \ \alpha = 0,00001,$

24) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{(2n)!n!}, \ \ \alpha = 0,001,$

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}, \ \ \alpha = 0,001,$

26) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(n+1)}, \ \ \alpha = 0,001,$

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot n!}, \ \ \alpha = 0,0001,$

28) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}, \ \ \alpha = 0,001,$

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!n!}, \ \ \alpha = 0,00001,$

30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}, \ \ \alpha = 0,01.$

Приклади розв'язування вправ до розділу I

1. Використовуючи означення, знайти суму ряду $\dfrac{9}{8\cdot 17}+\dfrac{9}{17\cdot 26}+\dfrac{9}{26\cdot 35}+\dfrac{9}{35\cdot 44}+\ldots$. Обчислити частинні суми S_n для $n=10$ і $n=100$. Для кожного із випадків знайти абсолютну Δ_n та відносну δ_n похибки наближеної рівності $S_n \approx S$.

Розв'язання. Загальний член ряду має вигляд $a_n=\frac{9}{(9n-1)(9n+8)}$, оскільки, як перші множники, так і другі множники в знаменниках утворюють арифметичні прогресії, відповідно з $a_1=8, d=9$ та $a_1=17, d=9$. Для знаходження частинної суми доцільно подати кожен член ряду у вигляді суми, використовуючиметод невизначених коефіцієнтів.

$$a_n=\frac{9}{(9n-1)(9n+8)}=\frac{a}{9n-1}+\frac{b}{9n+8}.$$

Тут $a=1, b=-1$. Отже,

$$S_n=\frac{1}{8}-\frac{1}{17}+\frac{1}{17}-\frac{1}{26}+\frac{1}{26}-\frac{1}{35}+\cdots+\frac{1}{9n-1}-\frac{1}{9n+8}=\frac{1}{8}-\frac{1}{9n+8};$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{8};$$

$$S_{10}=\frac{1}{8}-\frac{1}{9\cdot 10+8}=\frac{1}{8}-\frac{1}{98}=\frac{90}{784}=0,1148;$$

$$\Delta_{10}=|\frac{1}{8}-(\frac{1}{8}-\frac{1}{98})|=\frac{1}{98}=0,0102;$$

$$\delta_{10}=\frac{\Delta_{10}}{S_{10}}=\frac{0,0102}{0,1148}=0,08889.$$

$$S_{100}=\frac{1}{8}-\frac{1}{9\cdot 100+8}=\frac{1}{8}-\frac{1}{908}=\frac{900}{7264}=0,1239;$$

$$\Delta_{100}=|\frac{1}{8}-(\frac{1}{8}-\frac{1}{908})|=\frac{1}{908}=0,0011;$$

$$\delta_{100}=\frac{\Delta_{100}}{S_{100}}=\frac{0,0011}{0,1239}=0,008889.$$

2. Використовуючи необхідну умову збіжності ряду, довести, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\sin\dfrac{1}{n^2}$ є розбіжним.

Розв'язання.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^2} = |\infty\cdot 0| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = |\frac{0}{0}|.$$

Використаємо першу визначну границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Якщо $\frac{\sin x}{x}\to 1$ при $x\to 0$, то і $\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}\to 1$ при $n\to\infty$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Необхідна умова збіжності ряду $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не виконується, тому ряд розбіжний.

3. Знайти суму числового ряду $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{36}{n^2+n-2}$.

Розв'язання. Для знаходження частинної суми ряду доцільно кожний член ряду подати як суму двох дробів, скориставшись методом невизначених коефіцієнтів

$$a_n = \frac{36}{n^2+n-2} = \frac{36}{(n-1)(n+2)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+2}.$$

Знаходимо, що $a = 12, b = -12$.

$$S_n = \frac{12}{2} - \frac{12}{5} + \frac{12}{3} - \frac{12}{6} + \frac{12}{4} - \frac{12}{7} + \frac{12}{5} - \frac{12}{8} + \frac{12}{6} - \frac{12}{9} + \dots +$$
$$+\frac{12}{n-4} - \frac{12}{n-1} + \frac{12}{n-3} - \frac{12}{n} + \frac{12}{n-2} - \frac{12}{n+1} + \frac{12}{n-1} - \frac{12}{n+2} =$$
$$= \frac{12}{2} + \frac{12}{3} + \frac{12}{4} - \frac{12}{n} - \frac{12}{n+1} - \frac{12}{n+2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(6+4+3-\frac{12}{n}-\frac{12}{n+1}-\frac{12}{n+2}\right) = 13.$$

Отже, $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{36}{n^2+n-2} = 13$.

4. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(\cos n)^2}{n^3+n}$ за допомогою ознаки порівняння.

Розв'язання. Маємо ряд з додатніми членами.

$$a_n = \frac{(\cos n)^2}{n^3+n} < \frac{1}{n^3}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3}$ –– збіжний, а отже і ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(\cos n)^2}{n^3+n}$ збіжний за першою ознакою порівняння.

5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.

Розв'язання. Маємо ряд з додатніми членами.

Оскільки $0<\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}<1$, то $\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$, тому для порівняння можемо взяти ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{11}{6}}}$. Цей ряд є збіжний як узагальнений гармонійний ряд. Для всіх $n\in N$ виконується нерівність $\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}<\frac{1}{n^{\frac{11}{6}}}$, тому наш ряд збіжний на підставі першої ознаки порівняння.

6. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

Розв'язання. Маємо ряд з додатніми членами. Оскільки в a_n є множник $n!$, то доцільно використати ознаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}:\frac{2^n\cdot n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n!(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)2^n n!}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=2\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{-(n+1)\cdot n}{-(n+1)}}=2\cdot e^{-1}=\frac{2}{e}<1.$$

Отже, ряд збіжний за ознакою Даламбера.

7. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2\left(\dfrac{3n+2}{4n-1}\right)^n$.

Розв'язання. Маємо ряд з додатніми членами, загальний член якого містить множник, що є n-ним степенем. Тому доцільно використати радикальну ознаку Коші.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2\cdot\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n-1}=\frac{3}{4}<1.$$

Отже, ряд збіжний.

8. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{n}{(n^2-1)\ln n}$.

Розв'язання. Маємо ряд з додатніми членами з $a_n = \frac{n}{(n^2-1)\ln n}$. Порівняємо з рядом $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$, для дослідження на збіжність якого застосуємо інтегральну ознаку Коші. Дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x}dx = \ln(\ln x)|_2^{\infty} = \infty.$$

Невласний інтеграл розбіжний, то ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$– розбіжний. Скористаємося ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln n} \cdot \frac{(n^2-1)\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2} = 1.$$

Отже, обидва ряди одночасно розбіжні.

9. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n}}$.

Розв'язання. Дослідимо на абсолютну збіжність.

До ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \cdot \dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n}}\right|$ застосуємо ознаку порівняння. Оскільки $\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n}} > \frac{\frac{\pi}{4}}{\sqrt[3]{n}}$, то дослідимо на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{4}}{\sqrt[3]{n}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$– розбіжний як узагальнений гармонічний ряд, а множення на $\frac{\pi}{4}$ на поведінку ряду не впливає. Тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{\pi}{4}}{\sqrt[3]{n}}$ розбіжний, тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \cdot \dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n}}\right|$– розбіжний, отже вихідний досліджуваний ряд не є абсолютно збіжним. Дослідимо його на умовну збіжність. Він є знакопочережним рядом і $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n}} = 0$. Покажемо, що прямування $a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n}} = 0$ до нуля є монотонним, починаючи хоча б з якогось номера.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x}}$ при $x \geq 1$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\operatorname{arctg} x}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{3x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x}{3x^{\frac{4}{3}}}.$$

Функція $g(x) = \frac{3x}{1+x^2}$ при $x \geq 1$ монотонно спадна, а $h(x) = \operatorname{arctg} x$ монотонно зростає, тому різниця монотонно спадна, причому $g(1) = \frac{3}{2} > h(1) = \frac{\pi}{4}$. Оскільки $f'(1) > 0$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) < 0$ то існує є дина точка x_0 така, що $f'(x_0) = 0$. Тоді при $x > x_0$ $f'(x) < 0$. Отже $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x}}$ монотонно спадна.

При $n > [x_0]$ виконані умови ознаки Лейбніца збіжності знакопочережного ряду. Таким чином досліджуваний ряд є умовно збіжним.

10. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$

Розв'язання. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n-\ln n}$. Порівняємо з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$. Оскільки $\frac{1}{n-\ln n} \geq \frac{1}{n}$ при $n \in N$, то із розбіжності гармонійного ряду випливає розбіжність ряду, складеного з модулів. Отже, початковий ряд не є абсолютно збіжним. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$– знакопочережний. Застосуємо ознаку Лейбніца.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(1-\frac{\ln n}{n})}.$$

Знайдемо $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-\ln n} = 0$. Покажемо, що прямування a_n до нуля є монотонним. Для цього достатньо показати, що функція $y = x - \ln x$ є монотонно зростаюча при $x \geq 1$. Дійсно, $y' = 1 - \frac{1}{x} > 0$ при $x \geq 1$. Отже, досліджуваний ряд є умовно збіжний.

11. Обчислити суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!n!}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

Розв'язання. Маємо знакопочережний ряд, який збіжний за ознакою Лейбніца. Для знаходження наближеного значення суми ряду оцінимо залишок ряду, виходячи з умови, що $R_n \leq a_{n+1}$. Для знаходження кількості доданків в частинній сумі розв'яжемо нерівність

$$\frac{1}{(2(n+1))!(n+1)!} \leq 0,001.$$

При $n = 1$ маємо $\frac{1}{4!2!} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot2} > \frac{1}{1000}$, а при $n = 2$ маємо $\frac{1}{6!\cdot3!} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot2\cdot3} = \frac{1}{4320} < \frac{1}{1000}$. Отже, в частинній сумі достатньо взяти два доданки.

$$S = \frac{-1}{2!1!} + \frac{1}{4!2!} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{48} = -\frac{23}{48} = -0,4792.$$

РОЗДІЛ II. Функціональні послідовності та ряди

§ 2.1. Збіжність і рівномірна збіжність функціональних послідовностей і рядів

Нехай $\mathfrak{X}$ – довільна множина, а $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ – деякі функції. Функціональна послідовність $\{f_n\}$ збігається до функції f ***поточково*** на множині $\mathfrak{X}$ або f є ***поточковою границею*** функціональної послідовності $\{f_n\}$, якщо

$$(\forall x \in \mathfrak{X}) : \left\{ \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \right\},$$

тобто

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathfrak{X})(\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})(\forall n > N) : \left\{ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right\}.$$

Позначають поточкову збіжність на множині $\mathfrak{X}$ наступним чином: $f_n \underset{\mathfrak{X}}{\to} f$.

Функціональна послідовність $\{f_n\}$ називається ***рівномірно збіжною*** на множині $\mathfrak{X}$ до функції f, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall x \in \mathfrak{X}) : \left\{ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \right\}.$$

Рівномірну збіжність позначають так: $f_n \underset{\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} f$.

Теорема 1. *Функціональна послідовність $\{f_n\}$ є рівномірно збіжною на множині $\mathfrak{X}$ до функції f тоді і тільки тоді, коли виконується рівність*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathfrak{X}} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Теорема 2 (критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності). *Функціональна послідовність $\{f_n\}$ є рівномірно збіжною на множині $\mathfrak{X}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathfrak{X})(\forall m, n > N): \ \Big\{|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\Big\}.$$

Нехай $\mathfrak{X}$ – довільна множина, а $f, U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots : \ \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$ – деякі функції. Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ ***поточково (рівномірно)*** збігається до функції f на множині $\mathfrak{X}$, якщо послідовність його частинних сум $\{S_n\}$, де $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k(x)$, поточково (рівномірно) збігається до функції f на цій множині.

Якщо для $x_0 \in \mathfrak{X}$ числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x_0)$ збігається, то функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ збігається в точці x_0. Якщо в кожній точці $x_0 \in \mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}$ числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x_0)$ збігається, то функціональний ряд називається ***збіжним*** в області $\mathfrak{X}_1$. ***Сумою ряду*** називається функція $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$.

Останню рівність за аналогією до числових рядів можна записати у вигляді:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathfrak{X}_1)(\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})(\forall n > N): \ \Big\{|S_n(x) - S(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon\Big\},$$

де $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)$ – n-ий залишок функціонального ряду.

Теорема 3 (критерій Коші поточкової збіжності функціонального ряду). *Для того, щоб функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ був поточково збіжний на множині $\mathfrak{X}_1$, необхідно і достатньо, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathfrak{X}_1)(\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N}): \ \Big\{\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x)\Big| < \varepsilon\Big\}.$$

Для визначення збіжності або абсолютної збіжності можна скористатися або ознакою Даламбера, або ознакою Коші. Якщо $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \alpha(x)$

або $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|U_n(x)|} = \beta(x)$, то функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ збігається абсолютно для всіх x, що задовольняють нерівність $\alpha(x) < 1$ або $\beta(x) < 1$ і розбігається, коли $\alpha(x) > 1$ або $\beta(x) > 1$.

Теорема 4 (критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду). *Для того, щоб функціональний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ *був рівномірно збіжний на множині* $\mathfrak{X}_1$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N)(\forall p \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathfrak{X}_1): \ \left\{\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} U_k(x)\Big| < \varepsilon\right\}.$$

На практиці для дослідження функціонального ряду на рівномірну збіжність рідко користуються означенням (воно передбачає знання суми ряду) або критерієм Коші.

Для дослідження функціональних рядів на рівномірну збіжність використовують достатні ознаки рівномірної збіжності.

Ознака Вейєрштраса. *Якщо елементи ряду* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ *задовольняють умову*

$$(\forall x \in \mathfrak{X})(\forall n \in \mathbb{N}): \ \Big\{|u_n(x)| \le c_n\Big\},$$

причому $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n < +\infty$, *то цей функціональний ряд є рівномірно збіжним на множині* $\mathfrak{X}$.

Ознака Діріхле. *Нехай функції* $a_n(x)$ *і* $b_n(x)$, *де* $n \in \mathbb{N}$, *визначені на множині* $\mathfrak{X}$, *причому виконуються умови:*

1) послідовність частинних сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ *– обмежена, тобто*

$$(\exists M > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathfrak{X}): \ \left\{\Big|\sum_{n=1}^{k} a_n(x)\Big| < M\right\},$$

2) $(\forall x \in \mathfrak{X})(\forall n \in \mathbb{N}): \ \{b_n(x) \ge b_{n+1}(x)\}$ *і* $b_n(x) \underset{\mathfrak{X}}{\rightrightarrows} 0$.

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x)$ *є рівномірно збіжним на множині* $\mathfrak{X}$.

Ознака Абеля. *Нехай функції* $a_n(x)$ *і* $b_n(x)$, *де* $n \in \mathbb{N}$, *визначені на множині* $\mathfrak{X}$, *причому виконуються умови:*

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ *рівномірно збігається на множині* $\mathfrak{X}$,

2) $(\forall x \in \mathfrak{X})(\forall n \in \mathbb{N}) : \ \{b_n(x) \geq b_{n+1}(x)\}$ *і послідовність* $\{b_n(x)\}$ *обмежена на* $\mathfrak{X}$, *тобто*

$$(\exists M > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathfrak{X}) : \ \Big\{|b_n(x)| \leq M\Big\}.$$

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x)$ *є рівномірно збіжним на множині* $\mathfrak{X}$.

Вправи

1. Дослідити на рівномірну збіжність задані функціональні послідовності на вказаній множині $\mathfrak{X}$:

1) $f_n(x) = x^n, \quad \mathfrak{X} = [0;1]$, 2) $f_n(x) = e^{-nx}, \quad \mathfrak{X} = (0;1)$,

3) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}, \quad \mathfrak{X} = \mathbb{R}$, 4) $f_n(x) = x^n - x^2 n, \quad \mathfrak{X} = [0;1]$,

5) $f_n(x) = \dfrac{x^2 n^2}{1 + n^2 x^2}, \quad \mathfrak{X} = (0;1]$, 6) $f_n(x) = \sin^{2n} x, \quad \mathfrak{X} = \Big[0; \dfrac{\pi}{4}\Big]$,

7) $f_n(x) = \dfrac{\ln nx}{\sqrt{nx}}, \quad \mathfrak{X} = [0;+\infty)$, 8) $f_n(x) = \Big(1 + \dfrac{1}{nx}\Big)^{nx}, \quad \mathfrak{X} = (0;1)$,

9) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2 x^2}, \quad \mathfrak{X} = [0;1]$, 10) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}, \quad \mathfrak{X} = \mathbb{R}$.

2. Довести, що задана послідовність рівномірно збігається на вказаній множині:

1) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2 x^2}, \quad \mathfrak{X} = [1;+\infty)$,

2) $f_n(x) = \sin(ne^{-nx}), \quad \mathfrak{X} = [1;+\infty)$,

3) $f_n(x) = \dfrac{\ln nx}{nx^2}, \quad \mathfrak{X} = [1;+\infty)$,

4) $f_n(x) = e^{-nx} \ln n, \quad \mathfrak{X} = (0;+\infty)$,

5) $f_n(x) = n \sin \dfrac{1}{nx}, \quad \mathfrak{X} = [1;+\infty)$,

$$6)\ f_n(x) = \frac{nx^2}{n+2x}, \quad \mathfrak{X} = [1;2],$$

$$7)\ f_n(x) = \ln\Big(1 + \frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}\Big), \quad \mathfrak{X} = [1;+\infty),$$

$$8)\ f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}, \quad \mathfrak{X} = [0;+\infty).$$

3. Визначити множину збіжності та множину рівномірної збіжності функціональної послідовності:

$$1)\ f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \qquad 2)\ f_n(x) = \frac{1}{1+x^n},$$

$$3)\ f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}, \qquad 4)\ f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}},$$

$$5)\ f_n(x) = xe^{-nx}, \qquad 6)\ f_n(x) = \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n,$$

$$7)\ f_n(x) = n\Big(\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} - x\Big), \qquad 8)\ f_n(x) = x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+4},$$

$$9)\ f_n(x) = \cos^{2n} x, \qquad 10)\ f_n(x) = \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}.$$

4. Знайти область збіжності та суму заданих функціональних рядів:

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n},$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3x-1)^{2n}}, \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{3^n},$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^n x}{n}, \qquad 6)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n!},$$

$$7)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n(n+1)}, \qquad 8)\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!},$$

$$9)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}, \qquad 10)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)}.$$

5. Знайти область збіжності функціональних рядів:

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(3x-4)^n}{3^n}, \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2},$$

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\Big(\frac{2x}{1+x^2}\Big)^n$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln^n x$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^n\Big(e^{\frac{x}{n}}-1\Big)^n$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2(5x+9)^{2n-1}}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{x}{2^n}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n\ln n}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 8^{nx}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{x(x+n)}{n}\Big)^n$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{x}{3^n}$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}x^n}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\cdot\sin n^2}{\ln^2 x+n}$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\Big)^x$.

6. Знайти область збіжності і область абсолютної збіжності функціональних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{x}{x+2}\Big)^n$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+\sqrt{n}}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n\sin\frac{1}{3^n x}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big)^n$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n(x-4)}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{x^3}{1+x^3}\Big)^n$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{n\pi x}{3}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{n+2}{2n}}\Big(\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\Big)^n$.

7. Користуючись ознакою Вейєрштраса, довести рівномірну збіжність функціональних рядів на вказаних проміжках:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{1+n^{\frac{5}{2}}x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $x\in[-1;1]$,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(3n+1)3^n}, \quad x \in [-1;3],$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\cos nx, \quad x \in \mathbb{R},$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{xn}{e^{n^2x^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{x^4+n^3\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R},$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^3(2x)^{2n}}{x^2+3n+4}, \quad x \in \left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right],$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{1+n^8x^3}, \quad x \in [1;+\infty),$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)\cos^2 nx}{\sqrt{n^3+x^4}}, \quad x \in [-3;-1],$

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx \sin\frac{x}{n}}{x^3+\ln^3(n+1)}, \quad x \in \mathbb{R}.$

8. Дослідити на збіжність і рівномірну збіжність функціональні ряди на заданих множинах:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{n^2x^5+1}\right)^2, \quad \mathfrak{X} = [0;+\infty),$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^2e^{-n^2x^2}, \quad \mathfrak{X} \equiv \mathbb{R},$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x^2}\sin nx, \quad \mathfrak{X} \equiv \mathbb{R},$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2\sin n\sqrt{x}}{1+n^3x^4}, \quad \mathfrak{X} = [0;+\infty),$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{n^3}, \quad \mathfrak{X} = [-4;-2],$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{7^n}\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right), \quad \mathfrak{X} = \left[\frac{1}{2};2\right],$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2x}{(n^2+1)(1+n^4x^2)\operatorname{arctg}(1+x)}, \quad \mathfrak{X} = (0;+\infty),$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos\frac{x}{n^2}, \quad \mathfrak{X} \equiv \mathbb{R},$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+x}{n}, \quad \mathfrak{X} = (0;1),$

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+\cos\frac{n}{x+1}}, \quad \mathfrak{X} = (1;+\infty),$

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}\operatorname{arctg}\frac{x}{2^n}, \quad \mathfrak{X} = [-2;2],$

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos nx}{n(2nx^2+1)}, \quad \mathfrak{X} = (0;+\infty),$

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2x^2+1} \operatorname{tg}\sqrt{\frac{x}{n}}, \quad \mathfrak{X} = \Big[0;\frac{1}{2}\Big],$

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x\sin x(x+n)}{n^2x^2+n+1}, \quad \mathfrak{X} = [0;+\infty),$

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n}\Big(1+\frac{1}{n}-x\Big)^n, \quad \mathfrak{X} = [0;1],$

16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}^2 \frac{x}{x^2+n^2}, \quad \mathfrak{X} = [0;+\infty),$

17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2x}, \quad \mathfrak{X} = (0;1],$

18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\operatorname{tg}x}, \quad \mathfrak{X} = \Big(0;\frac{\pi}{2}\Big),$

19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4+\sqrt{x}}}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n, \quad \mathfrak{X} = [0;1],$

20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\Big(1+\frac{nx^2}{n^3x^2+1}\Big), \quad \mathfrak{X} \equiv \mathbb{R}.$

9. Показати, що ряд $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ збігається рівномірно до функції $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на інтервалі $(0;+\infty)$. Для яких n залишок ряду $|r_n(x)| < 0,1$ для довільного $x \in (0;1)$?

10. Довести, що коли функціональний ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ рівномірно збігається на множині $\mathfrak{X}$, а функція $f(x)$ обмежена на цій множині, то ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(x)U_n(x)$ рівномірно збігається на $\mathfrak{X}$.

11. Довести, що коли функціональний ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ абсолютно збігається в точках a і b і для довільного $n \in \mathbb{N}$ функції $U_n(x)$ монотонні на відрізку $[a;b]$, то цей ряд збігається абсолютно і рівномірно на $[a;b]$.

Приклади розв'язування вправ

1.5. Знайдемо спочатку поточкову границю цієї послідовності. Нехай $x \in (0;1)$, тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^2}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 1$.

При $x = 1$ маємо, що $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{1+n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{n^2}+1} = 1$.

Отже, послідовність $\left\{\dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}\right\}$ поточково збігається до 1 на множині $\mathfrak{X} = (0;1]$. Обчислимо $\sup\limits_{x\in(0;1]} |f_n(x) - f(x)|$, де $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $f(x) = 1$.

Знайдемо найбільше значення функції $F(x) = f_n(x) - f(x)$ на відрізку $[0;1]$. Маємо

$$F'(x) = \left(\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} - 1\right)' = \frac{2xn^2(1+n^2x^2) - 2xn^2 \cdot n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2xn^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Для $x \in (0;1]$ $F'(x) > 0$, тобто функція $F(x) = f_n(x) - f(x)$ зростає на $(0;1]$. При $x = 0$ $F(0) = 0$, однак точка 0 не входить в проміжок $(0;1]$. Отже, найбільше значення різниця $f_n(x) - f(x)$ набуває в точці $x = 1$.

Враховуючи це дослідження, отримуємо

$$\sup_{x\in(0;1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 - \frac{n^2}{1+n^2}.$$

В результаті маємо, що

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in(0;1]} \left|\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} - 1\right| = \lim_{n+\to\infty} \left(1 - \frac{n^2}{1+n^2}\right) = 0.$$

Отже, за теоремою 1 послідовність $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$ рівномірно збігається до $f(x) = 1$ на множині $\mathfrak{X} = (0;1]$. ►

4.10. Знайдемо область збіжності функціонального ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)},$$

використовуючи ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)x}{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdot\ldots\cdot(1+(n+1)x)}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)}{nx}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{1+(n+1)x}\right| = 0 < 1.$$

Отже, ряд збігається на всій множині дійсних чисел.

Зображаючи n-ий елемент функціонального ряду $U_n(x)$ у вигляді

$$U_n(x) = \frac{1}{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdot\ldots\cdot(1+(n-1)x)} -$$

$$-\frac{1}{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)},$$

знаходимо частинну суму ряду

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)}.$$

Звідси слідує, що

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdot\ldots\cdot(1+nx)}\right) =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

Отже, заданий функціональний ряд абсолютно збіжний на всій множині дійсних чисел. Сума ряду рівна 1, при $x \neq 0$ і 0, при $x = 0$. ▶

6.8. Для дослідження функціонального ряду на абсолютну збіжність використаємо ознаку Коші. Тоді отримаємо:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|U_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{x^3}{1+x^3}\right)^n\right|} = \left|\frac{x^3}{1+x^3}\right| < 1.$$

Отже, заданий ряд збігається абсолютно для всіх значень x, що задовольняють нерівність $-1 < \dfrac{x^3}{1+x^3} < 1$.

Розв'яжемо отриману нерівність, щоб знайти проміжок абсолютної збіжності:

$$\begin{cases} \frac{x^3}{1+x^3} > -1, \\ \frac{x^3}{1+x^3} < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^3+1}{1+x^3} > 0, \\ \frac{1}{1+x^3} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\ x > -1. \end{cases}$$

Отже, при $x \in \left(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}; +\infty\right)$ функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{x^3}{1+x^3}\right)^n$ збігається абсолютно.

Дослідимо ряд в точці $x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Тоді отримаємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$, який є розбіжним, бо $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ не існує. ▶

7.8. При $x \in [1;+\infty)$ отримаємо, що

$$\Big|\frac{\sin nx}{1+n^8x^3}\Big| < \frac{1}{1+n^8x^3} < \frac{1}{1+n^8} < \frac{1}{n^8}.$$

Оскільки узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^8}$ збіжний, то за ознакою Вейєрштраса функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{1+n^8x^3}$ рівномірно збігається при $x \in [1;+\infty)$. ▶

8.4. Для $x \in [0;+\infty)$ справедлива нерівність $1 + n^3x^4 \geq 2n^{\frac{3}{2}}x^2$. Тоді отримаємо:

$$\Big|\frac{x^2\sin nx}{1+n^3x^4}\Big| < \Big|\frac{x^2\sin nx}{2n^{\frac{3}{2}}x^2}\Big| < \frac{|\sin nx|}{2n^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ – збіжний, то за ознакою Вейєрштраса функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^2\sin nx}{1+n^3x^4}$ рівномірно збігається при $x \in [0;+\infty)$. ▶

8.19. Позначимо через $b_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $a_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4+\sqrt{x}}}$.

Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n(x)$ рівномірно збігається при $x \in [0;1]$, бо

$$\Big|\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4+\sqrt{x}}}\Big| < \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}},$$

де ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$ – збіжний.

Послідовність $\{b_n(x)\}$ обмежена на $[0;1]$, бо

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$$

і монотонна для $x \in [0;1]$, бо функція $\varphi(t) = \left(1+\dfrac{x}{t}\right)^n$ спадає при $t \geq 1$ для довільного $x \in [0;1]$.

Отже, за ознакою Абеля функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^4+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ рівномірно збігається при $x \in [0;1]$. ▶

§ 2.2. Властивості рівномірно збіжних функціональних послідовностей і рядів

Розглянемо властивості, якими володіють рівномірно збіжні функціональні послідовності і функціональні ряди.

Теорема 1 (про почленний перехід до границі у послідовності). *Якщо функціональна послідовність $\{f_n\}$ рівномірно збігається на проміжку $\mathfrak{X}$ і для довільного $n \in \mathbb{N}$ існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = c_n$, де x_0 – гранична точка множини $\mathfrak{X}$, то послідовність $\{c_n\}$ збіжна і виконується рівність*

$$\lim_{n\to+\infty} c_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x),$$

тобто символ $\lim\limits_{n\to+\infty}$ границі послідовності і символ $\lim\limits_{x\to x_0}$ границі функції комутують між собою.

Теорема 2 (про неперервність граничної функції). *Якщо функціональна послідовність $\{f_n\}$ неперервних на проміжку $\mathfrak{X}$ функцій рівномірно збігається на ньому, то її гранична функція є неперервною на цьому проміжку.*

Теорема 3 (про почленний перехід до границі у функціональному ряді). *Якщо функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ рівномірно збіжний на $\mathfrak{X}$ до функції $S(x)$, а його елементи $U_n(x)$ неперервні на $\mathfrak{X}$ функції, то його сума $S(x)$ є неперервною функцією на $\mathfrak{X}$, тобто виконується рівність*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} U_n(x)\right).$$

Теорема 4 (про почленне інтегрування функціональної послідовності). *Якщо функціональна послідовність $\{f_n\}$ неперервних на відрізку*

$[a;b]$ *функцій рівномірно збігається до функції* f *на ньому, то виконується рівність*

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx=\int\limits_a^b\lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Теорема 5 (про почленне інтегрування елементів функціонального ряду). *Якщо функціональний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}U_n(x)$ *збігається рівномірно на* $[a;b]$ *до функції* $S(x)$, *а його члени* $U_n(x)$ *неперервні на цьому відрізку функції, то*

$$\int\limits_a^b\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}U_n(x)\Big)dx=\int\limits_a^b S(x)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\int\limits_a^b U_n(x)dx\Big).$$

Теорема 6 (про почленне диференціювання функціональної послідовності). *Якщо функціональна послідовність* $\{f_n\}$ *неперервно диференційовних функцій на відрізку* $[a;b]$ *збігається хоча б в одній точці цього відрізка, а послідовність* $\{f_n'\}$ *рівномірно збігається на* $[a;b]$, *то і послідовність* $\{f_n\}$ *рівномірно збігається на* $[a;b]$ *і виконується рівність*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{df_n(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\Big(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\Big).$$

Теорема 7 (про почленне диференціювання елементів функціонального ряду). *Якщо функціональний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}U_n(x)$ *збігається на відрізку* $[a;b]$ *до* $S(x)$, *функції* $U_n(x)$ – *неперервно диференційовні на* $[a;b]$, *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{d}{dx}(U_n(x))$ *рівномірно збігається на* $[a;b]$, *то сума ряду* $S(x)$ *є неперервно диференційовною функцією, причому виконується рівність*

$$\frac{d}{dx}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}U_n(x)\Big)=S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d}{dx}(U_n(x)).$$

Вправи

1. Знайти границі:

1) $\lim\limits_{x\to+0}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^n n^x}$, 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^3}\Big(\dfrac{x}{x+2}\Big)^n$,

3) $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\cdot\dfrac{x^n}{x^n+1}$, 4) $\lim\limits_{x\to +0}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin nx}{x^2+xn!}$,

5) $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x^n-x^{n-1})$, 6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^2}{1+n^2x^2}$.

2. Вказати область існування заданих функцій і дослідити їх на неперервність:

1) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}$, 2) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^2(1-x^2)^{n-1}$,

3) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2x)^n}{n^2}$, 4) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x}{(1+x^2)^n}$,

5) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(x+\dfrac{1}{n}\right)^n$, 6) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$,

7) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x+(-1)^n n}{x^2+n^2}$, 8) $f(x)=(1-x)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(nx^n-(n-1)x^{n-1})$,

9) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^3e^{-nx}$, 10) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(nxe^{-nx}-(n-1)xe^{-(n-1)x})$.

3. Знайти суми наступних рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+2)}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$, 6) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2nx(x^2-2)^{n-1}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{4n+3}}{(4n-1)(4n+3)}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{n+1}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n}{(1+x^2)^{n+1}}$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n(n+2)}{n+1}x^n$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(n+2)x^{n-1}$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n(n+1)x^{n-1}$, 14) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n^2-2n+1)x^n$,

$$15)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2-n+3}{(x^2-x+1)^n}, \qquad 16)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos x}{n(n+1)}.$$

4. Знайти область визначення функції і дослідити її на неперервність і диференційовність:

$$1)\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+x^n}, \qquad 2)\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+x^{2^{n-1}}),$$

$$3)\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\frac{x}{3^n}, \qquad 4)\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^n;$$

$$5)\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\cos\frac{x}{2^n}, \qquad 6)\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin 2^n\pi x}{2^n},$$

$$7)\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}, \qquad 8)\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2^n},$$

$$9)\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx^2)}{n^3+1}, \qquad 10)\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{n}}.$$

5. Показати, що послідовність $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n$ рівномірно збігається на множині $\mathbb{R}$, хоча

$$\frac{d}{dx}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) \neq \lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}(f_n(x)).$$

6. Довести, що послідовність $\{nxe^{-nx^2}\}$ збігається на відрізку $[0;1]$, хоча

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.$$

7. Показати, що послідовність $f_n(x)=x^2+\dfrac{1}{n}\sin n\bigl(x+\dfrac{\pi}{2}\bigr)$ збігається рівномірно на $\mathbb{R}$, але

$$\frac{d}{dx}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) \neq \lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}(f_n(x)).$$

8. Показати, що послідовність $f_n(x)=nx(1-x^n)$ збігається нерівномірно на відрізку $[0;1]$, але

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

9. Чи законний перехід до границі під знаком інтеграла у виразі

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx?$$

10. Довести, що дзета-функція Рімана $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ неперервна в області $x>1$ і має в цій області похідні всіх порядків.

11. Довести, що тета-функція $\theta(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 x}$ визначена і нескінченно диференційовна при $x>0$.

Приклади розв'язування вправ

1.5. Знайдемо частинну суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x^n-x^{n-1})$, тоді отримаємо

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(x^k-x^{k-1})=x-1+x^2-x+x^3-x^2+\ldots+x^n-x^{n-1}=x^n-1.$$

Перевіримо, чи послідовність $\{S_n\}$ є рівномірно збіжною на множині, що містить точку $x_0=1$, наприклад, на відрізку $[0;1]$.

Знайдемо спочатку поточкову границю при $n\to+\infty$. Тоді

$$\lim_{n\to+\infty}(x^n-1)=\begin{cases}-1, & \text{якщо } x\in[0;1),\\ 0, & \text{якщо } x=1.\end{cases}$$

Однак $\sup\limits_{x\in[0;1]}|x^n-1+1|=\sup\limits_{x\in[0;1)}|x^n|=1\neq 0$. Отже, послідовність $\{S_n\}$ нерівномірно збігається на $[0;1]$, тобто функціональний ряд є нерівномірно збіжним на $[0;1]$.

В такому випадку ми не маємо права переходити до границі під знаком суми заданого функціонального ряду, бо умови теореми 3 не виконуються.

Знайдемо границю безпосередньо:

$$\lim_{x\to1-0}\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n-x^{n-1})=\lim_{x\to1-0}\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{x\to1-0}\lim_{n\to+\infty}(x^n-1)=-1. \quad \blacktriangleright$$

2.10. Дослідимо спочатку функціональний ряд за ознакою Даламбера на абсолютну збіжність:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)xe^{-(n+1)x} - nxe^{-nx}}{nxe^{-nx} - (n-1)e^{-(n-1)x}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{e^{-nx}\cdot x((n+1)e^{-x} - n)}{e^{-nx}\cdot x(n-(n-1)e^{x})}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n(\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-x} - 1)}{n(1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)e^{x})}\right| =$$

$$= \left|\frac{e^{-x}-1}{1-e^{x}}\right| = \frac{1}{e^{x}} < 1, \text{ при } x \in (0;+\infty).$$

Зауважимо, що при $x = 0$ сума функціонального ряду дорівнює нулю. Отже, областю існування функції $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(nxe^{-nx} - (n-1)e^{-(n-1)x}\Big)$ є множина $\mathfrak{X} = [0;+\infty)$.

Знайдемо частинну суму функціонального ряду:

$$S_n(x) = xe^{-x} + 2xe^{-2x} - xe^{-x} + 3xe^{-3x} - 2xe^{-2x} + \ldots +$$

$$+nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)} = nxe^{-nx}.$$

Тоді $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} nxe^{-nx} = 0$, якщо $x \in [0;+\infty)$.

Отже, функція $f(x)$ є неперервною при $x \in [0;+\infty)$. ▶

3.16. Оскільки

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}\cos^{n+2}x}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{(-1)^{n+1}\cos^{n+1}x}\right| = |\cos x|,$$

то за ознакою Даламбера ряд збігається на множині $\mathbb{R}\setminus\{\pi m,\ m\in\mathbb{Z}\}$.

Дослідимо його в точках $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Якщо $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ збігається як знакопочережний за ознакою Лейбніца. Якщо $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$ збігається за ознакою порівняння.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cos^{n+1}x}{n(n+1)}$ збігається на всій множині дійсних чисел.

Розглянемо тепер ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n}(n+1)\cos^{n}x\sin x}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n}\cos^{n}x\sin x}{n}$.

Цей ряд збігається до функції $-\sin x\ln(1+\cos x)$ на множині $\mathbb{R}\setminus\{\pi + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\}$. Крім того, ряд рівномірно збігається для всіх x з цієї множини.

Проінтегрувавши цей ряд почленно у межах від $\frac{\pi}{2}$ до x, де $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \frac{(-1)^n \cos^n t \sin t}{n}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos^{n+1} x}{n(n+1)} =$$

$$= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \ln(1+\cos t)\sin t dt = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \ln(1+\cos t) d(1+\cos t) =$$

$$= \left| \begin{matrix} \ln(1+\cos t) = U, & d(1+\cos t) = dV \\ dU = \dfrac{-\sin t\, dt}{1+\cos t}, & V = 1+\cos t \end{matrix} \right| = (1+\cos t)\ln(1+\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{x} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin t\, dt =$$

$$= (1+\cos x)\ln(1+\cos x) - \cos t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{x} = (1+\cos x)\ln(1+\cos x) - \cos x,$$

де $x \neq \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Зауважимо, що якщо $x = \pi + 2\pi k$, то отримаємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ або $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$. Тоді

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1. \quad \blacktriangleright$$

7. Покажемо, що функціональна послідовність $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ збігається рівномірно на всій множині дійсних чисел.

Знайдемо поточкову границю послідовності:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = x^2.$$

Знайдемо $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$. В нашому випадку маємо

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| = \frac{1}{n}.$$

Тоді $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Отже, $x^2 + \frac{1}{n}\sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} x^2$.

Обчислимо тепер $\lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x)$ та $(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x))'$:

$$\lim_{n\to+\infty} f'_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(2x + \cos n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) \text{ – не існує,}$$

$$(\lim_{n\to+\infty} f_n(x))' = (x^2)' = 2x.$$

Дійсно, $\lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x) \neq (\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x))'$.

Зауважимо, що рівність не виконується, бо послідовність $\{f'_n(x)\}$ не є рівномірно збіжною на $\mathbb{R}$.

Індивідуальні завдання до розділу II

1. Знайти область збіжності функціонального ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{3^n}\cdot(x^2-4x+6)^n$,

2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{5}{3}\right)^n \cdot \dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot x^{2n}\cos(x-\pi n)$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$,

4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^{3n}}{\sqrt[3]{n}}\cdot x^{4n}\sin(3x+\pi n)$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+3}\cdot\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^n$,

6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{6^n}{n}\cdot x^{2n}\sin(5x-\pi n)$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n\cdot 2^n}{n+1}\cdot\dfrac{1}{(3x^2+8x-6)^n}$,

8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5^n}{\sqrt[4]{3n}}\cdot x^{2n}\cos(x+\pi n)$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x^2-5x+11)^n}{5^n(n^2+5)}$,

10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{9^n}{2n}\cdot x^{2n}\sin(3x-\pi n)$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{2^n(n^2+1)}\cdot(25x^2+1)^n$,

12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n x^{3n}\sin\dfrac{x}{n}$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n^3}{n^3+2}\cdot\dfrac{1}{(3x^2+10x+9)^n}$,

14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^{2n}x^n\sin\dfrac{x}{2n}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{9^n}{n}\cdot x^{2n}\sin(x+\pi n)$,

16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{3n}x^n\sin\dfrac{2x}{n}$,

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4^n}{n}\cdot x^{4n}\sin(2x-\pi n)$,

18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n x^{3n}\sin\dfrac{3x}{\sqrt{n}}$,

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\cdot\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$,

20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n x^n\operatorname{tg}\dfrac{3x}{n}$,

21) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n}{n}\cdot x^{4n}\cos(x+\pi n)$,

22) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 8^n x^{3n}\operatorname{tg}\dfrac{x}{4\sqrt{n}}$,

23) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{3n}\operatorname{tg}\dfrac{2x}{3n}$, 24) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n x^n \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{n+1}$,

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n x^{3n}\arcsin\dfrac{x}{3n}$, 26) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n x^{3n}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2(n+3)}$,

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 16^n x^{3n}\arcsin\dfrac{x}{\sqrt[3]{n}}$, 28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{8^n}{n^2}\cdot\sin^{3n} x$,

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 32^n x^{5n}\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{n}}$, 30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n^4}\cdot\sin^{n} 3x$.

2. Знайти область збіжності функціонального ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{x^n+1}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+e^{-nx}}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x)}}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2\sin\frac{x^2+1}{n}}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+1)^{x+2}}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1+x^n}{1-x^n}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1+\dfrac{4}{n}\right)^n e^{n(x^2-4)+x\sqrt{n}}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+5}{n^{3x-x^2}}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}}{x^2+n^2}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\arcsin 3^{-nx}$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{n^2\sin\frac{x^2+1}{n}}$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n 4^{\frac{n^2}{x}}$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2\operatorname{arctg} 2^{nx}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{e^{nx}+1}$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{n^{x^2+1}+4}$,

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{n(x^2-4x+3)+x\sqrt{n}}$, 18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln(1+x^2)}}$,

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{(\sqrt{n^3}+n)^{x+1}}$, 20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(3+\dfrac{1}{n}\right)^n 4^{-\frac{n^2}{x}}$,

21) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\arcsin 3^{nx}$, 22) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^5}{n^{x^2+2}+3}$,

23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+e^x)}$, 24) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln|x|}}$,

25) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \operatorname{arctg} 2^{-nx}$, 26) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+e^x)(n^2+1)}$,

27) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n^{2+3x-x^2}}$, 28) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(x\sqrt{n}-1)^2}$,

29) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n e^{-\frac{n}{1+x^2}+x\sqrt{n}}$, 30) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(n^2+\sqrt{n}+1)^{x+1}}$.

3. Знайти область збіжності функціонального ряду:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n(x^2-6x+13)^n}$, 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n^2} \cdot \sin^{2n} x$,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6^n}{n^3} \cdot \sin^n x$, 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n x}{2^n n^2}$,

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n 3^{\frac{n}{x-1}}$, 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n(x^2-2x+3)^n}$,

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{2^n} \cdot (x^2-5x+11)^n$, 8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \cdot \operatorname{tg}^n 2x$,

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 8^n n^2 \sin^{3n} x$, 10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n\sin x}$,

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \cdot 2^{\frac{n}{4-x}}$, 12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2+1)^n}{2^n(n+1)}$,

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \operatorname{tg}^n x$, 14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{n(x^2-5x+10)^n}$,

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot \sin^{2n} 2x$, 16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{3^n}} \cdot \operatorname{tg}^n x$,

17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n(x+e)}{n+e}$, 18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^n(x-e)}{n-e}$,

19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2-6x+12)^n}{4^n(n^2+1)}$, 20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2-2x+2)^n}{2^n(n^2+2)}$,

21) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n} \cdot \operatorname{tg}^{2n} x$, 22) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{3^n}}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{tg}^n 2x$,

23) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-\frac{n}{\cos x}}$,

24) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n^4} \cdot \sin^n 3x$,

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^n}{n^2(x^2+2)^n}$,

26) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \cdot 4^{\frac{n}{x-2}}$,

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \cdot 5^{\frac{n}{3-x}}$,

28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \cdot e^{n \sin x}$,

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^n}{n^2(x^2-4x+5)^n}$,

30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4^n}{n^3(x^2-4x+7)^n}$.

Приклади розв'язування вправ до розділу II

1. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n x^{3n} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2(n+3)}$.

Розв'язання. При $x = 0$ ряд збіжний. Дослідимо на абсолютну збіжність, використовуючи ознаку Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{3(n+1)} \operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+4)}}{2^n x^{3n} \operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+3)}} \right| = \lim_{n\to\infty} 2|x^3| \left| \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+4)}}{\operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+3)}} \right| =$$

$$= 2|x^3| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+4)}}{\operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+3)}} \right|.$$

Функція $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+4)}}{\operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+3)}}$ приймає додатні значення для всіх $x \in R\backslash\{0\}$. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+4)}}{\operatorname{arctg} \frac{x}{2(n+3)}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{2(n+4)}}{\frac{x}{2(n+3)}} = 1$.

Отже, ряд збіжний при всіх x, що задовольняють нерівність $2|x|^3 < 1$ або $|x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Перевіримо поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності.

При $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{3n} \operatorname{arctg} \dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{2(n+3)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2(n+3)\sqrt[3]{2}}$.

Дослідимо цей ряд на збіжність, як додатній ряд. Скористаємося граничною ознакою порівняння.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2(n+3)\sqrt[3]{2}}}{\frac{1}{2(n+3)\sqrt[3]{2}}} = 1.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}(n+3)}$ – розбіжний (можна порівняти з гармонічним рядом). Отже, при $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ряд розбіжний.

При $x = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}$ маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{3n} \operatorname{arctg} \frac{\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}}{2(n+3)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{3n+1} \operatorname{arctg} \frac{1}{2(n+3)\sqrt[3]{2}}.$$

Даний ряд є знакопочережним. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2(n+3)\sqrt[3]{2}} = 0$. При $x > 0$ функція $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{2(n+3)\sqrt[3]{2}}$ монотонно спадна. Отже, умови ознаки Лейбніца виконані, тому досліджуваний знакозмінний ряд є збіжним. Тому ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n x^{3n} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{2(n+3)}$ збіжний при $x \in [\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$.

2. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{(n+e^x)(n^2+1)}$.

Розв'язання. Маємо ряд з додатніми членами, тому скористаємося ознаками збіжності додатніх рядів. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Оскільки для всіх $x \in R$ виконується нерівність $\frac{n}{(n+e^x)(n^2+1)} < \frac{1}{n^2}$, то із збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+e^x)(n^2+1)}$ для всіх $x \in R$.

3. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \cdot 4^{\frac{n}{x-2}}$.

Розв'язання. При всіх фіксованих $x \in R \backslash \{2\}$ маємо ряди з додатніми членами. Для дослідження на збіжність скористаємося радикальною ознакою Коші, бо маємо множник $\left(4^{\frac{1}{x-2}}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \cdot 4^{\frac{n}{x-2}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(4^{\frac{1}{x-2}}\right)^n} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 4^{\frac{1}{x-2}}.$$

Для збіжності ряду повинна виконуватися нерівність $4^{\frac{1}{x-2}} < 1$, розв'язавши яку одержуємо, що $x < 2$. Отже наш ряд збіжний при $x \in (-\infty; 2)$.

Розділ III. Степеневі ряди

§ 3.1. Степеневі ряди. Властивості

Функціональний ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, де $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовність дійсних чисел, називається ***степеневим рядом***. Числа a_n, $n = 0, 1, \ldots$, називаються ***коефіцієнтами*** степеневого ряду.

Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ завжди збігається в точці $x = x_0$.

Теорема Коші-Адамара. *Степеневий ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *абсолютно збігається в точці* x_0 *і для всіх значень* x, *що задовольняють нерівність* $|x-x_0| < \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Заданий ряд є розбіжним для всіх значень x, що задовольняють нерівність $|x-x_0| > \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Число $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ називається ***радіусом збіжності*** степеневого ряду, проміжок $(x_0 - R; x_0 + R)$ називається ***інтервалом збіжності*** степеневого ряду.

Радіус збіжності степеневого ряду можна шукати також за формулою

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Областю збіжності степеневого ряду називають один із інтервалів $(x_0 - R; x_0 + R)$, $(x_0 - R; x_0 + R]$, $[x_0 - R; x_0 + R)$, $[x_0 - R; x_0 + R]$.

Теорема 1. *Нехай степеневий ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *має радіус збіжності* $R>0$, *і функція* $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, $|x-x_0|<R$. *Тоді для будь-якого додатного числа* $r<R$ *ряд рівномірно збігається при* $|x-x_0|<r$, *а функція* $f(x)$ *є неперервною на* $(x_0-R;x_0+R)$.

Теорема Абеля. *Якщо* R *– радіус збіжності степеневого ряду* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $R<+\infty$, *і цей ряд збігається при* $x=R$, *то він збігається рівномірно на відрізку* $[0;R]$, *а його сума є неперервною на цьому відрізку, зокрема*

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Теорема 2. *Якщо степеневий ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, $a_n, x_0\in\mathbb{R}$, *має радіус збіжності* $R>0$, *то:*

1) в інтервалі збіжності $(x_0-R;x_0+R)$ *функція* $f(x)$ *має похідні будь-якого порядку, що отримуються за допомогою почленного диференціювання степеневого ряду;*

2) в середині інтервалу збіжності степеневий ряд можна почленно інтегрувати, тобто

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},\quad x\in(x_0-R;x_0+R);$$

3) степеневі ряди, що отримуються із степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ *при почленному диференціюванні та інтегруванні, мають такий самий радіус збіжності, що і початковий ряд.*

Вправи

1. Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневого ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3^n x^n}{n^2}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(3x+2)^n}{3n-2}$,

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}5^n(x+2)^n$,

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{4^n}\,x^{3n}$,

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{c^{n^2}}\,x^{2n}, \quad c>0$,

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}\,x^n$,

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\,x^n$,

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n(x+1)^n}{n\ln^2(n+1)}$,

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$,

11) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n+1}\,(x+2)^n$,

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^n(x+1)^{2n}$,

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+5}\right)^{n^3}(x-2)^n$,

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\cos\frac{1}{3^n}\right)x^n$,

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}2^{\ln n}(x-1)^n$,

16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!(x+7)^n}{n^n}$,

17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^2}\right)^{n^2}(x+2)^n$,

18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x-2)^n}{2^n\ln(n+1)}$,

19) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{\frac{\ln^3(n+1)}{n+1}}\,(x-1)^n$,

20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n!e^{-n^2x^n}$,

21) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}2^{n^2}x^{n^2}$,

22) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n^nx^{n^2}$,

23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x+4)^n}{n\cdot 3^n}$,

24) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!\,x^n}{(2n-1)!!}$,

25) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(3-2x)^n}{n-\ln^2 n}$,

26) $\displaystyle\sum_{n=5}^{+\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+4}{n-4}$,

27) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^nn!}{n^n}\,x^n$,

28) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)(n+6)^{2n+1}}{(2n)!}\,x^{2n+1}$,

29) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt{n^2+1}}$,

30) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$.

2. Знайти суми заданих степеневих рядів:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n\,x^{n-1}$,

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(x^2-1)^n$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{2n \cdot 3^n}$, 6) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$,

7) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2+n+1)x^{n+3}$, 8) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n-1)9^n}$,

11) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n+n}{n(n-1)} x^n$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(2n+1)x^{n+2}$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!(n+2)}$, 14) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2}\right) x^{n+2}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (n^2+7n+4)x^n$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$,

17) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-1)n}$, 18) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2-2n-2)x^{n+2}$,

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}$, 20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2-n+3}{(x^2-x+1)^n}$.

3. Обчислити суми числових рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$, 2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$,

3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$, 4) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$,

5) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$,

7) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+6n+5}{3^{n+1}}$, 8) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$, 10) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n^4-5n^2+4)5^n}$.

4. Скласти лінійні диференціальні рівняння, які задовольняють суми даних степеневих рядів. Скориставшись отриманими рівняннями, знайти суми цих рядів:

$$1)\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n!}, \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}\,x^{3n},$$
$$3)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{2^n}\sin\frac{\pi n}{4}}{n!}\,x^n, \qquad 4)\ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^{3n}n!}.$$

5. Довести наступні рівності:

$$1)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}(\pi+2\ln(1+\sqrt{2})),$$
$$2)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n+2}=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2\right),$$
$$3)\ 1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

6. Довести, що функція $I_0(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{((2n)!!)^2}$ задовольняє умову $\int\limits_0^x I_0(x-t)I_0(t)dt=\sin x.$

Приклади розв'язування вправ

1.17. Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(1+\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^2})^{n^2}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^2})^n}=$$
$$=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n^2+n}{n^2}}}=\frac{1}{e}.$$

Отже, $\left(-2-\frac{1}{e};-2+\frac{1}{e}\right)$ – інтервал збіжності заданого степеневого ряду. Дослідимо ряд на кінцях інтервалу. Нехай $x=-2-\frac{1}{e}$, тоді отримаємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^2}\right)^{n^2}\frac{(-1)^n}{e^n}$.

Перевіримо виконання необхідної умови збіжності:

$$\lim_{n\to+\infty}|a_n|=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^2}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n}=$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{1}}\frac{1}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} e^{n+1-n} = e \neq 0.$$

Отже, ряд розбіжний в точці $x = -2 - \dfrac{1}{e}$.

Аналогічно, в точці $x = -2 + \dfrac{1}{e}$ числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\operatorname{arctg}\dfrac{n+1}{n^2}\right)^{n^2}\dfrac{1}{e^n}$ є розбіжним, бо

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^2}\right)^{n^2}\frac{1}{e^n} = e \neq 0.$$

Отже, областю збіжності заданого степеневого ряду є множина значень $x \in \left(-2-\dfrac{1}{e}; -2+\dfrac{1}{e}\right)$. ►

2.2. В степеневому ряді $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(x^2-1)^n$ зробимо заміну $x^2-1=t$. Тоді отримаємо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^n$. Знайдемо область збіжності цього ряду. Оскільки $R = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n+2} = 1$, то $(-1;1)$ – інтервал збіжності.

Якщо $t=-1$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(-1)^n$ – розбіжний, якщо $t=1$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)$ – розбіжний.

Отже, $t \in (-1;1)$ – область збіжності. Враховуючи, що $t \in (-1;1)$, проінтегруємо обидві частини рівності

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)t^n,$$

тоді отримуємо

$$\int_0^t s(y)dy = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+1} = \frac{t}{1-t}.$$

Звідси $s(t) = \left(\dfrac{t}{1-t}\right)' = \dfrac{1}{(1-t)^2}$. Оскільки $t = x^2-1$, то

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(x^2-1)^n = \frac{1}{(2-x^2)^2}.$$

Ця рівність має місце для всіх значень x, що задовольняють нерівність $|x^2-1|<1$. Звідси $x\in(-\sqrt{2};0)\cup(0;\sqrt{2})$.

Отже, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(x^2-1)^n=\dfrac{1}{(2-x^2)^2}$ при $x\in(-\sqrt{2};0)\cup(0;\sqrt{2})$. ▶

3.8. Подамо ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}$ як суму двох рядів $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ та $2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$, розклавши дріб $\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}=\dfrac{-1}{n+1}+\dfrac{2}{2n+1}$.

Тепер розглянемо допоміжні ряди $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+1}$ і $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

Зауважимо, що

$$\lim_{x\to1-0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}.$$

Знайдемо тепер суми степеневих рядів $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+1}$ і $2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Обчислимо спочатку похідні цих рядів:

$$(S_1(x))'=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}x^n=\frac{-1}{1+x},$$

$$(S_2(x))'=2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{2}{1+x^2}.$$

Звідси

$$S_1(x)=-\int_0^x\frac{dt}{1+t}=-\ln|1+x|,$$

$$S_2(x)=2\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=2\operatorname{arctg}x.$$

Отже, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n+1}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=2\operatorname{arctg}x-\ln|1+x|$. Тоді

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}=\lim_{x\to1-0}(2\operatorname{arctg}x-\ln|1+x|)=\frac{\pi}{2}-\ln 2. \quad ▶$$

4.2. Заданий степеневий ряд є збіжним на всій множині дійсних чисел, бо $R = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(3n)!} = +\infty$. Позначимо через $S(x) = 1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^9}{9!} + \dots$. Тоді продиференціюємо $S(x)$ почленно:

$$S'(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \dots,$$

$$S''(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

$$S'''(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \dots.$$

Зауважимо, що $S(x) = S'''(x)$. Це співвідношення можна розглядати, як диференціальне рівняння відносно суми $S(x)$. Для цього рівняння початкові умови мають вигляд $S(0) = 1,\ S'(0) = 0,\ S''(0) = 0$.

Рівняння $S'''(x) - S(x) = 0$ є лінійним однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння $\lambda^3 - 1 = 0$, тоді $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Отже, загальний розв'язок рівняння запишеться у вигляді $S(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

Враховуючи початкові умови, маємо:

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 1, \\ c_1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \dfrac{1}{2}c_3 = 0, \\ c_1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \dfrac{1}{2}c_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $c_1 = \dfrac{1}{3}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \dfrac{2}{3}$. Отже, $S(x) = \dfrac{1}{3}e^x + \dfrac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ – розв'язок рівняння $S'''(x) - S(x) = 0$, що задовольняє умови $S(0) = 1,\ S'(0) = 0$, $S''(0) = 0$, і є сумою степеневого ряду $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$. ►

§ 3.2. Ряд Тейлора. Розвинення функцій в степеневі ряди

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 і має в цій точці похідні всіх порядків. Тоді степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

називається ***рядом Тейлора*** функції $f(x)$ за степенями $x - x_0$.

Для довільного степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ його сума $f(x)$ є функцією, визначеною на інтервалі збіжності і, можливо, в одному або двох його кінцях, якщо інтервал скінченний. Подання $f(x)$ у скінченному виді через елементарні або неелементарні функції є результатом ***задачі підсумування ряду***.

Оберненою до вищенаведеної є задача відшукання за заданою функцією $f(x)$ степеневого ряду, для якого $f(x)$ є його сумою. Така задача називається ***задачею розвинення функції в степеневий ряд***, а про саму функцію $f(x)$, для якої існує степеневий ряд, збіжний на множині $\mathfrak{X}$, кажуть, що вона розвивається в степеневий ряд на цій множині.

Теорема 1. *Якщо функцію $f(x)$ можна зобразити в околі точки x_0 сумою степеневого ряду, то цей ряд єдиний і є рядом Тейлора для функції $f(x)$ в точці x_0.*

Функцію, що задовольняє умови теореми, називають ***аналітичною*** в точці x_0. Аналітична в точці x_0 функція має в деякому околі x_0 похідні всіх порядків. Обернене твердження неправильне, бо ряд Тейлора функції $f(x)$ не завжди збігається до цієї ж функції.

З'ясуємо тепер умови, якими повинна задовольняти функція $f(x)$ для того, щоб її можна було зобразити рядом Тейлора, тобто, щоб виконувалась рівність

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n.$$

Для функції $f(x)$ можна записати формулу Тейлора у вигляді

$$f(x) = P_n(x, x_0) + R_{n+1}(x, x_0),$$

де $P_n(x, x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k$ – многочлен Тейлора, а $R_{n+1}(x, x_0)$ – залишковий елемент формули Тейлора, який можна записати або у формі Пеано

$$R_{n+1}(x, x_0) = o\left((x - x_0)^n\right),$$

або у формі Лагранжа

$$R_{n+1}(x,x_0)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1,$$

або у формі Коші

$$R_{n+1}(x,x_0)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1,$$

або у формі Шлемільха-Роша

$$R_{n+1}(x,x_0)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!p}(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1},\ \ 0<\theta<1,\ \ p>0,$$

або в інтегральній формі

$$R_{n+1}(x,x_0)=\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Перейшовши в формулі Тейлора до границі при $n\to+\infty$ маємо

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\lim_{n\to+\infty}R_{n+1}(x,x_0).$$

Теорема 2. *Для того, щоб функція $f(x)$ була сумою свого ряду Тейлора на його інтервалі збіжності, необхідно і достатньо, щоб для довільного $x\in(x_0-R;x_0+R)$ виконувалась рівність*

$$\lim_{n\to+\infty}R_{n+1}(x,x_0)=0.$$

Очевидно, що якщо функція $f(x)$ нескінченну кількість разів диференційовна на інтервалі $(x_0-R;x_0+R)$, та існує $M>0$ таке, що для $n=0,1,2,\ldots$ і для довільного $x\in(x_0-R;x_0+R)$ виконується нерівність $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$, то цього достатньо для розвинення функції в ряд Тейлора.

Якщо $x_0=0$, то ряд Тейлора називається ***рядом Маклорена*** і тоді

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Наведемо розвинення деяких елементарних функцій в ряди Маклорена:

1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R},$

2) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R},$

3) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R},$

4) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \dfrac{\alpha x}{1!} + \dfrac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} +$

$$+ \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots, \quad x \in (-1;1),$$

5) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \ x \in (-1;1],$

6) $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \dfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \ x \in \mathbb{R},$

7) $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R},$

8) $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$

Вправи

1. Розвинути в ряд Маклорена задану функцію $f(x)$ і знайти його радіус збіжності:

1) $f(x) = e^{\frac{x}{4}}$,

2) $f(x) = 3xe^x$,

3) $f(x) = e^{-(x+4)^2}$,

4) $f(x) = \sin 4x$,

5) $f(x) = x\cos 2x$,

6) $f(x) = \cos^3 x$,

7) $f(x) = \sin 3x \cos 7x$,

8) $f(x) = x\cos^3 3x$,

9) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$,

10) $f(x) = \dfrac{x}{x+5}$

11) $f(x) = \dfrac{x}{x^4+5x^2+4}$,

12) $f(x) = \arcsin x$,

13) $f(x) = \dfrac{x}{x^3+x^2-2x-9}$,

14) $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$,

15) $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$,

16) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$,

17) $f(x) = \ln(x^2 + 7x + 10)$,

18) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$,

19) $f(x) = \ln(12 - x + x^2)$,

20) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$,

21) $f(x) = \ln\dfrac{3+x}{3-x}$,

22) $f(x) = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$,

23) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$,

24) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sqrt[3]{1+t^3}-1}{t^2}\,dt$,

25) $f(x) = \ln((2+x)^{2+x}) + \ln((2-x)^{2-x})$,

26) $f(x) = \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$,

27) $f(x) = \operatorname{arctg}^2 x$;

28) $f(x) = \ln^2(1-x)$,

29) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{(x+3)(x-5)^2}$,

30) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

2. Розвинути функцію $f(x)$ у ряд Тейлора в околі точки x_0 і знайти його радіус збіжності:

1) $f(x) = e^x,\ x_0 = -2$,

2) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1$,

3) $f(x) = 3^x,\ x_0 = 1$,

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1},\ x_0 = 2$,

5) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$,

6) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$,

7) $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1$,

8) $f(x) = \ln\dfrac{2+x}{2-x},\ x_0 = 1$,

9) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+6},\ x_0 = 1$,

10) $f(x) = \cos^4 x,\ x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$,

11) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-12x+40}},\ x_0 = 6$,

12) $f(x) = \ln\dfrac{x^2-2x+3}{2-x},\ x_0 = 1$,

13) $f(x) = \sin^3 x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{6}$,

14) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{3-2x^2-2x}{8x^2+8x+4},\ x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

3. Довести наступні рівності:

1) $\cos^2 x = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$,

2) $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x| < 1$,

3) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \quad |x| < 1$,

4) $\sqrt{1+x^2} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\,x^{2n}, \quad |x|<1,$

5) $\ln(ax+b) = \ln b + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\dfrac{x^n}{n}, \quad |x|<\dfrac{b}{|a|},$

6) $e^x\sin x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}\,x^n, \quad x\in\mathbb{R},$

7) $(x-\operatorname{tg}x)\cos x = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n+1)}, \ x\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\Big(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\Big),$

8) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{3n}}{(3n)!} = \dfrac{1}{3}\Big(e^x + 2e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{x\sqrt{3}}{2}\Big), \quad x\in\mathbb{R},$

9) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{4n}}{(4n)!} = \dfrac{1}{2}(\operatorname{ch}x + \operatorname{sh}x), \quad x\in\mathbb{R},$

10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n(n+2)} = \dfrac{x^2+2x}{4} + \dfrac{1}{2}(1-x^2)\ln(1-x), \quad |x|<1,$

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}(1-x^2)\ln(1-x), \quad x\in\mathbb{R},$

12) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n = \dfrac{6}{(1-x)^4}, \quad |x|<1.$

4. Нехай $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}$. Довести безпосередньо, що $f(x)\cdot f(y) = f(x+y)$.

5. Якщо ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ має радіус збіжності R_1, а ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$ – радіус збіжності R_2, то який радіус збіжності буде у рядів:

$$\text{а)}\ \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\pm b_n)x^n, \qquad \text{б)}\ \sum_{n=0}^{+\infty}a_nb_nx^n?$$

6. За означенням мають місце такі розвинення: $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ і $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$. Довести, що тоді $\sin x\cdot\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

7. Нехай $f(x)$ є нескінченно диференційовною функцією на (a,b) і $|f^{(n)}(x)|\le c^n$, де $n=0,1,2,\ldots$ при $\lambda\in(a,b)$. Довести, що функція $f(x)$ розвивається в степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$, $x_0\in(a,b)$, який збігається на інтервалі (a,b).

Приклади розв'язування вправ

1.17. Перепишемо початкову функцію $f(x)$ у вигляді

$$f(x) = \ln\left((x+5)(x+2)\right) = \ln\left(10\left(1+\frac{x}{5}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\right) =$$

$$= \ln 10 + \ln\left(1+\frac{x}{5}\right) + \ln\left(1+\frac{x}{2}\right).$$

Скористаємось розкладом функції $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1;1].$$

Тоді

$$\ln\left(1+\frac{x}{5}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}, \quad -1 < \frac{x}{5} \le 1,$$

$$\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}, \quad -1 < \frac{x}{2} \le 1.$$

Отже,

$$f(x) = \ln 10 + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} =$$

$$= \ln 10 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{5^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^{n+1},$$

де $-2 < x \le 2$, тобто радіус збіжності отриманого ряду $R = 2$. ▶

1.27. Оскільки $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, $x \in [-1,1]$, то для розкладу функції $f(x) = \operatorname{arctg}^2 x$ скористаємося правилом множення степеневих рядів. Тоді

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}c_n,$$

де $c_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1}(-1)^{n-k}\frac{x^{2n-2k+1}}{2n-2k+1}$. Звідси

$$c_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2k-1)(2n-2k+1)} =$$

$$= (-1)^{n-1} x^{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-1-2n} \right) \frac{1}{2n} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k-1-2n} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n} \left(1 - \frac{1}{1-2n} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3-2n} + \ldots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2n-1} + 1 \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n x^{2n}}{n} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1} \right).$$

Отже, $\operatorname{arctg}^2 x = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \left(1 + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} \right) x^{2n}$, і $R = 1$ – радіус збіжності отриманого ряду. ▶

1.30. Дослідимо, чи можна обчислити інтеграл $\int\limits_0^x \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ в скінченному виді:

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int\limits_0^x (1-t^4)^{-\frac{1}{2}} dt = \left| \begin{matrix} m = 0, \ \ n = 4, \ \ p = -\dfrac{1}{2}, \\ p \notin \mathbb{Z}, \ \ \dfrac{m+1}{n} = \dfrac{1}{4} \notin \mathbb{Z}, \ \ \dfrac{m+1}{n} + p = -\dfrac{1}{4} \notin \mathbb{Z} \end{matrix} \right|.$$

Отже, за теоремою Чебишева заданий інтеграл в скінченному вигляді не обчислюється.

Розкладемо підінтегральну функцію в степеневий ряд. Тоді отримаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^4}} = (1-t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1) \cdot \ldots \cdot (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} t^{4n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2}}{n!} t^{4n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} t^{4n}.$$

Інтегруючи крайні частини співвідношення, отримуємо, що

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int\limits_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} t^{4n} \right) dt = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!! x^{4n+1}}{2^n n! (4n+1)},$$

в якому $R = 1$ – радіус збіжності. ▶

2.10. Зробимо заміну $x + \dfrac{\pi}{2} = t$, $x = t - \dfrac{\pi}{2}$. Тоді

$$f^*(t) = f\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos^4\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^4 t.$$

Перетворимо функцію $f^*(t)$ і розкладемо її в ряд Маклорена. Тоді

$$f^*(t) = \Big(\frac{1-\cos 2t}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}\,(1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\,(1 + \cos 4t) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t.$$

Розклад функції в ряд Маклорена матиме вигляд:

$$f^*(t) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2t)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(4t)^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,4^n(1-4^{n-1})t^{2n}.$$

Остаточно отримуємо розвинення функції в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ виду

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,4^n(1-4^{n-1})\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big)^{2n},$$

де $x \in \mathbb{R}$. ▶

3.12. Проінтегруємо на проміжку від 0 до x послідовно степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n$ три рази. Тоді на відповідних кроках отримаємо ряди:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+3)x^{n+1},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)x^{n+2},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n+3}.$$

Враховуючи, що $-1 < x < 1$, запишемо $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^{n+3} = \dfrac{x^3}{1-x}$. Тричі продиференціюємо обидві частини останньої рівності, щоб отримати початковий степеневий ряд. Тоді

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)x^{n+2} = \left(\frac{x^3}{1-x}\right)' = \frac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2} = \frac{3x^2-2x^3}{(1-x)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+3)x^{n+1} = \frac{(6x-6x^2)(1-x)^2+2(1-x)(3x^2-2x^3)}{(1-x)^4} =$$

$$= \frac{6x-6x^2-6x^2+6x^3+6x^2-4x^3}{(1-x)^3} = \frac{6x-6x^2+2x^3}{(1-x)^3},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)(n+2)(n+1)x^n =$$

$$= \frac{(6-12x+6x^2)(1-x)^3+3(1-x)^2(6x-6x^2+2x^3)}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^4}.$$

Що й треба було довести.

Зауважимо, що для доведення цієї тотожності, можна взяти праву частину $\dfrac{6}{(1-x)^4}$ і розвинути її в ряд Маклорена. Тоді

$$\frac{6}{(1-x)^4} = 6(1-x)^{-4} = 6\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-4)(-5)\cdot\ldots\cdot(-4-n+1)}{n!}(-1)^n x^n\right) =$$

$$= 6\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n+3)}{n!}x^n\right) = 6\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{2\cdot 3}\right) =$$

$$= 6+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n,$$

де $|x|<1$. ►

§ 3.3. Застосування степеневих рядів

На практиці розвинення функцій у ряди Тейлора широко використовується при розв’язуванні задач математичного аналізу, пов’язаних з поняттям функції.

За допомогою рядів Тейлора і Маклорена можна визначити функції, знаходячи значення їх за даними значеннями аргумента або значення аргумента за заданими значеннями функції з відповідною точністю, досліджувати задану функцію і навіть відтворювати функцію на основі її властивостей.

1. Означення функції. Уже неодноразово наголошувалось на тому, що основні елементарні функції можуть бути означеними як суми степеневих рядів. Наприклад,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що будь-який степеневий ряд, збіжний на визначеній множині $\mathfrak{X}$, визначає функцію з областю визначення на цій множині.

2. Обчислення значень функції. При розвиненні функції $f(x)$ в ряд Тейлора за степенями $x-a$ можна наближено обчислювати значення функції в точці x_0, де x_0 належить його області збіжності. В такому випадку в ряді Тейлора залишають перших k елементів, а останні відкидають. А саме, якщо $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ і точка x_0 належить області збіжності ряду, то $f(x_0) \approx \sum\limits_{n=0}^{k} a_n(x_0-a)^n$.

Оцінка похибки такого наближення, тобто оцінка $\left|f(x_0) - \sum\limits_{n=0}^{k} a_n(x_0-a)^n\right|$, зводиться до оцінки залишку ряду, тобто величини $\left|\sum\limits_{n=k+1}^{+\infty} a_n(x_0-a)^n\right|$.

Зауважимо, що якщо ряд $\sum\limits_{n=k+1}^{+\infty} a_n(x_0-a)^n$ знакосталий, то його можна порівняти з геометричною прогресією. Якщо ряд знакозмінний, то використовують оцінку

$$\left|\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n(x_0-a)^n\right| \le \left|a_{k+1}(x_0-a)^{k+1}\right|.$$

Якщо $f(x_0)$ потрібно знайти із наперед заданою точністю, то, оцінюючи залишок ряду, визначають кількість елементів частинної суми, яка гарантує таку точність.

3. Обчислення значень аргумента для заданого значення функції. Вважаємо, що функція $f(x)$ визначена на множині $\mathfrak{X}$ і задане число $y_0 = f(x_0)$, де x_0 – невідомі числа з множини $\mathfrak{X}$.

Потрібно знайти невідомі значення аргумента x_0 із $\mathfrak{X}$, що задовольняють рівняння $y_0 = f(x_0)$.

Якщо $y_0 \in f(\mathfrak{X})$ і функція $f(x)$ має обернену, то існує єдине значення $x_0 \in \mathfrak{X}$ таке, що $f(x_0) = y_0$, причому $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Якщо припустити, що $f^{-1}(y)$ розвивається у степеневий ряд і $f(\mathfrak{X})$ є підмножиною області збіжності цього ряду, то знаходження x_0 зводиться до обчислення за допомогою степеневого ряду значення функції $f^{-1}(y)$ у точці y_0.

4. Застосування рядів Тейлора і Маклорена до обчислення границь. Користуючись відповідним розвиненням функцій в ряди Тейлора при $x \to x_0$ або Маклорена при $x \to 0$, можна обчислювати границі функції, що пов'язані з невизначеністю виду $\dfrac{0}{0}$.

5. Застосування рядів Тейлора до обчислення похідних. Розклавши функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 з областю збіжності $\mathfrak{X}$, де $x_0 \in \mathfrak{X}$, можна зводити відшукання похідної цієї функції будь-якого порядку до відшукання похідної ряду Тейлора цієї функції в області збіжності $\mathfrak{X}$.

6. Застосування рядів Тейлора до обчислення інтегралів. Якщо

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

де $x_0 \in \mathfrak{X}$ і $[a, b] \subset \mathfrak{X}$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \int_a^b (x - x_0)^n dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!} \left.(x - x_0)^{n+1}\right|_a^b = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n+1)!} \left((b - x_0)^{n+1} - (a - x_0)^{n+1}\right).$$

7. Застосування рядів Тейлора до розв'язування рівнянь. Розклади функції в ряди Тейлора в багатьох випадках зручно використовувати для розв'язування функціональних та диференціальних рівнянь.

Вправи

1. Нехай $F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}\frac{x^n}{n!}$, де $(\alpha)_0 = (\beta)_0 = (\gamma)_0 = 1$, $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+n-1)$, $(\beta)_n = \beta(\beta+1)\cdot\ldots\cdot(\beta+n-1)$, $(\gamma)_n = \gamma(\gamma+1)\cdot\ldots\cdot(\gamma+n-1)$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\gamma\neq 0,-1,-2,\ldots$ – гіпергеометрична функція. Довести наступні співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&1)\ xF\,(1,1,2,-x) = \ln(1+x),\\
&2)\ 2xF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},x^2\right) = \ln\frac{1+x}{1-x},\\
&3)\ xF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2},x^2\right) = \arcsin x,\\
&4)\ F\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\sin^2 x\right) = \cos x,\\
&5)\ xF\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x^2\right) = \operatorname{arctg} x,\\
&6)\ F\,(-m,1,1,-x) = (1+x)^m.
\end{aligned}
$$

2. Обчислити з точністю до 10^{-5} задані значення:

1) $\ln 2$,	2) e^2,	3) $\frac{1}{e}$,	4) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$,
5) $\ln 3$,	6) $\lg 5$,	7) $\lg\frac{7}{6}$,	8) $\ln 0,8$,
9) $\sin 16^\circ$,	10) $\cos 10^\circ$,	11) $\operatorname{tg} 8^\circ$,	12) $\operatorname{ctg} 16^\circ$,
13) $\sqrt{18}$,	14) $\sqrt[3]{1,3}$,	15) $\sqrt[4]{82}$,	16) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$,
17) $\arcsin\frac{1}{3}$,	18) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$,	19) $\operatorname{ch} 1$,	20) $\operatorname{sh} 1,3$.

3. Користуючись рівністю $\frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$, обчислити число π за допомогою ряду для функції $\operatorname{arctg} x$ з точністю до 10^{-4}.

4. При яких значеннях x наближена рівність $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ дає похибку, яка не перевищує 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}?

5. При яких значеннях x наближена рівність $\sin x \approx x$ дає похибку, яка не перевищує 10^{-2}, 10^{-3}?

6. Розв'язати з точністю до 10^{-4} рівняння $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{5}$.

7. Розв'язати з точністю до 10^{-3} рівняння $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}$.

8. Розвинувши функції в ряд Маклорена, знайти границі:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}, \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2},$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\left(x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right), \qquad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-\cos x},$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x^2}{2}-\sin x}{\operatorname{arctg}^2 x}, \qquad 6)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right),$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{tg} x-\sin x)-x^3}{x^5}, \qquad 8)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x}-x}{x\left(\sqrt[3]{8+x}-2\right)},$$

$$9)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\left(e^{\sin^2 x}-\ln(x^2+e)\right)}{\operatorname{tg} x-\sin x}, \qquad 10)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}}{\cos x}.$$

9. Знайти похідну k-го порядку функції $f(x)$ в заданій точці x_0 :

$$1)\ f(x)=\cos x,\ \ k=4,\ \ x_0=\frac{\pi}{4},$$

$$2)\ f(x)=x^6e^x,\ \ k=10,\ \ x_0=0,$$

$$3)\ f(x)=\cos^3 x,\ \ k=9,\ \ x_0=-\frac{\pi}{2},$$

$$4)\ f(x)=(x-2)\ln(3x+2),\ \ k=7,\ \ x_0=2,$$

$$5)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{-x-2}},\ \ k=5,\ \ x_0=-3,$$

$$6)\ f(x)=\ln\frac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}},\ \ k=4,\ \ x_0=0,$$

$$7)\ f(x)=\frac{x}{1+x^2},\ \ k=6,\ \ x_0=0,$$

$$8)\ f(x)=\frac{(x-1)^3}{5x+3},\ \ k=6,\ \ x_0=1,$$

$$9)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}},\ \ k=9,\ \ x_0=2,$$

$$10)\ f(x)=\ln(x^2-9x+20),\ \ k=4,\ \ x_0=2.$$

10. Знайти наступні границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^2\right)^{(n)}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left((\arcsin x)^3\right)^{(n)}$,

3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^2\right)^{(n)}$, 4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\right)^{(n)}$,

5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{(n)}$, 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x(1-x^2)}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{(n)}$.

11. Обчислити з точністю до 10^{-3} наступні інтеграли:

1) $\int\limits_1^2 \dfrac{e^x}{x}\,dx$, 2) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{1+x^4}$, 3) $\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx$,

4) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \sin x^2 dx$, 5) $\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}e^x dx$, 6) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} x\ln(1+x^2)dx$,

7) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \dfrac{\cos\frac{x^2}{2}}{x^2}\,dx$, 8) $\int\limits_0^{\frac{4}{5}} x^{10}\sin x dx$, 9) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx$,

10) $\int\limits_5^{10} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx$, 11) $\int\limits_{-1}^{0} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{8-x^3}}$, 12) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^3}dx$,

13) $\int\limits_0^{\frac{3}{5}} \sqrt[3]{1+x^2}dx$, 14) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\arcsin x}{x}\,dx$, 15) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$,

16) $\int\limits_0^1 x^x dx$, 17) $\int\limits_0^1 \ln x\ln(1-x)dx$, 18) $\int\limits_{10}^{100} \dfrac{\ln(1+x)}{x}\,dx$,

19) $\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx$, 20) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x^2 dx$, 21) $\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{ch} x}{x}\,dx$.

12. Знайти функцію $y = f(x)$, яка задовольняє рівняння $xy + e^x = y$ і розвивається в ряд Маклорена.

13. Знайти функцію $y = f(x)$, яка задовольняє рівняння $y = \ln(1+x) - xy$ і розвивається в ряд Маклорена.

14. Знайти функцію $y = f(x)$, яка розвивається в ряд Маклорена і задовольняє рівняння та початкові умови:

1) $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad f(0) = 0, \;\; f'(0) = \lambda,$

2) $y' - y = 0, \quad f(0) = 1,$

3) $(1 - x^2)y'' - 5xy' - 4y = 0, \quad f(0) = 1, \;\; f'(0) = 0,$

4) $xy' - y - x^2 \sin x + 1 = 0, \quad f(0) = 1.$

15. Обчислити значення інтегрального синуса $\mathrm{si}\, x = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ з точністю до 10^{-4}, якщо:

$$1)\; x = 1, \quad 2)\; x = \frac{1}{2}, \quad 3)\; x = \frac{1}{5}.$$

16. Довести, що гіпергеометрична функція $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, визначена у вправі 1, є розв'язком диференціального рівняння:

$$x(1 - \lambda)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)\lambda)y' - \alpha\beta y = 0.$$

Приклади розв'язування вправ

2.16. Оскільки

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

де $x \in [-1; 1]$ і $\frac{1}{3} \in [-1; 1]$, то

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}.$$

В останній рівності справа маємо знакочережний ряд, то похибку обчислення можемо оцінити наступним чином

$$\left| r_k\left(\frac{1}{3}\right) \right| < \frac{1}{(2k+3)3^{2k+3}}.$$

Отже, похибка наближеної рівності

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} \approx \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}$$

не перевищує 10^{-5} тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{1}{(2n+3)3^{2n+3}} < 10^{-5}.$$

Звідси знаходимо, що $n = 3$, бо $\dfrac{1}{3^9 9} = \dfrac{1}{177147} < \dfrac{1}{100000}$.

Тоді

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \approx \sum_{k=0}^{3}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)3^{2k+1}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} =$$
$$= 0,666666 - 0,012346 + 0,000823 - 0,000065 = 0,321745.$$

Отже, $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} \approx 0,321788$ з точністю до 10^{-5}. ▶

7. Зауважимо, що функція $f(x) = \operatorname{sh} x$ визначена і неперервна на всій множині дійсних чисел, причому вона зростає на всій області визначення. Отже, вона на множині дійсних чисел має обернену, яка знову є зростаючою і неперервною на $\mathbb{R}$.

Знайдемо обернену функцію до $\operatorname{sh} x$. Отримаємо рівняння $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, звідки маємо $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$. Тоді $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$ – обернена функція до $y = \operatorname{sh} x$.

Похідна цієї функції

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = (1+y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

розвивається в ряд Маклорена

$$x' = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdot(-\frac{2n-1}{2})}{n!}\, y^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}\, y^{2n}$$

з радіусом збіжності $R = 1$.

Звідси

$$x = y + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}\cdot\frac{y^{2n+1}}{2n+1} = y + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(2n+1)n!}\, y^{2n+1}.$$

Тоді шуканий розв'язок x є сумою числового ряду

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n(2n+1)n!}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Цей ряд є знакопочережним і його остача оцінюється наступним співвідношенням:

$$\left|r_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(2n+3)(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{2n+3}}.$$

З умови задачі маємо, що

$$\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}(2n+3)(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{2n+3}}<\frac{1}{1000}.$$

При $n=1$ отримуємо, що

$$\frac{1\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 2^6}=\frac{3}{1280}=0,0023>0,001.$$

При $n=2$ отримуємо, що

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 7\cdot 6\cdot 2^7}=\frac{15}{43008}=0,0003<0,001.$$

Отже, з точністю до 10^{-3} маємо, що

$$x=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k(2k+1)k!}\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{3}{4\cdot 5\cdot 64}=$$

$$=0,5-0,0208+0,0023=0,4815.$$

Тобто число 0,4815 є коренем рівняння $\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}$ з точністю до 10^{-3}. ▶

8.4. Розкладемо функції e^x і $\cos x$ в ряд Маклорена.

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}-1-x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots}{1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots}{\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n)!}+\ldots}{\frac{1}{2}+\frac{x}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-2}}{n!}+\ldots}=1.\quad ▶$$

9.4. Розглянемо функцію $f(x)=\ln\dfrac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}$ у ряд Маклорена. Маємо

$$f(x)=\ln(2+x^2)-\frac{1}{2}\ln(1-2x^2)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln(1-2x^2)=$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(n+1)2^{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}x^{2n+2}}{n+1}.$$

Тоді

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+2)x^{2n+1}}{(n+1)2^{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(2n+2)x^{2n+1}}{n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+2}x^{2n+1},$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)x^{2n}}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n+1}(2n+1)x^{2n},$$

$$f'''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)2n}{2^n}\, x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n+1}(2n+1)2n\, x^{2n-1},$$

$$f^{IV}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)2n(2n-1)}{2^n}\, x^{2n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n+1}(2n+1)2n(2n-1)x^{2n-2}.$$

Отже, $f^{IV}(0) = -\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{2} + 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 3 + 24 = 21.$ ▶

11.17. Розкладемо $\cos\dfrac{x^2}{2}$ в ряд Маклорена на відрізку $x \in \left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right]$. Тоді $\cos\dfrac{x^2}{2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n x^{4n}}{2^{2n}(2n)!}$.

Тоді

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\frac{x^2}{2}}{x^2}\,dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n-2}}{2^{2n}(2n)!}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n-1}}{(4n-1)2^{2n}(2n)!}\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n-1)2^{2n}(2n)!}\left(\frac{1}{2^{4n-1}} - \frac{1}{4^{4n-1}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n-1)4^n(2n)!}\left(\frac{2}{4^{2n}} - \frac{4}{4^{4n}}\right) =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(4^{2n}-2)}{(4n-1)4^{5n}(2n)!} = 2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(4^{2n}-2)}{(4n-1)4^{5n}(2n)!}.$$

З останнього виразу бачимо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(4^{2n}-2)}{(4n-1)4^{5n}(2n)!}$ є знакопочережним, тому

$$|r_n| < \frac{4^{2n}-2}{(4n+3)4^{5n+5}(2n+2)!} < \frac{1}{1000}.$$

При $n = 1$ маємо $\dfrac{4^4 - 2}{7 \cdot 4^{10} \cdot 4!} = \dfrac{254}{176160768} = 0,000001 < 0,001.$

Отже, $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\frac{x^2}{2}}{x^2}\,dx = 2 - 2\frac{14}{3 \cdot 4^5 \cdot 2} = 2 - \frac{14}{4^5} = 2 - 0,0046 = 1,9954.$ ▶

Індивідуальні завдання до розділу III

1. Знайти область збіжності степеневого ряду:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)3^n} \cdot (x+6)^n,$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)5^n} \cdot (x-3)^n,$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{(3n+1)^3} \cdot (x-4)^{2n},$

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n},$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+3)2^n},$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(n+3)^2 2^{n-1}} \cdot (x+7)^n,$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-2)^3}{2n+3} \cdot (x+3)^{2n},$

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} \cdot (x+5)^{2n+1},$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \cdot (x-2)^{2n},$

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 2^n} \cdot (x-3)^n,$

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8},$

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)},$

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3)\ln(n+3)} \cdot (x+6)^n,$

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)3^n} \cdot (x+4)^n,$

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-6)^n}{(n+3)3^n},$

16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n+2)!} \cdot (x+1)^{2n-1},$

17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{(2n-1)4^n},$

18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3n-1)2^n} \cdot (x+3)^n,$

19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^{2n-1}}{(2n^2-5n)4^n},$

20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{(3n+1)^3} \cdot (x-1)^{3n},$

21) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)2^n},$

22) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n-1)2^n} \cdot (x+2)^n,$

23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{(5n-8)^3} \cdot (x-2)^{3n},$

24) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(4n-1)^3} \cdot (x-4)^{3n},$

25) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x+5)^n}{3^n}$,

26) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)} \cdot (x+1)^n$,

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1} \cdot (x-2)^n$,

28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$,

29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^3}{(n+3)!} \cdot (x+4)^{2n+1}$,

30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n+1)^5}{2n+1} \cdot x^{2n}$.

2. Знайти суму ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n(n+1)}$,

2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)(n+2)}$,

3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{5^n}{(n+1)x^n}$,

4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2^{n-1}}{nx^{4n-4}}$,

5) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(1-x^2)^n}{n+1}$,

6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(1-x^5)^{n-1}}{n}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$,

8) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(1-x^5)^n}{n+1}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(1-x^2)^{n-1}}{n}$,

10) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+6}}{(n+1)(n+2)}$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+2}}{n(n+1)}$,

12) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{3^n}{(n+1)x^{3n}}$,

13) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)x^{5n}}$,

14) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(1-x^4)^n}{n+1}$,

15) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin^n x}{n+1}$,

16) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$,

17) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+3}}{(n+1)(n+2)}$,

18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^{n-1} x}{n}$,

19) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{3^{n-1}}{nx^{3n-3}}$,

20) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+3}}{n(n+1)}$,

21) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(1-x^4)^{n-1}}{n}$,

22) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{4^n}{(n+1)x^{2n}}$,

23) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{nx^{5n-5}}$,

24) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(1-x^3)^n}{n+1}$,

25) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cos^n x}{n+1}$, 26) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)}$,

27) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{n+5}}{n(n+1)}$, 28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4^{n-1}}{nx^{2n-2}}$,

29) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2^n}{(n+1)x^{4n}}$, 30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(1-x^3)^{n-1}}{n}$.

3. Знайти суму степеневого ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+5)x^{n-1}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^{n-1}$, 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+5)x^{2n}$,

4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+2)x^{n-1}$, 5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+4)x^{n-1}$, 6) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+2)x^{5n}$,

7) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+4)x^{3n}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{5n}$, 9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+3)x^{n-1}$,

10) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n+3)x^{n-2}$, 11) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{6n}$, 12) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} nx^{4n}$,

13) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} nx^{n-2}$, 14) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(n+1)x^{n-3}$, 15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{6n}$,

16) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+2)x^{3n}$, 17) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n+4)x^{n-2}$, 18) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(n+2)x^{n-3}$,

19) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n+2)x^{n-2}$, 20) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+3)x^{4n}$, 21) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{3n+3}$,

22) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(n+3)x^{n-3}$, 23) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(n+1)x^{n-2}$, 24) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+4)x^{5n}$,

25) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{2n+2}$, 26) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(n+4)x^{n-3}$, 27) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^{2n}$,

28) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+5)x^{6n}$, 29) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+3)x^{4n}$, 30) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(n+5)x^{n-3}$.

4. Розкласти функцію $f(x)$ в ряд Маклорена і знайти область збіжності отриманого степеневого ряду:

1) $f(x) = \dfrac{9}{20-x-x^2}$, 2) $f(x) = 2x\sin^2\dfrac{x}{2} - x$,

3) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$, 4) $f(x) = (x-1)\operatorname{sh} x$,

5) $f(x) = \ln(1-x-6x^2)$, 6) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{x} - \cos 3x$,

7) $f(x) = 2x\cos^2\dfrac{x}{2} - x$, 8) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$,

9) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{x} - 2$, 10) $f(x) = \dfrac{5}{6-x-x^2}$,

11) $f(x) = \dfrac{7}{12+x-x^2}$, 12) $f(x) = \sqrt[4]{16-5x}$,

13) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{27-2x}}$, 14) $f(x) = \ln(1-x-20x^2)$,

15) $f(x) = \ln(1+x-6x^2)$, 16) $f(x) = (2-e^x)^2$,

17) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16-3x}}$, 18) $f(x) = (x-1)\operatorname{ch} x$,

19) $f(x) = \ln(1-x-12x^2)$, 20) $f(x) = \dfrac{3}{2-x-x^2}$,

21) $f(x) = (3+e^{-x})^2$, 22) $f(x) = (x-1)\sin 5x$,

23) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x} - 1$, 24) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} 3x - 1}{x^2}$,

25) $f(x) = \dfrac{7}{12-x-x^2}$, 26) $f(x) = \dfrac{6}{8+2x-x^2}$,

27) $f(x) = x^2\sqrt{4-3x}$, 28) $f(x) = x\sqrt[3]{27-2x}$,

29) $f(x) = \ln(1+2x-8x^2)$, 30) $f(x) = \ln(1+x-12x^2)$.

5. Розкласти функцію $f(x)$ в ряд Тейлора за степенями $x-a$ і знайти область збіжності отриманого степеневого ряду:

1) $f(x) = \dfrac{7}{12+x-x^2}$, $a=1$, 2) $f(x) = x^4$, $a=-1$,

3) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2-3x}}$, $a=-1$, 4) $f(x) = \ln x$, $a=1$,

5) $f(x) = \ln(6-4x+x^2)$, $a=2$, 6) $f(x) = 3\cos^2 x - \sin^2 x$, $a=0$,

7) $f(x) = 2x\cos^2\dfrac{x}{2} - x$, $a=0$, 8) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-6x+18}}$, $a=3$,

9) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-6x+36}}$, $a=3$, 10) $f(x) = \ln(x^2-9x+20)$, $a=3$,

11) $f(x) = (x-2)\sin 3x,\ \ a = 0,$

12) $f(x) = 2^x,\ \ a = -3,$

13) $f(x) = \dfrac{6}{8+2x-x^2},\ \ a = -3,$

14) $f(x) = \sqrt{x},\ \ a = 2,$

15) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}},\ \ a = 4,$

16) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2x+3},\ \ a = -1,$

17) $f(x) = (3+e^{-x})^2,\ \ a = 0,$

18) $f(x) = \sqrt[3]{x^2},\ \ a = -1,$

19) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2},\ \ a = -3,$

20) $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{4},\ \ a = 2,$

21) $f(x)=(1+x)\ln(2+x),\ \ a = -1,$

22) $f(x) = \dfrac{1}{x^2},\ \ a = -2,$

23) $f(x) = \ln\dfrac{1}{2+2x+x^2},\ \ a = -1,$

24) $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^2},\ \ a = 2,$

25) $f(x) = \ln(30-10x+x^2),\ \ a = 5,$

26) $f(x) = \dfrac{2}{x},\ \ a = -2,$

27) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x},\ \ a = 0,$

28) $f(x) = \sin x,\ \ a = -\dfrac{\pi}{4},$

29) $f(x) = \dfrac{1}{6-5x+x^2},\ \ a = 1,$

30) $f(x)=x^5-7x^4-5x+4,\ \ a=-3.$

6. Обчислити наближено із заданою точністю α наступні значення функцій:

1) $\ln 4,\ \ \alpha = 0,001,$

2) $\cos 10^\circ,\ \ \alpha = 0,0001,$

3) $\dfrac{4}{5}e,\ \ \alpha = 0,001,$

4) $\mathrm{arctg}\, 0,2,\ \ \alpha = 0,0001,$

5) $\sqrt[3]{e^2},\ \ \alpha = 0,001,$

6) $\cos 0,2,\ \ \alpha = 0,0001,$

7) $\sqrt[3]{1,06},\ \ \alpha = 0,001,$

8) $\sqrt[10]{1029},\ \ \alpha = 0,0001,$

9) $2\sin 20^\circ,\ \ \alpha = 0,001,$

10) $\sqrt[3]{640},\ \ \alpha = 0,0001,$

11) $\sqrt[3]{29},\ \ \alpha = 0,001,$

12) $\mathrm{tg}\, 9^\circ,\ \ \alpha = 0,001,$

13) $\ln 3,\ \ \alpha = 0,0001,$

14) $\sqrt[4]{85},\ \ \alpha = 0,0001,$

15) $\cos 15^\circ,\ \ \alpha = 0,0001,$

16) $\dfrac{1}{\sqrt{e}},\ \ \alpha = 0,001,$

17) $\sqrt[4]{20},\ \ \alpha = 0,001,$

18) $\ln 1,25,\ \ \alpha = 0,001,$

19) $\sin 0,4,\ \ \alpha = 0,001,$

20) $e,\ \ \alpha = 0,00001,$

21) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e^5}}$, $\alpha = 0,0001$,

22) $\sqrt[4]{7}$, $\alpha = 0,01$,

23) $\ln 0,7$, $\alpha = 0,0001$,

24) $\sqrt{e}$, $\alpha = 0,001$,

25) $\ln 5$, $\alpha = 0,0001$,

26) $\ln 2$, $\alpha = 0,001$,

27) $\sqrt[6]{68}$, $\alpha = 0,0001$,

28) $\cos 16^\circ$, $\alpha = 0,0001$,

29) $\ln 1,2$, $\alpha = 0,001$,

30) $\sin 20^\circ$, $\alpha = 0,001$.

7. Зінтегрувати наближено задачу Коші, взявши чотири перші, відмінні від нуля, елементи розвинення її розв'язку в степеневий ряд:

1) $y'' - x\sin y' = 0,\quad y(1) = 0,\quad y'(1) = \dfrac{\pi}{2},$

2) $y' - xy = \ln(y + x),\quad y(1) = 0,$

3) $y'' + xy' + y = 1,\quad y(0) = y'(0) = 0,$

4) $y'' - xy' + y = x,\quad y(0) = y'(0) = 0,$

5) $y' = 2x + \cos y,\quad y(0) = 0,$

6) $y'' + y = xy' + e^x,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0,$

7) $y'' + y' = xy^2,\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 1,$

8) $y'' + xy' + y = x,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1,$

9) $y'' = y\cos x + x,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0,$

10) $y' = \arcsin x + x,\quad y(0) = \dfrac{1}{2},$

11) $y'' = e^y \sin y',\quad y(\pi) = 1,\quad y'(\pi) = \dfrac{\pi}{2},$

12) $y'' = \dfrac{y'}{y} - \dfrac{1}{x},\quad y(1) = 1,\quad y'(1) = 0,$

13) $y' = 2\cos x - xy^2,\quad y(0) = 1,$

14) $y'' = -2xy,\quad y(0) = y'(0) = 1,$

15) $y'' = x^2 y,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1,$

16) $y' = x + \dfrac{1}{y}, \quad y(0) = 1,$

17) $y' = \dfrac{1 - x^2}{y} + 1, \quad y(0) = 1,$

18) $y'' = xyy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$

19) $y'' + \dfrac{1}{x} = \dfrac{y'}{y}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0,$

20) $y'' - xy' = y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$

21) $y' + xy^2 - 2\cos x = 0, \quad y(0) = 1,$

22) $y'' - x = y\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$

23) $y'' = ye^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1,$

24) $y' = 4y + e^{3x} - 2xy^2, \quad y(0) = 2,$

25) $y'' - xy = (y')^2, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -2,$

26) $2y' - (x + y)y = e^x, \quad y(0) = 2,$

27) $y'' + y'\sin x = 1 - y, \quad y(0) = y'(0) = 1,$

28) $y' + 2xy^2 = 4y + e^{3x}, \quad y(0) = 2,$

29) $(1 + x^2)y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,$

30) $(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

8. Обчислити визначений інтеграл з точністю $\alpha = 0,001$:

1) $\displaystyle\int_0^{0,1} e^{-6x^2}dx,$ 2) $\displaystyle\int_0^{0,2} e^{-3x^2}dx,$ 3) $\displaystyle\int_0^{0,3} e^{-2x^2}dx,$

4) $\displaystyle\int_0^{0,1} \sin(100x^2)dx,$ 5) $\displaystyle\int_0^{0,2} \sin(25x^2)dx,$ 6) $\displaystyle\int_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx,$

7) $\displaystyle\int_0^{1} \cos x^2 dx,$ 8) $\displaystyle\int_0^{0,5} \cos(4x^2)dx,$ 9) $\displaystyle\int_0^{0,2} \cos(25x^2)dx,$

10) $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$, 11) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$, 12) $\displaystyle\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$,

13) $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}\,dx$, 14) $\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$, 15) $\displaystyle\int_0^{0,4} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}\,dx$,

16) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}\,dx$, 17) $\displaystyle\int_0^{0,4} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}\,dx$, 18) $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x}\,dx$,

19) $\displaystyle\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$, 20) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$, 21) $\displaystyle\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$,

22) $\displaystyle\int_0^{0,4} e^{-\frac{3x^2}{4}}dx$, 23) $\displaystyle\int_0^{0,5} \sin(4x^2)dx$, 24) $\displaystyle\int_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$,

25) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$, 26) $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$, 27) $\displaystyle\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$,

28) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$, 29) $\displaystyle\int_0^{0,5} e^{-\frac{3x^2}{25}}dx$, 30) $\displaystyle\int_0^{0,1} \cos(100x^2)dx$.

Приклади розв'язування вправ до розділу III

1. Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)} \cdot (x+1)^n$.

Розв'язання. Для знаходження радіуса збіжності скористаємося формулою

$$R = \lim_{x\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Отже, $R = \lim\limits_{x\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)} : \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)\ln(n+3)}\right| = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)}$.

Для знаходження границі другого доданка скористаємося правилом Лопіталя.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+3)}{\ln(x+2)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x+3} : \frac{1}{x+2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{x+3} = 1.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{\ln(n+3)}{\ln(n+2)} = 1,\ R = 1$.

Таким чином, ряд збіжний абсолютно і рівномірно при всіх x що задовольняють нерівність $|x+1| < 1$, тобто на проміжку $(-2; 0)$.

Дослідимо збіжність на кінцях проміжку. Нехай $x = -2$. Маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)} \cdot (-2+1)^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$.

Одержали ряд з додатніми членами, для дослідження на збіжність якого застосуємо інтегральну ознаку Коші.

$$\int\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)} dx = \int\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{d(x+2)}{\ln(x+2)} = \ln\ln(x+2)\Big|_1^{+\infty} = +\infty.$$

Інтеграл рорзбіжний, а отже і досліджуваний числовий ряд розбіжний.

Нехай тепер $x = 0$. Маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\ln(n+2)}$. Він знакопочережний і для нього виконуються умови ознаки Лейбніца. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} = 0$ та $\frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} > \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$.

Отже, $R = 1$, область збіжності $x \in (-2; 0]$.

2. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)}$.

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності ряду за формулою

$$R = \lim_{x\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} : \frac{1}{(n+2)(n+3)} = 1.$$

Досліджуваний степеневий ряд рівномірно збіжний при $x \in (-1;1)$. Всередині проміжку його можна почленно диференціювати та інтегрувати. Подамо його у вигляді $f(x) = x^2 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ має той самий проміжок збіжності, що і ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)}$. Продиференціюємо його двічі:

$$\frac{d^2}{dx^2}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Проінтегруємо двічі:

$$\int \frac{1}{1-x}dx = -\ln(1-x) + C = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + C.$$

Підставивши $x = 0$, знаходимо, що $C = 0$. Інтегруємо ще раз, отримаємо:

$$-\int \ln(1-x)dx = -(x\ln(1-x) - x - \ln(1-x)) + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \cdots + C.$$

При $x = 0$, маємо, що $C = 0$. Отже,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+2)} = x^2(-x\ln(1-x) + x + \ln(1-x)) =$$

$$= -x^3\ln(1-x) + x^3 + x^2\ln(1-x).$$

3. Знайти суму степеневого ряду $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(n+4)x^{n-3}$.

Розв'язання. Даний ряд можна записати так $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}(n+4)x^{n-3} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+6)x^{n-1}$. Радіус збіжності цього ряду $R = \lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{n+6}{n+6+1} = 1$. При $|x| < 1$ ряд збіжний рівномірно. Подамо ряд як суму рядів $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n+6)x^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 6x^{n-1}$, кожен з яких також має радіус збіжності рівний 1. Проінтегрувавши почленно перший доданок маємо

$$\int \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{x^n}{n} + C = (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots) + C = \frac{x}{1-x} + C.$$

При $x = 0$, одержуємо, що $C = 0$, тобто

$$\int \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}dx = \frac{x}{1-x}.$$

Диференціюючи обидві частини цієї рівності отримаємо:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Знайдемо суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 6x^{n-1} = 6\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = 6 \cdot \frac{1}{1-x}.$$

Отже,

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (n+4)x^{n-3} = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{6}{1-x} = \frac{7-6x}{(1-x)^2}.$$

4. Розкласти функцію $f(x) = \frac{6}{8+2x-x^2}$ в ряд Маклорена і знайти область збіжності отриманого степеневого ряду.

Розв'язання. Розкладемо $f(x)$ на прості дроби, користуючись методом невизначених коефіцієнтів.

$$\frac{6}{8+2x-x^2} = \frac{6}{-(x-4)(x+2)} = \frac{-6}{(x-4)(x+2)} = \frac{a}{x-4} + \frac{b}{x+2}.$$

Знаходимо, що $a = -1,\ b = 1$.

Отже, $\frac{6}{8+2x-x^2} = \frac{-1}{x-4} + \frac{1}{x+2} = \frac{\frac{1}{1}}{1-\frac{x}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-(-\frac{x}{2})}$.

Кожен з доданків є сумою нескінченної спадної геометричної прогресії, якщо одночасно виконується $|\frac{x}{4}| < 1$ та $|-\frac{x}{2}| < 1$, тобто $|x| < 2$. Тоді

$$\frac{6}{8+2x-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4}\Big(\frac{x}{4}\Big)^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\Big(\frac{-x}{2}\Big)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{4^n} + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\Big)x^{n-1}$$

при $|x| < 2$.

При $x = -2$ функція $f(x) = \frac{6}{8+2x-x^2}$ не визначена.

При $x = 2$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{4^n} + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\Big)2^{n-1}$ розбіжний, бо

$$\lim_{x\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} \Big(\frac{1}{4^n} + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\Big)2^{n-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2^n} + (-1)^{n-1}\Big)$$

не існує.

Отже, $\frac{6}{8+2x-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{4^n} + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\Big)x^{n-1}$ при $|x| < 2$.

4. Розкласти функцію $f(x) = x\sqrt[3]{27-2x}$ в ряд Маклорена і знайти область збіжності отриманого степеневого ряду.

Розв'язання. $f(x) = x\sqrt[3]{27-2x} = 3x\Big(1 - \dfrac{2x}{27}\Big)^{\frac{1}{3}}$.

Функцію $g(x) = \Big(1 + (-\frac{2x}{27})\Big)^{\frac{1}{3}}$ розкладемо в ряд Маклорена, скориставшись формулою

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot\dots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n,$$

$$g(x) = \Big(1 + (-\frac{2x}{27})\Big)^{\frac{1}{3}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdot\dots\cdot(\frac{1}{3}-n+1)}{n!}x^n(-1)^n\Big(\frac{2}{27}\Big)^n.$$

Тоді

$$f(x) = 3x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3\cdot\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdot\dots\cdot(\frac{1}{3}-n+1)}{3^{n-1}n!}x^{n+1}(-1)^n\Big(\frac{2}{27}\Big)^n =$$

$$= 3x - \frac{2}{27}x^2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdot\dots\cdot(3n-4)}{3^{n-1}\cdot n!}\Big(\frac{2}{27}\Big)^n x^{n+1}(-1)^n =$$

$$= 3x - \frac{2}{27}x^2 - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdot\dots\cdot(3n-4)}{3^{n-1}\cdot n!}\Big(\frac{2}{27}\Big)^n x^{n+1}$$

при $|x| < \frac{27}{2}$. Оскільки функція визначена і на кінцях проміжку, то дослідимо поведінку отриманого ряду в цих точках. Достатньо дослідити тільки ряд

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdot\dots\cdot(3n-4)}{3^{n-1}\cdot n!}\Big(\frac{2}{27}\Big)^n x^{n+1}.$$

При $x = \frac{27}{2}$ маємо ряд

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdot\dots\cdot(3n-4)}{3^{n-1}\cdot n!}\Big(\frac{2}{27}\Big)^n\Big(\frac{27}{2}\Big)^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2\cdot5\cdot8\cdot\dots\cdot(3n-4)}{3^{n-1}\cdot n!}\Big(\frac{27}{2}\Big) =$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5\cdot8\cdot\dots\cdot(3n-4)}{3^{n-4}\cdot n!},$$

який досліджуємо на збіжність за ознакою Раабе:

$$\lim_{x\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\Big) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} n\Big(\frac{5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-4)}{3^{n-4}\cdot n!}\cdot\frac{3^{n+1-4}\cdot(n+1)!}{5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-4)(3(n+1)-4)} - 1\Big) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} n\Big(\frac{3(n+1)}{3n-1} - 1\Big) = \lim_{x\to\infty} n\frac{3n+3-3n+1}{3n-1} = \frac{4}{3} > 1.$$

Отже, ряд розбіжний.

При $x = -\frac{27}{2}$ отримуємо ряд

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-4)}{3^{n-1}\cdot n!}\Big(\frac{2}{27}\Big)^n\Big(\frac{27}{2}\Big)^{n+1}(-1)^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-4)}{3^{n-4}\cdot n!}(-1)^{n+1}.$$

Цей ряд абсолютно збіжний на основі попереднього дослідження. Отже,

$$f(x) = x\sqrt[3]{27-2x} = 3x - \frac{2}{27}x^2 - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-4)}{3^{n-1}\cdot n!}\Big(\frac{2}{27}\Big)^n x^{n+1}$$

при $|x| \le \frac{27}{2}$.

5. Розкласти функцію $f(x) = \frac{2}{x}$ в ряд Тейлора за степенями $x+2$ і знайти область збіжності отриманого степеневого ряду.

Розв'язання.

$$f(x) = \frac{2}{x} = \frac{2}{(x+2)-2} = \frac{-1}{1-\frac{x+2}{2}}.$$

Функцію $f(x)$ можна розглядати як суму нескінченно спадної геометричної прогресії із знаменником $q = \frac{x+2}{2}$ і першим членом $b_1 = -1$ при умові, що $\left|\frac{x+2}{2}\right| < 1$, тобто $|x+2| < 2$.

Отже,

$$\frac{2}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)\Big(\frac{x+2}{2}\Big)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{2^{n-1}}(x+2)^{n-1}$$

при $x \in (-4; 0)$.

Функція $f(x) = \frac{2}{x}$ визначена при $x = -4$, тому дослідимо поведінку отриманого ряду в цій точці.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{2^{n-1}}(-4+2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{2^{n-1}}(-2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n.$$

Ряд розбіжний. Отже,

$$\frac{2}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{2^{n-1}}(x+2)^{n-1}.$$

5. Розкласти функцію $f(x)=(1+x)\ln(2+x)$ в ряд Тейлора за степенями $x+1$ і знайти область збіжності отриманого степеневого ряду.

Розв'язання. $f(x) = (1+x)\ln(2+x) = (1+x)\ln(1+(1+x))$.

Використаємо формулу

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n}$$

при $-1 < t \leq 1$ для розвинення в ряд функції $y = \ln(1+(1+x))$ при $-2 < x \leq 0$, який помножимо на $(1+x)$. Отже,

$$(1+x)\ln(2+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(1+x)^{n+1}.$$

6. Обчислити наближено із заданою точністю $\alpha = 0,001$ значення функції $\ln 2$.

Розв'язання. Можна скористатися розвиненням в ряд Маклорена функції $y = \ln x$ за степенями x.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \cdots$$

при $x \in (-1;1)$. Однак цей ряд збігається дуже повільно, тому для обчислень значень логарифмів натурального числа використовуємо формулу

$$\ln(m+1) = \ln m + 2\Big(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3(2m+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2m+1)^{2n-1}} + \cdots\Big)$$

$n-$й залишок ряду в правій частині рівності $r_n < \frac{1}{m(2n+1)(2m+1)^{2n}}$.

В нашому випадку $m = 1$, тому для одержання наближеного значення $\ln 2$ із заданою точністю розв'яжемо нерівність

$$\frac{1}{1 \cdot (2n+1)(2 \cdot 1 + 1)^{2n}} = \frac{1}{(2n+1)3^{2n}} < \frac{1}{1000}.$$

Ідемо шляхом підбору. При $n = 2$ маємо

$$\frac{1}{5 \cdot 3^4} = \frac{1}{5 \cdot 81} > \frac{1}{1000},$$

а при $n = 3$ отримаємо

$$\frac{1}{7 \cdot 3^6} = \frac{1}{7 \cdot 722} < \frac{1}{1000}.$$

Отже, для досягнення потрібної точності достатньо взяти $n = 3$. Отже,

$$\ln 2 = \ln(1+1) \approx \ln 1 + 2\Big(\frac{1}{2 \cdot 1 + 1} + \frac{1}{3(2 \cdot 1 + 1)^3} + \frac{1}{5(2 \cdot 1 + 1)^5}\Big) =$$

$$= 2\Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5}\Big) \approx 0.69190.$$

7. Зінтегрувати наближено задачу Коші $2y' - (x+y)y = e^x$, $\;y(0) = 2$, взявши чотири перші, відмінні від нуля, елементи розвинення її розв'язку в степеневий ряд.

Розв'язання. Нехай функція $y = y(x)$ є розв'язком задачі Коші і допускає розвинення в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 0$.

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots =$$

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

Коефіцієнти ряду знайдемо наступним чином: $a_0 = y(0) = 2$ знаходимо з початкової умови. $a_1 = y'(0)$, знаходимо, підставляючи в рівняння $x = 0$, $y = y(0) = 2$. Отримаємо $2y'(0) - (0+2)2 = e^0$, $\;a_0 = y'(0) = \dfrac{5}{2}$. Продиференціюємо початкове рівняння: $2y'' - (1 + y')y - (x+y)y' = e^x$. Підставимо у нього $x = 0$, $y = y(0) = 2$, $y' = y'(0) = \frac{5}{2}$. Знайдемо, що $y''(0) = \frac{13}{2}$. Тоді $a_2 = \frac{y''(0)}{2!} = \frac{13}{4}$. Диференціюючи попереднє рівняння і підставляючи в нього $x = 0$, $y = y(0)$, $y' = y'(0)$, $y'' = y''(0)$, знайдемо, що $y'''(0) = \frac{89}{4}$, і відповідно

$a_3 = \frac{y'''(0)}{3!} = \frac{89}{24}$. Ми вже маємо чотири перші відмінні від нуля коефіцієнти. Отже,

$$y = 2 + \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}x^2 + \frac{89}{24}x^3$$

є найближчим розв'язком заданої задачі Коші.

8. Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ з точністю $\alpha = 0,001$.

Розв'язання. Скористаємося розвиненням в ряд функції $(1+x)^m$.

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{m(m-1)\cdot\dots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n, x \in (-1;1).$$

Отже

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{3}} = 1 + \Big(-\frac{1}{3}\Big)x^2 + \frac{\frac{-1}{3}(-\frac{1}{3}-1)}{2}x^4 +$$

$$+\frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}x^6 + \dots + \frac{-\frac{1}{3}(-\frac{1}{3}-1)(-\frac{1}{3}-2)\cdots(-\frac{1}{3}-n+1)}{n!}x^{2n} + \cdots$$

Проінтегруємо отриманий ряд в межах від 0 до $\frac{1}{2}$ почленно. Матимемо

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int\limits_0^{0,5} dx - \frac{1}{3}\int\limits_0^{0,5} x^2 dx + \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3^2}\int\limits_0^{0,5} x^4 dx + \dots +$$

$$+\frac{(-1)^n 1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3^n n!}\int\limits_0^{0,5} x^{2n}dx + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3^n n!}\cdot\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} + \cdots .$$

Отриманий ряд є рядом Лейбніца, тому його $n-$ий залишок за модулем менший від модуля першого свого члена. Розв'яжемо нерівність $\frac{(-1)^n 1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n-2)}{3^n n!} < \frac{1}{1000}$. Підемо шляхом підбору. При $n=2$ отримуємо

$$\frac{1\cdot 4}{3^2\cdot 2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5} = \frac{1}{720} > \frac{1}{1000},$$

а при $n=3$ маємо

$$\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} = \frac{1}{4374} < \frac{1}{1000}.$$

Тому взявши $n = 2$ дістаємо

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 4}{3^2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot 10 - 10 + 1}{3^2 \cdot 5 \cdot 2^4} = \frac{351}{720} = 0,4875.$$

РОЗДІЛ IV. Степеневі ряди з комплексними числами

§ 4.1. Збіжні послідовності і ряди комплексних чисел

Будемо розглядати ***множину комплексних чисел*** $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$, в якій задано дві операції:

1) додавання комплексних чисел

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

2) множення комплексних чисел

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Надалі комплексне число з множини $\mathbb{C}$ будемо позначати через z, тобто $z = x + iy$. Число x називається дійсною частиною числа z і позначається $x = \operatorname{Re} z$, а y – уявною частиною і позначається $y = \operatorname{Im} z$.

Зауважимо, що між елементами множини $\mathbb{C}$ і точками прямокутної декартової системи координат можна встановити взаємнооднозначну відповідність, при якій кожному комплексному числу $x + iy \in \mathbb{C}$ відповідає точка $M(x; y)$. При цьому множина $\mathbb{R}$ зображається віссю абсцис (дійсна вісь), а множина всіх комплексних чисел виду iy – віссю ординат (уявна вісь). Площину, точки якої зображають комплексні числа, називають ***комплексною площиною.***

Множина $\mathbb{C}$ за аналогією до множини дійсних чисел доповнюється символом ∞, який називається ***невласним (нескінченним) комплексним числом,*** а точка скупчення точок, в якій хоч одна з координат рівна $+\infty$ чи $-\infty$, називається ***нескінченно віддаленою точкою.*** Комплексна площина, до якої добавлена нескінченно віддалена точка, називається ***розширеною комплексною площиною***.

Комплексне число $z = x + iy$ можна зобразити вектором з початком у точці $O(0;0)$ і кінцем в точці $M(x;y)$. Довжину вектора $\overrightarrow{OM}$ називають ***модулем комплексного числа*** і позначають $|z|$, тобто для $\overrightarrow{OM}$ маємо, що $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Відстань між двома точками комплексної площини z_1 і z_2 можна визначити за формулою

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Кут між додатним напрямом осі Ox і вектором $\overrightarrow{OM}$ з координатами (x, y) називається ***аргументом комплексного числа*** $z = x + iy$ і позначають $\operatorname{Arg} z$. Якщо $z \neq 0$, то аргумент визначається з точністю до доданка $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, і з цієї множини чисел тільки одне задовольняє нерівність $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$. Його називають ***головним значенням аргумента комплексного числа*** z і позначають $\alpha = \arg z$. В такому випадку для $z \neq 0$ можемо записати, що

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & \text{якщо } x > 0, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi, & \text{якщо } x < 0, \ \ y \geq 0, \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \pi, & \text{якщо } x < 0, \ \ y < 0. \end{cases}$$

У випадку, коли $z \neq 0, \ x = 0$, то $\alpha = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } y < 0. \end{cases}$

Для $z = 0$ $(|z| = 0)$ і для $z = \infty$ аргументи невизначені.

Число $x - iy$ називається ***спряженим*** до числа $z = x + iy$ і позначається $\bar{z}$. Якщо $z \neq 0$, то $\arg \bar{z} = -\arg z$. Якщо $z = x,\ x < 0$, то $\arg z = \arg \bar{z} = \pi$.

Форма комплексного числа $z = x + iy$ називається ***алгебраїчною формою подання,*** запис $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ називається ***тригонометричною формою подання*** комплексного числа.

З вищенаведених міркувань випливає, що в тригонометричній формі неможливо подати числа $z = 0$ і $z = \infty$.

Околом точки z_0 на комплексній площині називається будь-який відкритий круг з центром в точці z_0. ε***-околом точки*** z_0 називається відкритий круг з центром в точці z_0 і радіусом ε, тобто множина точок $\{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$. ***Околом нескінченно віддаленої точки*** ∞ називається зовнішність будь-якого круга з центром в точці $z = 0$. R***-околом точки*** ∞ називається зовнішність круга з центром у точці $z = 0$ і радіусом R, тобто множина точок $\{z :\ |z| > R\}$.

Відображення, яке кожному натуральному числу ставить у відповідність комплексне число, називається ***послідовністю комплексних чисел*** і позначається $\{z_n\}$.

Послідовність $\{z_n\}$ називається ***обмеженою,*** якщо $(\exists M > 0)$, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|z_n| \leq M$.

Разом з послідовністю $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ розглянемо дві послідовності дійсних чисел $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$. Тоді дослідження властивостей $\{z_n\}$ можна звести до дослідження властивостей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$.

Теорема 1. *Послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ обмежена тоді і тільки тоді, коли обмеженими є послідовності $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$.*

Комплексне число c називається ***границею послідовності*** $\{z_n\}$, якщо

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon)) :\ \Big\{|z_n - c| < \varepsilon\Big\}.$$

Якщо c – границя послідовності $\{z_n\}$, то записують $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = c$ або $z_n \to c$ при $n \to +\infty$. В такому випадку послідовність $\{z_n\}$ називається ***збіжною.***

Послідовність $\{z_n\}$ називається ***фундаментальною*** якщо

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon))(\forall p \in \mathbb{N}): \ \Big\{|z_n - z_{n+p}| < \varepsilon\Big\}.$$

Критерій Коші збіжності послідовності. *Для того, щоб послідовність $\{z_n\}$ була збіжною, необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною.*

Теорема Больцано-Вейєрштраса. *З кожної обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.*

Послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ має нескінченну границю, якщо

$$(\forall M > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon)): \ \Big\{|z_n| > M\Big\}.$$

У такому випадку записують $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$.

Тоді з теореми Больцано-Вейєрштраса випливає наступний факт: *з будь-якої послідовності комплексних чисел можна виділити збіжну підпослідовність.*

Нехай $\{z_n\}$ – послідовність комплексних чисел. Побудуємо послідовність $\{S_n\}$, де $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$. Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ називається ***рядом з комплексними елементами,*** а S_n називається ***частинною сумою*** цього ряду.

Зауважимо, що на ці ряди переноситься вся термінологія, яка відноситься до числових рядів з дійсними елементами.

Наприклад, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ ***збіжний,*** якщо існує границя $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$, і число S називається ***сумою*** ряду з комплексними елементами.

Теорема 2. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли одночасно збігаються ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$.*

Критерій Коші збіжності ряду. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли*

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N(\varepsilon))(\forall p \in \mathbb{N}): \ \Big\{|z_{n+1} + \ldots + z_{n+p}| < \varepsilon\Big\}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ називається ***абсолютно збіжним,*** якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |z_n|$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ називається ***умовно збіжним,*** якщо він сам збігається, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ є розбіжним. Якщо збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |z_n|$, то збіжним буде ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n + i\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$ збігається абсолютно тоді і тільки тоді, коли абсолютно збіжними є ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} y_n$.

Зауважимо, що коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ збігається абсолютно і має суму S, то ряд, утворений з даного перестановкою його елементів, також збігається абсолютно і має ту саму суму.

Теорема 3. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ *абсолютно збігається, якщо виконується принаймні одна з наступних умов:*

1) $(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\exists M > 0)(\exists q : 0 < q < 1)$ *такі, що для довільного* $n > N(\varepsilon)$ *виконується нерівність* $|z_n| < Mq^n$,

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = q < 1$,

3) $(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\exists \alpha > 1)$ *такі, що для довільного* $n > N(\varepsilon)$ *виконується нерівність*

$$|z_n| < \frac{M}{n^\alpha},$$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\Big(1 - \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|\Big) = \alpha > 1$,

5) $(\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\exists M > 0)(\exists \alpha > 1)$ *такі, що для довільного* $n > N(\varepsilon)$ *виконується нерівність*

$$|z_n| < \frac{M}{n \ln^\alpha n}.$$

Вправи

1. Зобразити на комплексній площині наступні множини:

1) $\Big\{z : \ |\operatorname{Re} z| = 1\Big\}$, 2) $\Big\{z : \ |\arg z| < \dfrac{\pi}{6}\Big\}$,

3) $\Big\{z:\ \ |z|<3\Big\}$, 4) $\Big\{z:\ \ \operatorname{Re}\dfrac{z-1}{z+1}=0\Big\}$,

5) $\Big\{z:\ \ |z-i|+|z+i|<4\Big\}$, 6) $\Big\{z:\ \ \operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1}=0\Big\}$,

7) $\Big\{z:\ \ 0<\arg\dfrac{i-z}{z+i}<\dfrac{\pi}{2}\Big\}$, 8) $\Big\{z:\ \ \operatorname{Re}(z(1-i))<\sqrt{2}\Big\}$.

2. Довести, що якщо послідовності $\{z_n^{(1)}\}$ і $\{z_n^{(2)}\}$ збіжні, то збіжними будуть послідовності $\{z_n^{(1)}\pm z_n^{(2)}\}$, $\{z_n^{(1)}\cdot z_n^{(2)}\}$, $\dfrac{z_n^{(1)}}{z_n^{(2)}}$ при умові, що $(\forall n\in\mathbb{N})$ $z_n^{(2)}\neq 0$, причому

$$\lim_{n\to+\infty}(z_n^{(1)}\pm z_n^{(2)})=\lim_{n\to+\infty}z_n^{(1)}\pm\lim_{n\to+\infty}z_n^{(2)},$$

$$\lim_{n\to+\infty}(z_n^{(1)}\cdot z_n^{(2)})=\lim_{n\to+\infty}z_n^{(1)}\cdot\lim_{n\to+\infty}z_n^{(2)},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{z_n^{(1)}}{z_n^{(2)}}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}z_n^{(1)}}{\lim\limits_{n\to+\infty}z_n^{(2)}}.$$

3. Знайти границі послідовностей:

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{3ni-n-1}{1+ni}$,

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+3i}{n^2-2i}$,

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(3i)^n-1}{(3i)^n}$,

4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}-i}\Big)^{n^2}$,

5) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}+i)$,

6) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}+i\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}-ni)$,

7) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2i+2n^2+1}{n^2+i}$,

8) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}+i\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}\Big)$,

9) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{i}{n+2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{ni}{2}\Big)$,

10) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}+i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\Big)$.

4. Знайти границі послідовностей:

$$1)\ \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{(n-1)^2}{(n+1)^3-(n+3)^3}-i\Big),$$

$$2)\ \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{3n-1}{2n}+i\frac{(n+2)^2}{n^2}\Big),$$

$$3)\ \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{3-2n^3}{4+3n^3}+i\frac{(n+1)^4-n^4}{n^4+3}\Big),$$

$$4)\ \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n^3}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^2+i\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\Big)\Big),$$

$$5)\ \lim_{n\to+\infty}\Big(\Big(1+\frac{2}{n}\Big)^n+i\Big(1-\frac{3}{5n}\Big)^n\Big),$$

$$6)\ \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{(n+1)(n+2)(2n-1)}{4n^3+1}+\frac{i}{n^2+1}\sum_{k=1}^{n}k\Big),$$

$$7)\ \lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}+i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}\Big),$$

$$8)\ \lim_{n\to+\infty}\Big(\Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)^n+i\Big(1+\frac{5}{n}\Big)^{n+6}\Big),$$

$$9)\ \lim_{n\to+\infty}\Big(n\Big(\sqrt[n]{a}-1+in\Big(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\Big)\Big)\Big),\ \ a>0,$$

$$10)\ \lim_{n\to+\infty}\Big(n(\ln(2n+3)-\ln 2n)+i\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big).$$

5. Дослідити на збіжність ряди:

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{n!}{2^{n^2}}+(-1)^n\cdot\frac{i}{\sqrt{n}}\Big),\qquad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^n}{n},$$

$$3)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1+in}{(2n+1)!},\qquad 4)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cdot n!+i(2n-1)!!}{3^n n!},$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\Big(\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}\Big)^n+i\arcsin^n\frac{1}{n}\Big),\qquad 6)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}+i\Big(\frac{n^2+5}{n^2+6}\Big)^{n^3}\Big),$$

$$7)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}+in^2\sin\frac{\pi}{2^n}\Big),\qquad 8)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{n}{(n+1)!}+\frac{i}{\ln^n(n+1)}\Big),$$

$$9)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-i-1}\Big(1+\frac{1}{(2n-1)^2}\Big),\qquad 10)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{n+1}{2^n}+\frac{i}{3^n}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{n^2}\Big),$$

$$11)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{(n+1)^2},\qquad 12)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{i^{3n}}{i+n^2},$$

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2i)^{n^2}}$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2i)^n n!}{n^n}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{i^n}{(5in-4)(4in+1)}$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!}{(n!)^2}\cdot\dfrac{i^n}{1+i^n}$,

17) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+i)\ln^2 n}$, 18) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n}{n+2i}$.

6. Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність ряди:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2^n}{n!}+i\sin\dfrac{1}{n}$, 2) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+z)\ln^2 n}$, $z\neq -2,\,-3,\ldots$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\ln\dfrac{3}{n}\right)^n+i\left(\dfrac{-2n}{3n+1}\right)^n\right)$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n\cdot 2^n}{3^n+n}+i\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2}{2^n}-i\left(1-\cos\dfrac{2}{n}\right)$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{\sin 2n}{n^2}+i\dfrac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}{n\sqrt[3]{n+2}}\right)$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n-1}\dfrac{n!}{n^n}+i\dfrac{n^3}{(-3)^n}\right)$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}+i\dfrac{(-1)^n}{n^\beta}\right)$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n\cdot\dfrac{(2n-1)!!}{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}+i\dfrac{(-1)^n\ln^2(n+1)}{n\sqrt{n+1}}\right)$,

10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n i(\sin n+\cos n)}{n^2}$,

11) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!}{(n!)^2}$, 12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^n$,

13) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\dfrac{i}{1+(-1)^n ni}$, 14) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1+i}{n^2+i}$,

15) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(\cos n+i\sin n)}$, 16) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!}{(n!)^2}\cdot\dfrac{(1+i)^n}{2^{\frac{3n}{2}}+(1+i)^n}$.

7. Довести, що коли $\operatorname{Re} z_n\geq 0$, $\operatorname{Im} z_n\geq 0$, і ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ збігається, то ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n^2$ збігаються абсолютно.

8. Довести, що коли $\operatorname{Re} z_n \geq 0$, і ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n^2$ збігаються, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |z_n^2|$ також збігається.

Приклади розв'язування вправ

3.10. Враховуючи, що

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big),$$

отримаємо, що

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + i\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\Big) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \Big(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}i\Big(1 - \frac{1}{2n+1}\Big)\Big) = 1 + \frac{1}{2}i. \quad \blacktriangleright$$

4.8. Якщо шукати границі числових послідовностей, утворених з дійсних і уявних частин послідовності з комплексними числами, то зручно скористатися відомою формулою $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n = e$.

Отримаємо:

$$\lim_{n\to+\infty} \Big(\Big(\frac{2n}{2n+1}\Big)^n + i\Big(1+\frac{5}{n}\Big)^{n+6}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)^n + i\Big(1+\frac{5}{n}\Big)^{\frac{n}{5}\cdot\frac{5(n+6)}{n}}\Big) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \Big(\Big(1-\frac{1}{2n+1}\Big)^{-\frac{2n+1}{1}\cdot(-\frac{n}{2n+1})} + i\Big(1+\frac{5}{n}\Big)^{\frac{n}{5}\cdot\frac{5n+30}{n}}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \Big(e^{-\frac{n}{2n+1}} + ie^{\frac{5n+30}{n}}\Big) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \Big(e^{-\frac{1}{2+\frac{1}{n}}} + ie^{5+\frac{30}{n}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{e}} + ie^5. \quad \blacktriangleright$$

5.6. Розглянемо числові ряди $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \Big(\dfrac{n^2+5}{n^2+6}\Big)^{n^3}$ і дослідимо кожний з них на збіжність.

Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ використаємо ознаку Раабе:

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big)=\lim_{n\to+\infty} n\Big(1-\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\Big)=$$
$$=\lim_{n\to+\infty} n\Big(1-\frac{2n+1}{2n+2}\Big)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+2}=\frac{1}{2}<1.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ є розбіжним.

Тоді для ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}+i\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\dfrac{n^2+5}{n^2+6}\Big)^{n^3}$ не виконуються умови теореми 2. Отже, заданий ряд є розбіжним. ►

6.12. За формулою Муавра запишемо

$$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\Big(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\Big)=2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\Big).$$

Тоді початковий ряд перепишеться у вигляді

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1+i}{2}\Big)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\Big)}{2^n}\Big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}}{2^{\frac{n}{2}}}.$$

Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин останнього ряду. Отримаємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$.

За ознакою Даламбера маємо:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}}}{\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$ – збіжний. Тоді $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\dfrac{1+i}{2}\Big)^n$ є абсолютно збіжним. ►

§ 4.2. Степеневі ряди з комплексними елементами

Функціональний ряд виду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$, де a_n і z_0 – комплексні числа, а z – комплексна змінна, називається ***степеневим рядом з комплексними елементами.***

Як і для випадку степеневих рядів на множині дійсних чисел, основною є задача дослідження степеневого ряду з комплексними елементами на збіжність, причому таке дослідження можна проводити для рядів виду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$.

Теорема Абеля. *Якщо степеневий ряд* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *збігається в точці* $z_0 \neq 0$, *то він збігається абсолютно при будь-якому* z, *для якого* $|z| < |z_0|$. *Якщо ряд розбігається в точці* z_0, *то він розбігається при будь-якому* z, *для якого* $|z| > |z_0|$.

Невід'ємне число R, характерне тим, що при всіх z, для яких $|z| < R$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ збігається, а для всіх z, для яких $|z| > R$, ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ розбігається, називається ***радіусом збіжності*** цього ряду.

Якщо ряд збігається для кожного $z \in \mathbb{C}$, то $R = +\infty$.

Множина точок z, для яких $|z| < R$, називається ***кругом збіжності*** ряду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Якщо $R = 0$, то круг збіжності вироджується в точку, якщо $R = +\infty$, то круг збіжності збігається з усією комплексною площиною.

Якщо всі (або починаючи з деякого) коефіцієнти $a_n \neq 0$, то радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ шукають за однією із формул:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{або} \quad R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

при умові, що такі границі існують.

Зауважимо, що у випадку, коли $0 < R < +\infty$, для дослідження збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ на межі $\{z : |z| < R\}$ потрібні додаткові дослідження відповідних числових рядів з комплексними елементами.

Вправи

1. Знайти радіус збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+3)^n}{3^n}$, 2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{n+1}{2n+3}\Big)^n z^n$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^3z^n$, 4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(1+i)^{3n}}{(n+1)(n+2)}(z+i)^n$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)}{3^n}z^{5n}$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n \operatorname{arctg} e^{-n}\Big)z^n$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(kn)!}{n!(n+1)!\dots(n+k-1)!}z^n$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1-i}{2}\Big)^n z^{2n}$, 10) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(2+i\sqrt{5})^n}{(3-i\sqrt{7})^{2n}}z^{3n}$.

2. Знайти круг збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{n^2+3}{n^2+5}\Big)^{n^3}(z+i+1)^n$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(z+1-i)^n}{n!}$,

3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2z)^{n!}$, 4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2+(-1)^n)z^n$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}i\Big(\frac{n+1}{n+3}\Big)^{n^2}z^n$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(2^n+i3^n)(z-2i)^n$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\Big(\cos\frac{1}{n}\Big)^{2n}(z+i)^n$, 8) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+1+i)^n}{(3+(-1)^n\cdot 4)^n}$,

9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1+n^n\cdot i)(z-i)^{n^n}$, 10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\Big(\ln\cos\frac{1}{3^n}\Big)(z-2i)^n$.

3. Знайти область збіжності степеневих рядів:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(z+2)^n}{n^2}$, 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{3n}}{9^n}$,

3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nz^n}{n+1}$, 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}z^{n+1}$,

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n\sqrt{n}}$, 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$,

7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, 8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^{3n}}z^{2n-1}$,

$$9)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!(-1)^n}{(2n)!\cdot n!} z^n, \qquad 10)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{z^n}{n \ln^2 n}.$$

Приклади розв'язування вправ

1.7. Оскільки

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \operatorname{arctg} e^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\operatorname{arctg} e^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} e^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln \operatorname{arctg} e^{-n}}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n} \ln \frac{\operatorname{arctg} e^{-n}}{e^{-n}} e^{-n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot \ln e^{-n}} = e^{-1},$$

то $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \dfrac{1}{e^{-1}} = e$ – радіус збіжності степеневого ряду. ▶

2.6. Для ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (2^n + i3^n)(z-2i)^n$ шукаємо радіус збіжності степеневого ряду

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{2^n + i3^n}{2^{n+1} + i3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + i\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2 + i\cdot 3\right)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + i}{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot 2 + 3i}\right| = \frac{1}{3}.$$

Отже, $R = \dfrac{1}{3}$ і $\left\{z: \ |z-2i| < \dfrac{1}{3}\right\}$ – круг збіжності заданого степеневого ряду. ▶

3.3. Знайдемо радіус збіжності степеневого ряду:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \frac{n+2}{(-1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n z^n}{n+1}$ збіжний абсолютно в крузі $\Big\{z: \ |z| < 1\Big\}$.

Дослідимо заданий ряд на межі області $\Big\{z: \ |z| = 1\Big\}$.

Якщо $z = -1$, то $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n+1}$ – розбігається, як гармонічний.

Якщо $z \neq -1$, то використовуючи тригонометричну форму числа z, наш ряд для таких z запишеться у вигляді

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos n\alpha}{n+1} + i\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin n\alpha}{n+1}.$$

Ряди $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \cos n\alpha}{n+1}$ і $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \sin n\alpha}{n+1}$ збігаються за ознакою Діріхле. Отже, комплексний ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)}{n+1}$ є збіжним на множині $\Big\{z : \ |z| \leq 1\Big\} \setminus \{-1\}$. ►

§ 4.3. Основні елементарні функції комплексної змінної

Відображення, яке кожному комплексному числу з множини $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ ставить у відповідність єдине комплексне число, називається ***однозначною функцією комплексної змінної,*** визначеною на множині $\mathcal{Z}$. Позначається $\omega = f(z)$.

Відображення, яке кожному комплексному числу з множини $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ ставить у відповідність не менше одного комплексного числа, називається ***багатозначною функцією комплексної змінної.***

Надалі ми будемо розглядати тільки однозначні функції.

Зауважимо, що якщо є можливість $f(z)$ подати в алгебраїчній формі, тобто

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

то задання функції $\omega = f(z)$ еквівалентно заданню двох дійсних функцій $u = \varphi(x, y)$ і $v = \psi(x, y)$, тобто $f(z) = u + iv$.

Однією з найпростіших функцій є степенева функція $\omega = z^n$, де $n \in \mathbb{N}$. За допомогою степеневої функції будують многочлени комплексної змінної

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, причому $a_0 \neq 0$.

Многочлени називаються ***цілими раціональними функціями.*** Частку від ділення двох многочленів

$$R(z) = \frac{Q_m(z)}{P_n(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n},$$

які вважають взаємно простими, називають ***дробово-раціональною функцією.***

Показниковою функцією комплексної змінної називається функція $f(z) = e^z$, де $z \in \mathbb{C}$.

Тригонометричною функцією косинуса комплексної змінної називається функція $f(z) = \cos z,\ z \in \mathbb{C}$.

Тригонометричною функцією синуса комплексної змінної називається функція $f(z) = \sin z,\ z \in \mathbb{C}$.

Функції $\operatorname{tg} z$ і $\operatorname{ctg} z$ у комплексній площині визначаються формулами $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$.

Зауважимо, що логарифмічна функція комплексної змінної є багатозначною функцією, тому її розглядати в цій частині посібника не будемо.

Вийти за межі класу раціональних функцій можна і за допомогою степеневих рядів з комплексними змінними.

Якщо степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ має радіус збіжності $R > 0$ або $R = +\infty$ і область збіжності $\mathcal{Z}$, яка включає круг збіжності і можливо деякі точки межі області, то очевидно, що на множині $\mathcal{Z}$ можна означити функцію $f(z)$, значеннями якої в кожній точці $z_0 \in \mathcal{Z}$ є сума ряду $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$.

У такий спосіб на множині $\mathcal{Z}$ можна визначити функцію

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Встановлення властивостей таких функцій стає простішим, якщо їх можна подати в алгебраїчній формі.

Наведемо представлення основних елементарних функцій у вигляді ряду Тейлора на відповідних множинах:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Вправи

1. Знайти значення функції $\omega = e^z$ в точках:

$$1)\ 2\pi i, \qquad 2)\ \frac{\pi i}{2}, \qquad 3)\ \frac{\pi i}{4}, \qquad 4)\ \pi i, \qquad 5)\ -1 + \frac{\pi i}{2}.$$

2. Розв'язати рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1)\ e^z = 2, & 2)\ e^{3z} + 8i = 0, \\ 3)\ e^{2z} + 2ie^z + i - 1 = 0, & 4)\ \sin z = \dfrac{5}{3}, \\ 5)\ \cos z = \dfrac{3i}{4}, & 6)\ \cos \dfrac{3+i}{4}. \end{array}$$

3. Довести, що функції $\cos z$ і $\sin z$ періодичні з періодом 2π.

4. Довести, що для довільного комплексного числа $z \in \mathbb{C}$ виконуються рівності:

$$1)\ \cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

$$2)\ \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z,$$

$$3)\ \sin 2z = 2 \cos z \sin z,$$

$$4)\ \sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$

$$5)\ \sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$$

$$6)\ \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2.$$

5. Знайти дійсну і уявну частини, модуль і аргумент заданих чисел

$$1)\ \cos \frac{\pi i}{2}, \qquad 2)\ \sin i,$$

$$3)\ \cos(1-i), \qquad 4)\ \cos(2-3i).$$

6. Знайти множину точок комплексної площини, у яких функції $\cos z$, $\sin z$ приймають дійсні значення.

7. Знайти множини точок комплексної площини, у яких функції $\cos z$, $\sin z$ приймають уявні значення.

8. Враховуючи, що $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ і $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ довести наступні формули:

1) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$, 2) $\operatorname{sh}\left(z + \dfrac{\pi i}{2}\right) = -\operatorname{sh} z$,

3) $\operatorname{ch}\left(z + \dfrac{\pi i}{2}\right) = i \operatorname{sh} z$, 4) $\cos(iz) = \operatorname{ch} z$,

5) $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_2 \operatorname{ch} z_1$.

9. Знайти розвинення в ряд даних функцій комплексної змінної в околі точки z_0 :

1) $f(z) = e^{2z}, \quad z_0 = 0$, 2) $f(z) = \cos \dfrac{z}{4}, \quad z_0 = 0$,

3) $f(z) = \sin 5z, \quad z_0 = 0$, 4) $f(z) = e^z, \quad z_0 = 2$,

5) $f(z) = \cos z, \quad z_0 = 1$, 6) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = -1$,

7) $f(z) = \operatorname{ch} z, \quad z_0 = 0$, 8) $f(z) = \operatorname{sh} z, \quad z_0 = 0$,

9) $f(z) = \dfrac{2z-5}{z^2 - 5z + 6}, \quad z_0 = 0$, 10) $f(z) = \dfrac{1}{1+z}, \quad z_0 = 1$.

Приклади розв'язування вправ

1.3. Враховуючи, що

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^x \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(iy)^{2n-1}}{(2n-1)!} \Big) =$$

$$= e^x \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} y^{2n-1}}{(2n-1)!} \Big) = e^x(\cos y + i \sin y),$$

отримаємо формулу $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, яка називається формулою Ейлера.

Тоді

$$e^{\frac{\pi i}{4}} = e^0\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \blacktriangleright$$

2.5. З рівностей $e^{iy} = \cos y + i\sin y$ і $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$ отримаємо, що

$$\cos y = \frac{1}{2}\Big(e^{iy} + e^{-iy}\Big).$$

Тоді

$$\frac{1}{2}\Big(e^{iy} + e^{-iy}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz)^n}{n!} + (-1)^n\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz)^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z.$$

З рівності $\cos z = \dfrac{1}{2}\Big(e^{iz} + e^{-iz}\Big)$ отримаємо

$$\cos z = \frac{1}{2}\Big(e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})\cos x - \frac{i}{2}(e^y - e^{-y})\sin x = \cos x\,\mathrm{ch}\,y - i\sin x\,\mathrm{sh}\,y.$$

За умовою $\cos z = \dfrac{3i}{4}$, тоді отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}\cos x\,\mathrm{ch}\,y = 0,\\ -\sin x\,\mathrm{sh}\,y = \dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

З першого рівняння маємо, що $\mathrm{ch}\,y \neq 0$. Тоді $\cos x = 0$. Звідси $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Підставимо ці значення в друге рівняння.

Отримаємо рівняння:

$$-\sin\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)\,\mathrm{sh}\,y = \frac{3}{4}.$$

Звідси $-(-1)^n\,\mathrm{sh}\,y = \dfrac{3}{4}$ або $\mathrm{sh}\,y = \dfrac{3}{4}(-1)^{n+1},\ n \in \mathbb{Z}$.

Якщо $n = 2k$, то $\mathrm{sh}\,y = -\dfrac{3}{4}$ або $\dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = -\dfrac{3}{4}$.

Звідси $e^y - e^{-y} + \dfrac{3}{2} = 0$. Тоді отримаємо рівняння

$$2e^{2y} + 3e^y - 2 = 0.$$

Позначимо $e^y = t > 0$, тоді квадратне рівняння $2t^2 + 3t - 2 = 0$ має два розв'язки $t_1 = -2,\ t_2 = \dfrac{1}{2}$. Отримаємо $e^y = \dfrac{1}{2},\ y = \ln\dfrac{1}{2}$.

Якщо $n = 2k+1$, то $\operatorname{sh} y = \dfrac{3}{4}$. Звідси $e^y - e^{-y} - \dfrac{3}{2} = 0$. Тоді отримаємо рівняння $2e^{2y} - 3e^y - 2 = 0$.

Знову позначимо $e^y = t > 0$, тоді квадратне рівняння $2t^2 - 3t - 2 = 0$ має два розв'язки $t_1 = 2,\ t_2 = -\dfrac{1}{2}$. Отримаємо $e^y = 2,\ y = \ln 2$.

Отже, множиною розв'язків заданого рівняння є

$$\left\{\frac{\pi}{2} + \pi n + i(-1)^{n-1}\ln 2\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad \blacktriangleright$$

5.3. Враховуючи, що $\cos(1-i) = \cos 1 \operatorname{ch} 1 + i \sin 1 \operatorname{sh} 1$, маємо, що

$\operatorname{Re}\cos(1-i) = \cos 1 \operatorname{ch} 1$ – дійсна частина,

$\operatorname{Im}\cos(1-i) = \sin 1 \operatorname{sh} 1$ – уявна частина.

Знайдемо модуль числа $\cos(1-i)$:

$$|\cos(1-i)| = \sqrt{\cos^2 1 \operatorname{ch}^2 1 + \sin^2 1 \operatorname{sh}^2 1}.$$

Тоді для головного значення аргумента комплексного числа маємо:

$$\arg\cos(1-i) = \operatorname{arctg}\frac{\sin 1 \operatorname{sh} 1}{\cos 1 \operatorname{ch} 1} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{th} 1). \qquad \blacktriangleright$$

9.9. Розкладемо дріб $\dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$ на прості дроби:

$$\frac{2z-5}{z^2-5z+6} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-3} = \frac{Az - 3A + Bz - 2B}{z^2-5z+6},$$

$$\begin{cases} A + B = 2, \\ -3A - 2B = -5, \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1, \\ B = 1. \end{cases}$$

Тоді $f(z) = \dfrac{1}{z-2} + \dfrac{1}{z-3}$. Звідси

$$f(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}.$$

Оскільки $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n,\ |z| < 1$, то

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n,$$

де $|z| < 2$. ▶

РОЗДІЛ V. Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є

§ 5.1. Ортогональна система функцій. Тригонометричні ряди Фур'є

Дві функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$, визначені на відрізку $[a; b]$, називаються ***ортогональними*** на цьому відрізку, якщо

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

Розглянемо систему функцій $\{\varphi_n(x)\}$, визначених на відрізку $[a; b]$ та інтегровних на ньому разом зі своїм квадратом.

Система функцій $\{\varphi_n(x)\}$ називається ***ортогональною,*** якщо будь-які дві функції з цієї системи є попарно ортогональними, тобто

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad (n, m = 0, 1, 2, \ldots),$$

при цьому будемо вважати, що для довільної функції $\varphi_n(x)$ з ортогональної системи виконується умова

$$\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = \lambda_n > 0.$$

Якщо $\lambda_n = 1$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то система функцій $\{\varphi_n(x)\}$ називається ***нормальною.*** Якщо ця умова не виконується, то можна перейти до системи $\left\{\dfrac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\lambda_n}}\right\}$, яка вже буде нормальною.

Прикладом ортогональної системи є система тригонометричних функцій $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$ на відрізку $[-\pi; \pi]$.

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана довільна ортогональна система функцій $\{\varphi_n(x)\}$. Функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a; b]$, розкладається за функціями $\varphi_n(x)$ в ряд виду

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots,$$

коефіцієнти якого визначаються з рівностей

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n}\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n\varphi_n(x)$ з коефіцієнтами c_n називається ***узагальненим рядом Фур'є*** заданої функції, а самі коефіцієнти її ***узагальненими коефіцієнтами Фур'є*** відносно системи $\{\varphi_n(x)\}$.

Зауважимо, що узагальнений ряд Фур'є, побудований для функції $f(x)$, пов'язаний з нею лише формально. В загальному випадку зв'язок функції $f(x)$ з її узагальненим рядом позначають $f(x) \sim \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n\varphi_n(x)$. Збіжність ряду до функції $f(x)$ потребує додаткового дослідження.

Тригонометричним рядом називається функціональний ряд виду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

де $a_0, a_n, b_n, n \in \mathbb{N}$ – задані дійсні числа, які називаються ***коефіцієнтами*** цього ряду.

Якщо тригонометричний ряд рівномірно збігається до функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi; \pi]$, то значення

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

називаються ***коефіцієнтами Фур'є*** функції $f(x)$, інтегровної на відрізку $[-\pi;\pi]$. У такому разі тригонометричний ряд називається ***тригонометричним рядом Фур'є*** функції $f(x)$ і позначають

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Функція $f(x)$ називається функцією, що задовольняє умови Діріхле на відрізку $[a;b]$, якщо вона на цьому відрізку:

1) має скінченну кількість точок розриву I роду,

2) має скінченну кількість точок екстремуму.

Теорема 1. *Ряд Фур'є кусково-гладкої на відрізку $[-\pi;\pi]$ функції $f(x)$, що задовольняє умовам Діріхле, збігається в кожній точці x_0 інтервала $(-\pi;\pi)$ до значення $\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, а в точках $x=-\pi$ і $x=\pi$ – до значення $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.*

Достатні умови збіжності та рівномірної збіжності ряду Фур'є. *Нехай функція $f(x)$ є 2π-періодичною і $f(x_0)=\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ для довільного $x_0 \in \mathbb{R}$. Тоді ряд Фур'є цієї функції збігається на множині $\mathfrak{X} \subset [-\pi;\pi]$ до функції $f(x)$, якщо виконується принаймні одна з умов:*

1) для довільного $x \in \mathfrak{X}$ існують

$$f'(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0+0)}{x-x_0} \neq \infty$$

і

$$f'(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0-0)}{x-x_0} \neq \infty,$$

зокрема функція $f(x)$ диференційовна на множині $\mathfrak{X}$,

2) для довільного $x_0 \in \mathfrak{X}$ існують числа $h>0$, $H>0$ та $0<\alpha\le 1$ такі, що

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)| \le Ht^{\alpha}, \quad t \in [0;h],$$

3) для довільного $x_0 \in \mathfrak{X}$ існує число $h>0$ таке, що функція $f(x)$ є функцією обмеженої варіації на відрізку $[x_0-h;x_0+h]$.

Якщо, крім того, $\mathfrak{X} = [-\pi; \pi]$, функція $f(x)$ неперервна на множині $\mathfrak{X}$ і в умові 1) похідні $f'(x-0)$ і $f'(x+0)$ обмежені на цій множині, а в умові 2) числа h, H і α не залежать від x_0, то виконання хоча б однієї з умов 1)-3) забезпечує рівномірну збіжність ряду Фур'є до функції $f(x)$ на інтервалі $(-\infty; \infty)$.

Теорема 2 (про почленне інтегрування ряду Фур'є). *Нехай 2π-періодична функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[-\pi; \pi]$, а ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

є рядом Фур'є цієї функції. Тоді для довільного відрізка $[a; b] \subset [-\pi; \pi]$ виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}\, dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx.$$

Зокрема, якщо $F(x) = \int\limits_0^x \Big(f(t) - \frac{a_0}{2}\Big)dt$, то

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx\Big),$$

де $x \in [-\pi; \pi]$, і останній ряд є рядом Фур'є для функції $F(x)$.

Для коефіцієнтів Фур'є 2π-періодичної функції $f(x)$ справедлива нерівність

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,$$

яка називається ***нерівністю Бесселя,*** а рівність

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

називається ***рівністю Парсеваля-Стєклова.***

Якщо функція $f(x)$ є парною, тобто $f(x) = f(-x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, то всі її коефіцієнти Фур'є $b_n = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$, а коефіцієнти a_0, a_n обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ряд Фур'є в такому випадку для функції $f(x)$ має вигляд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx,$$

тобто парна функція $f(x)$ розвивається в ряд Фур'є за косинусами кратних дуг.

Якщо функція $f(x)$ – непарна, тобто $f(-x) = -f(x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$, то всі її коефіцієнти Фур'є $a_n = 0$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, а коефіцієнти b_n обчислюються за формулами:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ряд Фур'є в такому випадку для функції $f(x)$ має вигляд

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx,$$

тобто непарна функція $f(x)$ розвивається в ряд Фур'є за синусами кратних дуг.

Зауважимо, що формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є можна застосувати до будь-якої функції $f(x)$, заданої на відрізку $[x_0; x_0 + 2\pi]$, не обов'язково періодичної. Якщо для неї виконані умови теореми 1 на відрізку $[x_0; x_0 + 2\pi]$, то ряд Фур'є збігається. Однак, слід пам'ятати, що тригонометричний ряд Фур'є збігається до функції $f(x)$ тільки на основному проміжку $[x_0; x_0 + 2\pi]$.

Якщо функція $f(x)$ є $2l$-періодичною, то функція $\varphi(y) = f\Big(\dfrac{ly}{\pi}\Big)$ буде 2π-періодичною. Застосувавши до функції φ наведені вище міркування, можна дістати розвинення функції $f(x)$ в ***узагальнений ряд Фур'є:***

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

У випадку парної функції $f(x)$ ряд і коефіцієнти Фур'є a_n мають вигляд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

тобто парна функція розвивається в ряд Фур'є тільки за косинусами кратних дуг $\dfrac{\pi x}{l}$.

Для непарної функції $f(x)$ ряд Фур'є і коефіцієнти b_n мають вигляд

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

тобто непарна функція розвивається в ряд Фур'є тільки за синусами кратних дуг $\dfrac{\pi x}{l}$.

Функцію $f(x)$, задану на проміжку $[0; l]$, можна розвинути в тригонометричний ряд тільки за синусами або тільки за косинусами кратних дуг. Щоб отримати ряд за косинусами, функцію $f(x)$ продовжують на проміжок $[-l; 0]$ так, щоб отримати парну функцію і коефіцієнти a_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, обчислюються за вищенаведеними формулами. Для отримання ряду Фур'є тільки за синусами кратних дуг функцію $f(x)$ продовжують на відрізок $[-l; 0]$ непарним чином, тоді коефіцієнти $b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

Розглянемо тепер систему комплекснозначних функцій $\psi_n(x) = e^{inx}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, ортогональну на відрізку $[-\pi; \pi]$.

Ряд Фур'є для 2π-періодичної функції $f(x)$ в ***комплексній формі*** має вигляд

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Аналогічно система комплекснозначних функцій

$$\Psi_n(x) = e^{\frac{in\pi x}{l}}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

є ортогональною системою на відрізку $[-l; l]$. Ряд Фур'є $2l$-періодичної функції $f(x)$ в комплексній формі за цією системою функцій має вигляд

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}},$$

де коефіцієнти c_n обчислюються за формулами:

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{l}} dx, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Якщо розглядати довільну ортогональну систему функцій, то нерівність Бесселя для коефіцієнтів Фур'є інтегровної з квадратом функції $f(x)$ має вигляд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 \int_a^b \varphi_n^2(x) dx \le \int_a^b f^2(x) dx,$$

а рівність Парсеваля-Стєклова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2 \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \int_a^b f^2(x) dx.$$

Зокрема, якщо для коефіцієнтів c_n ортогональної системи функцій $\{\varphi_n\}$ на $[a; b]$ і функції $f(x)$, інтегровної з квадратом на $[a; b]$, виконується рівність

Парсеваля-Стєклова, то така ортогональна система називається ***замкненою*** на $[a; b]$.

Вправи

1. Показати, що задані системи функцій є ортогональними на вказаних відрізках:

$$1)\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots,\qquad x\in[a;a+l],\quad a\in\mathbb{R},$$
$$2)\ \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{b-a},\ \sin\frac{2\pi x}{b-a},\ \ldots,\ \sin\frac{n\pi x}{b-a},\ \ldots,\qquad x\in[a;b],$$
$$3)\ 1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \ldots,\qquad x\in(0;\pi),$$
$$4)\ \sin x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \sin nx,\ \ldots,\qquad x\in(0;\pi),$$
$$5)\ T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x),\qquad (n=0,1,2,\ldots),\quad x\in[-1;1],$$
$$6)\ L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n(x^ne^{-x})}{dx^n},\qquad (n=0,1,2,\ldots),\quad x\in(0;+\infty),$$
$$7)\ H_n(x)=\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{n!}\frac{d^n(a^{\frac{x^2}{2}})}{dx^n},\qquad (n=0,1,2,\ldots),\quad x\in(0;+\infty).$$

2. Для заданої функції $f(x)$ знайти її ряд Фур'є та вказати, де він збігається до $f(x)$:

1) $f(x)=\sin ax$,	2) $f(x)=\cos ax$,
3) $f(x)=\lvert x\rvert$,	4) $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x)$,
5) $f(x)=\sin^4 x$,	6) $f(x)=\operatorname{sgn} x$,
7) $f(x)=e^{ax},\quad a\neq 0$,	8) $f(x)=\lvert\cos x\rvert$,
9) $f(x)=\arcsin(\cos x)$,	10) $f(x)=\lvert\sin x\rvert$.

3. Розвинути у ряд Фур'є у вказаному проміжку функції:

$$1)\ f(x)=\frac{\pi-x}{2},\quad x\in(0;2\pi),\qquad 2)\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо}\ -1<x<0,\\ x, & \text{якщо}\ 0\le x<1,\end{cases}$$

3) $f(x) = \pi^2 - x^2, \quad x \in (-\pi; \pi)$,

4) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, \\ 2, & \text{якщо } 1 < x < 2, \\ 4-x, & \text{якщо } 2 \le x \le 3, \end{cases}$

5) $f(x) = x\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right), \quad x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$,

6) $f(x) = e^x, \quad x \in (-2; 2)$,

7) $f(x) = \operatorname{sh} ax, \quad x \in (\pi; \pi)$,

8) $f(x) = \begin{cases} a, & \text{якщо } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ b, & \text{якщо } \dfrac{\pi}{2} \le x < \dfrac{3}{2}\pi, \end{cases}$

9) $f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{якщо } -1 \le x < 0, \\ 1-x, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, \end{cases}$

10) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & \text{якщо } 1 < x \le 2. \end{cases}$

4. Використовуючи розвинення в ряд Фур'є функції $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $0 < x < \pi$ і продовживши її періодично на всю множину дійсних чисел, довести, що:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$,

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$,

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+2)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}, \quad 0 \le x \le \pi$.

5. Розвинути в ряд Фур'є функції:

1) $f(x) = 2x$, $x \in (0; \pi)$, за синусами кратних дуг,

2) $f(x) = x^2$, $x \in (0; \pi)$, за косинусами і за синусами кратних дуг,

3) $f(x) = x \sin x$, $x \in [0; \pi]$, за синусами кратних дуг,

4) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, \\ 2-x, & \text{якщо } 1 < x \le 2, \end{cases}$ за синусами і косинусами кратних дуг,

5) $f(x) = \dfrac{\pi - 2x}{4}$, $x \in (0; \pi)$, за синусами і косинусами кратних дуг.

6. Записати рівність Парсеваля-Стєклова для заданої функції $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x| \leq \alpha, \\ 0, & \text{якщо } \alpha < |x| \leq \pi, \end{cases}$ та знайти суми рядів $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin^2 \alpha n}{n^2}$ і $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos^2 \alpha n}{n^2}$.

7. Знаючи коефіцієнти Фур'є a_n і b_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, інтегровної функції $f(x)$ періоду 2π, обчислити коефіцієнти Фур'є A_n, B_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, функції Стєклова

$$f_n(x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi.$$

8. Нехай $f(x)$ – неперервна функція з періодом 2π і a_n, b_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ – її коефіцієнти Фур'є. Визначити коефіцієнти Фур'є A_n, B_n, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, згорткової функції

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt.$$

Користуючись отриманим результатом, вивести рівність Парсеваля-Стєклова.

9. Розвинути функції в комплексний ряд Фур'є:

1) $f(x) = e^x, \ -\pi < x < \pi,$ 2) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -2 \leq x < 0, \\ -x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq \pi, \\ -1, & \text{якщо } \pi < x \leq 2\pi, \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 < x < 1, \\ -1, & \text{якщо } 1 < x < 3. \end{cases}$

10. Розвинути функцію $f(x) = x^3, \ -1 < x < 1$, в ряд Фур'є за многочленами Чебишева $T_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

11. Розвинути функції на проміжку $(-1; 1)$ в ряд Фур'є за многочленами Лежандра $L_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!} \cdot \dfrac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \ L_0 = 1, \ n \in \mathbb{N}$:

1) $f(x) = |x|,$ 2) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -1 < x < 0, \\ 1, & \text{якщо } 0 < x < 1. \end{cases}$

12. Знаючи, що ряд Фур'є функції $f(x) = x^2$, $-\pi \le x \le \pi$, має вигляд

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2},$$

написати рівність Парсеваля-Стєклова.

13. Ряд Фур'є функції $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -l < x < 0, \\ 1, & \text{якщо } 0 \le x < l, \end{cases}$ має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)}{l}x + \frac{l}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Написати для цього розкладу рівність Парсеваля-Стєклова.

Приклади розв'язування вправ

2.3. Функція $f(x) = |x|$ є інтегровною на відрізку $[-\pi; \pi]$ і можна знайти її коефіцієнти Фур'є. Отримаємо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|dx = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}xdx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}xdx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\Big(-\int\limits_{-\pi}^{0}x\cos nxdx + \int\limits_{0}^{\pi}x\cos nxdx\Big) =$$

$$= \left|\begin{matrix} U = x, & dV = \cos nx, \\ dU = dx, & V = \dfrac{\sin nx}{n} \end{matrix}\right| = \frac{1}{\pi}\Big(\Big(-x\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int\limits_{-\pi}^{0}\sin nxdx + \Big(x\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big)\Big|_{0}^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{n}\int\limits_{0}^{\pi}\sin nxdx\Big) = \frac{1}{\pi n}\Big(\int\limits_{-\pi}^{0}\sin nxdx - \int\limits_{0}^{\pi}\sin nxdx\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\Big(-\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \cos nx\Big|_{0}^{\pi}\Big) = \frac{1}{\pi n^2}\Big(-2 + 2(-1)^n\Big) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Коефіцієнти $b_n = 0$, бо $\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|x|\sin nxdx = 0$, як інтеграл в симетричних межах від непарної функції.

Отже,

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x,$$

де $x \in [-\pi;\pi]$.

Якщо покласти $\varphi(x) = |x|$, $x \in [-\pi;\pi]$, і $\varphi(x+2\pi) = \varphi(x)$ для довільного $x \in (-\infty;\infty)$, то функція $\varphi(x)$ є періодичною з періодом 2π і неперервною на всій дійсній осі. Для функції $\varphi(x)$ виконуються достатні умови збіжності ряду Фур'є. Тоді

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\varphi(x) = |x|$ при $x \in (-\pi;\pi)$, то

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x. \quad \blacktriangleright$$

3.4. Функція $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, \\ 2, & \text{якщо } 1 < x < 2, \\ 4-x, & \text{якщо } 2 \le x \le 3, \end{cases}$ задовольняє умови розвинення функції в ряд Фур'є на відрізку $[0;3]$. Отже, її можна розкласти в ряд Фур'є на цьому відрізку. Тоді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

де $l = \dfrac{3}{2}$.

Знаходимо коефіцієнти розвинення функції в ряд Фур'є. Отримаємо:

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx = \frac{2}{3}\Big(\int_0^1 (x+1)dx + 2\int_1^2 dx + \int_2^3 (4-x)dx\Big) =$$

$$= \frac{2}{3}\Big(\Big(\frac{x^2}{2}+x\Big)\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 + \Big(4x - \frac{x^2}{2}\Big)\Big|_2^3\Big) = \frac{10}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx = \frac{2}{3}\Big(\int_0^1 (x+1)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx + 2\int_1^2 \cos\frac{2n\pi x}{3}dx +$$

$$+\int\limits_2^3 (4-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx\Big) = \frac{2}{3}\Big(\frac{3}{2n\pi}(x+1)\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_0^1 - \frac{3}{2n\pi}\int\limits_0^1 \sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx +$$

$$+\frac{6}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_1^2 + (4-x)\cdot\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_2^3 + \frac{3}{2n\pi}\int\limits_2^3 \sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx\Big) =$$

$$= \frac{2}{3}\Big(\frac{3}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\Big|_0^1 + \frac{3}{n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3} - \frac{3}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{3}{2n\pi}\sin 2n\pi -$$

$$-\frac{3}{n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3} - \frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\Big|_2^3\Big) = \frac{2}{3}\Big(\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{9}{4n^2\pi^2} -$$

$$-\frac{9}{4n^2\pi^2}\cos 2n\pi + \frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{4n\pi}{3}\Big) = \frac{3}{2n^2\pi^2}\Big(\cos\frac{2n\pi}{3} + \cos\frac{4n\pi}{3} - 2\Big) =$$

$$= \frac{3}{2n^2\pi^2}\Big(2\cos n\pi\cos\frac{n\pi}{3} - 2\Big) = \frac{3}{n^2\pi^2}\Big((-1)^n\cdot\cos\frac{n\pi}{3} - 1\Big).$$

$$b_n = \frac{2}{3}\int\limits_0^3 f(x)\sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx = \frac{2}{3}\Big(\int\limits_0^1 (x+1)\sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx + 2\int\limits_1^2 \sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx +$$

$$+\int\limits_2^3 (4-x)\sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx\Big) = \frac{2}{3}\Big(\frac{-3}{2n\pi}(x+1)\cos\frac{2n\pi x}{3}\Big|_0^1 + \frac{3}{2n\pi}\int\limits_0^1 \cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx -$$

$$-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{3}\Big|_1^2 - (4-x)\cdot\frac{3}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{3}\Big|_2^3 - \frac{3}{2n\pi}\int\limits_2^3 \cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx\Big) =$$

$$= \frac{2}{3}\Big(-\frac{3}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{3}{2n\pi} + \frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_0^1 - \frac{3}{n\pi}\cos\frac{4n\pi}{3} + \frac{3}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{3}{2n\pi} +$$

$$+\frac{3}{n\pi}\cos\frac{4n\pi}{3} - \frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_2^3\Big) = \frac{3}{2n^2\pi^2}\Big(\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{4n\pi}{3}\Big) =$$

$$= \frac{3}{2n^2\pi^2}\cdot 2\sin n\pi\cos\frac{n\pi}{3} = 0.$$

Отже, розклад заданої функції в ряд Фур'є матиме вигляд:

$$f(x) = \frac{5}{3} + \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Big((-1)^n\cos\frac{n\pi}{3} - 1\Big)\cos\frac{2n\pi x}{3}. \quad \blacktriangleright$$

5.4. Спочатку розкладемо функцію $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & \text{якщо } 1 < x \le 2, \end{cases}$ за косинусами кратних дуг на відрізку $[0; 2]$. Робимо парне продовження на $[-2; 0]$. Тоді $b_n = 0$,

$$a_0 = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 dx + \int_1^2 (2-x)dx = x\Big|_0^1 + \Big(2x - \frac{x^2}{2}\Big)\Big|_1^2 = \frac{3}{2}.$$

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos n\pi x\,dx = \int_0^1 \cos n\pi x\,dx + \int_1^2 (2-x)\cos n\pi x\,dx =$$

$$= -\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}(2-x)\sin n\pi x\Big|_1^2 + \frac{1}{n\pi}\int_1^2 \sin n\pi x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_1^2 = -\frac{1}{n^2\pi^2}\Big(1 - (-1)^n\Big) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{-2}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Отже,

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}, \quad x \in [0; 2].$$

Тепер розкладемо функцію $f(x)$ за синусами кратних дуг на відрізку $[0; 2]$. Робимо непарне продовження на $[-2; 0]$. Тоді $a_0 = 0$, $a_n = 0$,

$$b_n = \int_0^2 f(x)\sin n\pi x\,dx = \int_0^1 \sin n\pi x\,dx + \int_1^2 (2-x)\sin n\pi x\,dx =$$

$$= -\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}(2-x)\cos n\pi x\Big|_1^2 - \frac{1}{n\pi}\int_1^2 \cos n\pi x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\Big((-1)^n - 1\Big) + \frac{1}{n\pi}\cdot(-1)^n - \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_1^2 = \frac{1}{n\pi}.$$

Отже,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin n\pi x, \quad x \in [0; 2]. \quad \blacktriangleright$$

9.4. Визначимо для функції $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 < x < 1, \\ -1 & \text{якщо } 1 < x < 3, \end{cases}$ довжину відрізка l. Маємо $2l = 3$, звідки $l = \dfrac{3}{2}$. Тоді поширимо функцію $f(x)$ на всю дійсну вісь періодичним чином з періодом $T = 3$.

Комплексні коефіцієнти ряду Фур'є обчислюємо за формулами

$$c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_0^{2l} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{l}}dx, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

В нашому випадку маємо

$$c_n = \frac{1}{3}\int\limits_0^3 f(x)e^{-\frac{2in\pi x}{3}}dx = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 e^{-\frac{2in\pi x}{3}}dx - \frac{1}{3}\int\limits_1^3 e^{-\frac{2in\pi x}{3}}dx =$$

$$= -\frac{1}{2in\pi}e^{-\frac{2in\pi x}{3}}\Big|_0^1 + \frac{1}{2in\pi}e^{-\frac{2in\pi x}{3}}\Big|_1^3 = \frac{1}{2in\pi}\Big(-e^{-\frac{2in\pi}{3}} + 1 + e^{-2in\pi} - e^{-\frac{2in\pi}{3}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2in\pi}\Big(2 - 2e^{-\frac{2in\pi}{3}}\Big) = \frac{1 - e^{-\frac{2in\pi}{3}}}{in\pi}, \quad n \neq 0.$$

$$c_0 = \frac{1}{3}\int\limits_0^3 f(x)dx = \frac{1}{3}\Big(\int\limits_0^1 dx - \int\limits_1^3 dx\Big) = \frac{1}{3}\Big(x\Big|_0^1 - x\Big|_1^3\Big) = -\frac{1}{3}.$$

Отже, розклад функції в ряд Фур'є в комплексній формі матиме вигляд

$$f(x) = -\frac{1}{3} - \frac{i}{\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1 - e^{-\frac{2in\pi}{3}}}{n}e^{-\frac{2in\pi x}{3}}, \quad n \neq 0.$$

Зауважимо, що знайдений ряд збігається до функції $f(x)$ при $x \in (0;1)$ та $x \in (1;3)$, а в крайніх точках $x = 0$ і $x = 3$ та в точці $x = 1$ його сума рівна $\dfrac{1 + (-1)}{2} = 0$. ▶

10. Враховуючи означення, можемо записати

$$x^3 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(x),$$

де коефіцієнти Фур'є a_n потрібно знайти. Для їх обчислення скористаємося властивістю ортогональності многочленів Чебишева на інтервалі $(-1;1)$ з ваговою функцією $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Помноживши обидві частини розкладу на вагову функцію, отримаємо

$$\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(x).$$

Проінтегруємо обидві частини рівності по x в межах від -1 до 1 :

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(x)dx.$$

Звідси отримаємо, що $a_0 = 0$.

Далі, помножимо обидві частини розкладу на $\dfrac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ і проінтегруємо по по x в межах від -1 до 1 :

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^3 T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2^{n-1}}\int_{-1}^{1} \frac{x^3\cos(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi a_n}{2^{2n-1}}.$$

Для обчислення інтеграла $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^3\cos(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ проведемо підстановку $\arccos x = t$. Тоді отримаємо

$$a_n = \frac{2^n}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x^3\cos(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} \arccos x = t, & dx = -\sin t\,dt, & x_1 = -1, & t_1 = \pi \\ x = \cos t, & \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t, & x_2 = 1, & t_1 = 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2^n}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^3 t\cos nt\,dt = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\cos t\cos ntdt =$$

$$= \frac{2^{n-1}}{\pi}\int_0^{\pi} (1+\cos 2t)\cdot\frac{1}{2}(\cos t(n+1) + \cos t(n-1))dt =$$

$$= \frac{2^{n-2}}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(\cos t(n+1) + \cos t(n-1) + \cos 2t\cos t(n+1) + \cos 2t\cos t(n-1)\Big)dt =$$

$$= \frac{2^{n-2}}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(\cos t(n+1) + \cos t(n-1) + \frac{1}{2}\cos t(3+n) + \frac{1}{2}\cos t(n-1) + \frac{1}{2}\cos t(n+1) +$$

$$+\frac{1}{2}\cos t(3-n)\Big)dt=\frac{2^{n-2}}{\pi}\Big(\frac{\sin t(n+1)}{n+1}+\frac{\sin t(n-1)}{n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t(3+n)}{3+n}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t(n-1)}{n-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t(n+1)}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t(3-n)}{3-n}\Big)\Big|_0^\pi=0,\ n\neq 1,\ n\neq 3.$$

Якщо $n=1$, то

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos^3 t\cdot\cos t\,dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi\Big(\frac{1+\cos 2t}{2}\Big)^2dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi\Big(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\Big)dt=\frac{1}{2\pi}\Big(t+\sin 2t+\frac{t}{2}+\frac{1}{8}\sin 4t\Big)\Big|_0^\pi=\frac{3}{4}.$$

Якщо $n=3$, то

$$a_3=\frac{8}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos^3 t\cdot\cos 3t\,dt=\frac{8}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos^3 t\cdot\cos(t+2t)dt=$$

$$=\frac{8}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos^3 t(\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t)dt=\frac{8}{\pi}\int\limits_0^\pi\cos^3 t(\cos t(2\cos^2 t-1)-$$

$$-2\sin^2 t\cos t)dt=\frac{8}{\pi}\int\limits_0^\pi(2\cos^6 t-\cos^4 t-2\sin^2 t\cos^4 t)dt=$$

$$=\frac{8}{\pi}\int\limits_0^\pi\Big(2\cdot\Big(\frac{1+\cos 2t}{2}\Big)^3-\Big(\frac{1+\cos 2t}{2}\Big)^2-\frac{(1-\cos 2t)(1+\cos 2t)^2}{4}\Big)dt=$$

$$=\frac{8}{\pi}\int\limits_0^\pi\Big(\frac{1}{4}(1+3\cos 2t+3\cos^2 2t+\cos^3 2t)-\frac{1}{4}(1+2\cos 2t+\cos^2 2t)-$$

$$-\frac{1}{4}(1-\cos^2 2t+\cos 2t-\cos^3 2t)\Big)dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi(-1+3\cos^2 2t+2\cos^3 t)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi(1+3\cos 4t)dt+2\int\limits_0^\pi(1-\sin^2 t)d(\sin t)\Big)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\Big(\frac{t}{2}+\frac{3}{8}\sin 4t+2\sin t-\frac{2}{3}\sin^3 t\Big)\Big|_0^\pi=1.$$

Отже, отримаємо розклад функції $f(x)=x^3$ за многочленами Чебишева у вигляді $x^3=\dfrac{3}{4}T_1(x)+T_3(x)$, де $x\in(-1;1)$.

Якщо розписати многочлени $T_1(x)$ і $T_3(x)$, то

$$x^3 = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\cos(3\arccos x), \quad x \in (-1; 1). \quad \blacktriangleright$$

§ 5.2. Перетворення Фур'є. Інтеграл Фур'є

Функція $f(x)$ називається ***абсолютно інтегровною на*** $\mathbb{R}$, якщо існує невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$.

Теорема 1. *Нехай функція $f(x)$ на нескінченному проміжку $(-\infty; \infty)$ є обмеженою і абсолютно інтегровною, а на будь-якому скінченному відрізку $[a; b]$ задовольняє умовам Діріхле, тобто має на цьому відрізку скінченну кількість точок розриву першого роду і скінченну кількість точок екстремуму. Тоді виконується співвідношення*

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt.$$

Зокрема, в точках неперервності функції $f(x)$ виконується рівність

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(t-x)dt.$$

Ці рівності часто називають ***інтегральними формулами Фур'є***, а повторний інтеграл справа називають ***інтегралом Фур'є***.

Зауважимо, що інтегральну формулу Фур'є в точках неперервності можна переписати у вигляді:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} (a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x)d\omega,$$

де $a(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt$, $b(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$.

Для парних функцій формула Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} \Big(\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\Big)\cos\omega x\,d\omega.$$

Якщо позначити

$$a(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \cos \omega t \, dt, \qquad (1)$$

то інтеграл Фур'є перепишеться у виді

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} a(\omega) \cos \omega x \, d\omega. \qquad (2)$$

Формула (1) називається ***косинус-перетворенням Фур'є*** парної функції.

Для непарних функцій інтегральну формулу можна зобразити у вигляді

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(\int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \sin \omega t \, dt \Big) \sin \omega x \, d\omega.$$

Якщо позначити

$$b(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) \sin \omega t \, dt, \qquad (3)$$

то інтегральна формула перепишеться у виді

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} b(\omega) \sin \omega x \, d\omega. \qquad (4)$$

Формула (3) називається ***синус-перетворенням Фур'є*** непарної функції $f(x)$.

Зауважимо, що парну або непарну функцію $f(x)$ можна відновити, використовуючи відповідні інтеграли Фур'є (2) або (4) за відповідним косинус-перетворенням або синус-перетворенням Фур'є.

Формула

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega(t-x)} dt \Big) d\omega$$

називається ***інтегралом Фур'є в комплексній формі***.

Нехай для функції $f(x)$ виконуються умови теореми 1. Тоді ***прямим перетворенням Фур'є*** називається інтеграл

$$\widehat{f}(\omega) \equiv F[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} \, dx. \qquad (5)$$

Обернене перетворення Фур'є, яке відновлює початкову функцію $f(x)$, визначається співвідношенням

$$f(x) \equiv F^{-1}[\widehat{f}(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega. \tag{6}$$

Отримана за допомогою перетворення Фур'є (5) функція $\widehat{f}(\omega)$ називається ***зображенням за Фур'є функції*** $f(x)$.

Наведемо основні властивості прямого та оберненого перетворення Фур'є.

1) Лінійність перетворення Фур'є. *Якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ задовольняють умови теореми 1, то для довільних дійсних чисел α_1 та α_2 виконуються рівності*

$$F[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] = \alpha_1 F[f_1(x)] + \alpha_2 F[f_2(x)],$$

$$F^{-1}[\alpha_1 \widehat{f_1}(\omega) + \alpha_2 \widehat{f_2}(\omega)] = \alpha_1 F^{-1}[\widehat{f_1}(\omega)] + \alpha_2 F^{-1}[\widehat{f_2}(\omega)].$$

2) Формула зв'язку. *Якщо для функції $f(x)$ існує пряме та обернене перетворення Фур'є, то*

$$F[f(-x)] = F^{-1}[f(x)].$$

3) Перетворення Фур'є похідної. *Якщо для функцій $f(x)$ та $f'(x)$ існує перетворення Фур'є, то*

$$F[f'(x)] = i\omega F[f(x)].$$

Якщо функція $f(x)$ є нескінченно диференційовною і для довільного $k \in \mathbb{N}$ існує перетворення Фур'є $F[f^{(k)}(x)]$, то справедливе наступне співвідношення

$$F[f^{(k)}(x)] = (i\omega)^k F[f(x)], \quad k \in \mathbb{N}.$$

4) Похідна від перетворення Фур'є. *Нехай функція $f(x)$ неперервна на $\mathbb{R}$, а $xf(x)$ абсолютно інтегровна на $\mathbb{R}$, то*

$$F'[f(x)] = F[-ixf(x)].$$

В загальному випадку виконується формула

$$F^{(k)}[f(x)] = F[(-ix)^k f(x)], \quad k \in \mathbb{N}.$$

5) Перетворення Фур'є інтеграла. *Якщо для функції $f(x)$ існує перетворення Фур'є, то*

$$F\Big[\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt\Big] = \frac{1}{i\omega} F[f(x)].$$

6) Перетворення Фур'є зсунутої функції. *Якщо для функції $f(x)$ існує перетворення Фур'є, то для $f(x-a)$ справедлива формула*

$$F[f(x-a)] = e^{-i\omega a} F[f(x)],$$

а для функції $f(x+a)$ – формула

$$F[f(x+a)] = e^{i\omega a} F[f(x)].$$

Згорткою двох функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$, визначених на всій дійсній осі, називається функція $f_1(x) * f_2(x)$, що визначається рівністю

$$f_1(x) * f_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t) f_2(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt.$$

7) Перетворення Фур'є згортки двох функцій. *Якщо для функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$ існує пряме та обернене перетворення Фур'є, то виконуються наступне співвідношення*

$$F[f_1(x) * f_2(x)] = \sqrt{2\pi} F[f_1(x)] \cdot F[f_2(x)].$$

Зображення Фур'є $\widehat{f}(\omega) \equiv F[f(x)]$ функції $f(x)$ називається ***спектральною функцією*** або ***спектральною характеристикою*** для $f(x)$. Функція $e^{i\omega x}$ називається ***комплексною гармонікою,*** а $\widehat{f}(\omega)$ – ***комплексною амплітудою гармоніки*** $e^{i\omega x}$.

Зауважимо, що з механічної точки зору функція $e^{i\omega x}$ при довільному значенні ω описує гармонічне коливання. Тоді перетворення Фур'є (5) можна розуміти як зображення руху, що описується функцією $e^{i\omega x}$, у вигляді нескінченної неперервної системи незалежних коливань $e^{i\omega x}$ з різними частотами ω. Функція $\widehat{f}(\omega)$ при цьому показує, з якою інтенсивністю відбуваються коливання, що відповідають різним значенням ω. Функція $|\widehat{f}(\omega)|$ називається ***амплітудним частотним спектром*** функції $f(x)$.

Вправи

1. Зобразити інтегралом Фур'є задані функції:

$$1)\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x<0,\\ e^{-x}, & \text{якщо } x\ge 0,\end{cases}$$

$$2)\ f(x)=e^{-|x|},$$

$$3)\ f(x)=e^{-x^2},$$

$$4)\ f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{якщо } |x|\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \text{якщо } |x|>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

$$5)\ f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{якщо } |x|\le \pi,\\ 0, & \text{якщо } |x|>\pi,\end{cases}$$

$$6)\ f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } |x|<1,\\ 0, & \text{якщо } |x|>1,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{якщо } |x|=1,\end{cases}$$

$$7)\ f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } -1<x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{якщо } x=-1,\ x=0,\ x=1,\\ x, & \text{якщо } 0<x<1,\\ 0, & \text{якщо } |x|>1,\end{cases}$$

$$8)\ f(x) = \begin{cases} -x-2, & \text{якщо } -2 \le x < -1, \\ x, & \text{якщо } -1 \le x < 1, \\ -x+2, & \text{якщо } 1 \le x \le 2, \\ 0, & \text{якщо } |x| > 2, \end{cases}$$

$$9)\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & \text{якщо } |x| \le 1, \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1, \end{cases}$$

$10)\ f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) \cdot \operatorname{sgn}(x-b),\ \ b > a,$

$11)\ f(x) = \dfrac{1}{a^2+x^2},\ \ a > 0,$

$12)\ f(x) = \dfrac{x}{a^2+x^2},\ \ a > 0,$

$$13)\ f(x) = \begin{cases} 4\Big(1 - \dfrac{|x|}{2}\Big), & \text{якщо } |x| \le 2, \\ 0, & \text{якщо } |x| > 2, \end{cases}$$

$14)\ f(x) = e^{-\alpha|x|}\cos\beta x,\ \ \alpha > 0,$

$15)\ f(x) = e^{-\alpha|x|}\sin\beta x,\ \ \alpha > 0,$

$16)\ f(x) = xe^{-x^2}.$

2. Знайти синус-перетворення Фур'є наступних функцій:

$1)\ f(x) = e^{-bx},$

$2)\ f(x) = \dfrac{1}{x},$

$$3)\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

$4)\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+b^2},$

$$5)\ f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & \text{якщо } x \ge 0,\ \alpha > 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$$

$$6)\ f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } |x| \le 2, \\ 0, & \text{якщо } |x| > 2, \end{cases}$$

$7)\ f(x) = xe^{-\alpha x^2},$

$8)\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}},$

$9)\ f(x) = \dfrac{\cos\beta x}{x},$

$10)\ f(x) = \dfrac{\sin\beta x}{x}.$

3. Знайти косинус-перетворення Фур'є функції $f(x)$:

1) $f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & \text{якщо } x \geq 0,\ \alpha > 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$ 2) $f(x) = e^{-\alpha x,}$

3) $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, 4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + b^2}$, 6) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$

7) $f(x) = \ln \dfrac{x^2 + b^2}{x^2 + c^2}$, 8) $f(x) = \dfrac{\sin \beta x}{x}$,

9) $f(x) = \sin \beta x^2$, 10) $f(x) = \cos \beta x^2$.

4. Знайти перетворення Фур'є наступних функцій:

1) $f(x) = e^{-\alpha|x|},\ \alpha > 0$, 2) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1, \end{cases}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{1 + x^2},\ x \in \mathbb{R}$, 4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}, & \text{якщо } |x| \leq a, \\ 0, & \text{якщо } |x| > a, \end{cases}$

5) $f(x) = xe^{-\alpha|x|},\ \alpha > 0$, 6) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}},\ x \in \mathbb{R}$,

7) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \beta x,\ x \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}$, 8) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sin \beta x,\ x \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}$,

9) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + b^2},\ x \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$, 10) $f(x) = e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$.

5. Функція $f(x)$ задовольняє умову $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + x^2)|f(x)|dx < +\infty$. Виразити перетворення Фур'є функції $x^2 f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, через перетворення Фур'є функції $f(x)$.

6. Довести рівності:

$$1)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x}{a^2 + \omega^2}\, d\omega = \frac{\pi}{2a}\, e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

$$2)\ \int\limits_0^{+\infty} e^{-\omega} \cos \omega x\, d\omega = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$3)\ \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}\cos\omega x\,d\omega = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad x\in\mathbb{R},\quad \sigma>0,$$

$$4)\ F\Big[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}\Big] = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2 t},\quad x\in\mathbb{R},\quad t>0.$$

7. Знайти перетворення Фур'є функції:

$$1)\ f(x) = \frac{2x}{(x^2+4)^2},\qquad 2)\ f(x) = \frac{9-x^2}{(x^2+9)^2}.$$

8. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x-3)$, якщо

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{якщо } |x|\le 3,\\ 0, & \text{якщо } |x|>3. \end{cases}$$

9. Знайти перетворення Фур'є функції $f(x)$, якщо:

$$1)\ f(x) = \frac{1}{x^2+2x+10},\qquad 2)\ f(x) = \frac{2}{x^2+2x+5}.$$

10. Нехай $f(x)$ – неперервно диференційовна функція і $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f^{(k)}(x)|dx < +\infty$, $k=0,1,2,\ldots$, і $f(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$. Знайти зв'язок між перетворенням Фур'є функцій f та f'.

11. Знайти функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, якщо:

$$1)\ \int_0^{+\infty}\varphi(y)\cos xy\,dy = \frac{1}{1+x^2},\qquad 2)\ \int_0^{+\infty}\psi(y)\sin xy\,dy = e^{-x},\ \ x>0.$$

12. Знайти згортку наступних функцій:

$$1)\ f_1(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & \text{якщо } x\ge 0,\ \alpha>0,\\ 0, & \text{якщо } x<0, \end{cases}\qquad f_2(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & \text{якщо } x\ge 0,\ \beta>0,\\ 0, & \text{якщо } x<0, \end{cases}$$

$$2)\ f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{якщо } x<0,\ \ x>1, \end{cases}\qquad f_2(x) = e^{-\alpha x},\quad x\ge 0,\ \ \alpha>0,$$

3) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \sin x, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \operatorname{sh} x, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$

4) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \sin x, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \cos 2x, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$

5) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ e^x, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \sin 3x, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$

6) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \operatorname{sh} x, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \operatorname{ch} x, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$

7) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ e^{4x}, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 1 - e^{4x}, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$

8) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ x^3, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$

9) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \sin^2 x, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$

10) $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \operatorname{sh} 2x, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \cos 3x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$

13. Знайти перетворення Фур'є згортки функцій

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases}$$

14. Знайти обернене перетворення Фур'є для функції

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{(\alpha + i\omega)(\beta + i\omega)}, \;\; \alpha > 0, \;\; \beta > 0.$$

Приклади розв'язування вправ

1.6. Функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 1. Отже, для неї можемо обчислити інтеграл Фур'є. Отримаємо:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-x)\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Big(\int\limits_{-1}^{1}\cos\omega(t-x)dt\Big)d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-x)\Big|_{-1}^{1}\Big)d\omega=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}(\sin\omega(1-x)+\sin\omega(1+x))d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{2\sin\omega\cdot\cos\omega x}{\omega}\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cdot\cos\omega x}{\omega}\,d\omega$$

– інтеграл Ейлера для заданої функції.

З формули $\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega}\,d\omega$ отримаємо

$$\frac{\pi}{2}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin 2\omega}{2\omega}\,d(2\omega).$$

Отже,

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\frac{\pi}{2}. \qquad \blacktriangleright$$

1.8. Зауважимо, що задана функція $f(x)$ на проміжку $(-\infty;\infty)$ є обмеженою і абсолютно інтегровною. Умови Діріхле для $f(x)$ виконуються. Отже, функцію можна зобразити інтегралом Фур'є $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt$.

Обчислимо спочатку внутрішній інтеграл:

$$I(x,\omega)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega(t-x)dt=\int\limits_{-2}^{-1}(-t-2)\cos\omega(t-x)dt+\int\limits_{-1}^{1}t\cos\omega(t-x)dt+$$

$$+\int\limits_1^2(-t+2)\cos\omega(t-x)dt=\begin{vmatrix}U=-t-2, & dV=\cos\omega(t-x)dt\\ dU=-dt, & V=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega(t-x)\end{vmatrix}+$$

$$+\left|\begin{matrix} U=t, & dV=\cos\omega(t-x)dt \\ dU=dt, & V=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega(t-x)\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} U=-t+2, & dV=\cos\omega(t-x)dt \\ dU=-dt, & V=\dfrac{1}{\omega}\sin\omega(t-x)\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{-t-2}{\omega}\sin\omega(t-x)\Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{\omega}\int\limits_{-2}^{-1}\sin\omega(t-x)dt + \frac{t}{\omega}\sin\omega(t-x)\Big|_{-1}^{1} -$$

$$-\frac{1}{\omega}\int\limits_{-1}^{1}\sin\omega(t-x)dt + \frac{-t+2}{\omega}\sin\omega(t-x)\Big|_{1}^{2} + \frac{1}{\omega}\int\limits_{1}^{2}\sin\omega(t-x)dt =$$

$$= \frac{1}{\omega}\sin\omega(1+x) - \frac{1}{\omega^2}\cos\omega(t-x)\Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{\omega}\sin\omega(1-x) - \frac{1}{\omega}\sin\omega(1+x) +$$

$$+\frac{1}{\omega^2}\cos\omega(t-x)\Big|_{-1}^{1} - \frac{1}{\omega}\sin\omega(1-x) - \frac{1}{\omega^2}\cos\omega(t-x)\Big|_{1}^{2} = \frac{1}{\omega^2}(-\cos\omega(1+x)+$$

$$+\cos\omega(2+x) + \cos\omega(1-x) - \cos\omega(1+x) - \cos\omega(2-x) + \cos\omega(1-x)) =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}(\cos\omega(2+x) - \cos\omega(2-x) - 2\cos\omega(1+x) + 2\cos\omega(1-x)) =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}(-2\sin 2\omega\sin\omega x + 2\cdot 2\sin\omega\sin\omega x) = \frac{2}{\omega^2}(2\sin\omega\sin\omega x - \sin 2\omega\sin\omega x) =$$

$$= \frac{2}{\omega^2}(2\sin\omega\sin\omega x - 2\sin\omega\cos\omega\sin\omega x) = \frac{4\sin\omega}{\omega^2}\cdot(1-\cos\omega)\sin\omega x.$$

Отже,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega}{\omega^2}\cdot\sin\omega x\, d\omega.$$

– інтеграл Фур'є для заданої функції. ▶

2.6. Задана функція $f(x)$ є непарною і обмеженою. Крім того $f(x)$ є абсолютно інтегровною на всій дійсній осі і задовольняє умовам Діріхле. Тоді синус-перетворення Фур'є заданої функції обчислюємо за формулою

$$b(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt.$$

Отримаємо:

$$b(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{2} t\sin\omega t\, dt = \left|\begin{matrix} U=t, & dV=\sin\omega t\, dt \\ dU=dt, & V=-\dfrac{1}{\omega}\cos\omega t\end{matrix}\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(-\frac{1}{\omega}\,t\cos\omega t\Big|_0^2 + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^2 \cos\omega t\,dt\Big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(-\frac{2}{\omega}\cos 2\omega + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega t\Big|_0^2\Big) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big(-\frac{2}{\omega}\cos 2\omega + \frac{1}{\omega^2}\sin 2\omega\Big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\sin 2\omega - 2\omega\cos 2\omega}{\omega^2}$$

– синус-перетворення Фур'є заданої функції. ▶

3.8. Функція $f(x) = \dfrac{\sin\beta x}{x}$ є абсолютно інтегровною на проміжку $(0;+\infty)$ (див. приклад 1.6) і задовольняє умови Діріхле. Тоді косинус-перетворення Фур'є обчислюємо за формулою:

$$a(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\beta t}{t}\cos\omega t\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{2t}\,(\sin(\beta+\omega)t + \sin(\beta-\omega)t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\beta+\omega)t}{t}\,dt + \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\beta-\omega)t}{t}\,dt\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,(\beta+\omega) + \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,(\beta-\omega)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big(\mathrm{sgn}\,(\beta+\omega) + \mathrm{sgn}\,(\beta-\omega)\Big) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & \text{якщо } \beta > \omega, \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}, & \text{якщо } \beta = \omega, \\ 0, & \text{якщо } \beta < \omega. \end{cases}$$

Зауважимо, що при знаходженні косинус-перетворення Фур'є заданої функції, ми скористались інтегралом Діріхле, а саме

$$D(\beta) = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}\,\beta. \quad ▶$$

4.6. Для функції $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ виконуються всі умови теореми 1. Тоді за формулою перетворення Фур'є отримаємо:

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+2i\omega x+(i\omega)^2)+\frac{1}{2}(i\omega)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2} dx.$$

Обчислимо тепер інтеграл $I(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2} dx$. Тоді

$$I(\omega) = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} e^{-\frac{1}{2}(x+i\omega)^2} dx = \left| \begin{matrix} z = x + i\omega \\ dx = dz \end{matrix} \right| = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A+i\omega}^{A+i\omega} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Продиференціювавши крайні частини цієї рівності по ω, отримаємо

$$I'(\omega) = \lim_{A\to+\infty} \left(ie^{-\frac{1}{2}(A+i\omega)^2} - ie^{-\frac{1}{2}(-A+i\omega)^2} \right) = 0.$$

Звідси $I(\omega) = c$, де $c = \mathrm{const}$.

Обчислимо $I(0)$. Отримаємо $I(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ і $I(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$. Перемножимо ці рівності. Тоді

$$I^2(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

Переходячи в останньому інтегралі до полярних координат, отримаємо

$$I^2(0) = \left| \begin{matrix} x = r\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi, & 0 \le r < +\infty \end{matrix} \right| = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{+\infty} re^{-\frac{r^2}{2}} dr =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} d(r^2) = 2\pi\Big(- e^{-\frac{r^2}{2}}\Big)\Big|_0^{+\infty} = 2\pi.$$

Отже, $I(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Повертаючись до перетворення Фур'є початкової функції, отримаємо

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2}} \cdot \sqrt{2\pi} = e^{-\frac{\omega^2}{2}}. \quad \blacktriangleright$$

7.2. Зауважимо, що функція $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{(x^2+9)^2}$ є похідною функції $\Phi(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$, тобто $\Phi'(x) = f(x)$.

Знайдемо від обидвох частин останньої рівності перетворення Фур'є. Тоді

$$F[f] \equiv \widehat{f}(\omega) = F[\Phi'] = i\omega F[\Phi] \equiv i\omega\widehat{\Phi}(\omega).$$

Для того, щоб знайти перетворення Фур'є функції $\Phi(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$, спочатку знайдемо перетворення Фур'є функції $\dfrac{1}{x^2+9}$.

Оскільки

$$F[e^{-3|x|}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|x|}e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{3x}e^{-i\omega x}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-3x}e^{-i\omega x}dx\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(3-i\omega)x}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(3+i\omega)x}dx\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(-\frac{e^{-(3-i\omega)x}}{3-i\omega}\Big|_0^{+\infty} - \frac{e^{-(3+i\omega)x}}{3+i\omega}\Big|_0^{+\infty}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(-\frac{1}{-3+i\omega} + \frac{1}{3+i\omega}\Big) = \frac{6}{\sqrt{2\pi}(9+\omega^2)},$$

то $F^{-1}\Big[\dfrac{6}{\sqrt{2\pi}(9+\omega^2)}\Big] = F\Big[\dfrac{6}{\sqrt{2\pi}(9+\omega^2)}\Big] = e^{-3|x|}$.

Звідси, помінявши місцями змінні ω та x, отримаємо

$$F\Big[\frac{1}{9+x^2}\Big] = \frac{\sqrt{2\pi}e^{-3|\omega|}}{6}.$$

З властивості 4 можемо записати

$$F\Big[\frac{-ix}{9+x^2}\Big] = F'\Big[\frac{1}{9+x^2}\Big] = \Big(\frac{\sqrt{2\pi}e^{-3|\omega|}}{6}\Big)'_\omega =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{6}\cdot(-3)\operatorname{sgn}\omega\, e^{-3|\omega|} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\operatorname{sgn}\omega\, e^{-3|\omega|}.$$

Звідси

$$F\Big[\frac{x}{9+x^2}\Big] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, i\operatorname{sgn}\omega\, e^{-3|\omega|}.$$

Остаточно отримуємо, що

$$F\Big[\frac{9-x^2}{(9+x^2)^2}\Big] = i\,\omega\operatorname{sgn}\omega\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,ie^{-3|\omega|} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\omega\operatorname{sgn}\omega\, e^{-3|\omega|}. \quad ▶$$

12.9. За означенням згортки двох функцій запишемо:

$$f_1(x)*f_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t)\cdot f_2(t)\,dt = \int\limits_{0}^{x}(x-t)\sin^2 t\,dt = \Big|\sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}\Big| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)(1-\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)\,dt - \frac{x}{2}\int\limits_0^x \cos 2t\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^x t\cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(xt - \frac{t^2}{2}\Big)\Big|_0^x - \frac{1}{4}x\sin 2t\Big|_0^x + \frac{1}{2}\int\limits_0^x t\cos 2t\,dt = \begin{vmatrix} U = t, & dV = \cos 2t\,dt \\ dU = dt, & V = \dfrac{1}{2}\sin 2t \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{4}t\sin 2t\Big|_0^x - \frac{1}{4}\int\limits_0^x \sin 2t\,dt =$$

$$= \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}\cos 2t\Big|_0^x = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}(x^2 - \sin^2 x). \quad \blacktriangleright$$

Індивідуальні завдання до розділу V

1. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію $f(x)$, $(T = 2\pi)$. Побудувати графік суми ряду. Знайти значення суми ряду в заданій точці x_0 :

1) $f(x) = x$, $x \in [0;\pi]$, за синусами кратних дуг, $x_0 = \pi$,

2) $f(x) = x$, $x \in [0;\pi]$, за косинусами кратних дуг, $x_0 = 0$,

3) $f(x) = x$, $x \in [0;2\pi]$, $x_0 = 2\pi$,

4) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ 1, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases}$ $x_0 = 0$,

5) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ -1, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases}$ $x_0 = 0$,

6) $f(x) = -x$, $x \in [0;\pi]$, за косинусами кратних дуг, $x_0 = \pi$,

7) $f(x) = -x$, $x \in [0;\pi]$, за синусами кратних дуг, $x_0 = \pi$,

8) $f(x) = -x$, $x \in [0;2\pi]$, $x_0 = 2\pi$,

9) $f(x) = \pi - x$, $x \in [0;\pi]$, $x_0 = \pi$,

10) $f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ \pi - x, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases}$ $x_0 = \pi$,

11) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ -1, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases}$ $x_0 = 0$,

12) $f(x) = \pi - x$, $x \in [0;\pi]$, за косинусами кратних дуг, $x_0 = \pi$,

13) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases} \quad x_0 = \pi,$

14) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ x, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases} \quad x_0 = \pi,$

15) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ 1, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases} \quad x_0 = 0,$

16) $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ \pi, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases} \quad x_0 = \pi,$

17) $f(x) = \begin{cases} \pi + x, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ 1, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases} \quad x_0 = 0,$

18) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases} \quad x_0 = \pi,$

19) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ 1, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases} \quad x_0 = 0,$

20) $f(x) = 2\pi - x$, $x \in [0;2\pi]$, $x_0 = 0$,

21) $f(x) = \pi - \dfrac{x}{2}$, $x \in [0;2\pi]$, $x_0 = 0$,

22) $f(x) = -\pi + x$, $x \in [0;\pi]$, за синусами кратних дуг, $x_0 = 0$,

23) $f(x) = -\pi + x$, $x \in [0;\pi]$, за косинусами кратних дуг, $x_0 = 0$,

24) $f(x) = -2\pi + x$, $x \in [0;2\pi]$, $x_0 = 0$,

25) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ -\pi + x, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases} \quad x_0 = 0,$

26) $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [-\pi;0), \\ -\pi + x, & \text{якщо } x \in [0;\pi], \end{cases} \quad x_0 = \pi,$

$$27)\ f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & \text{якщо } x \in [-\pi; 0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0; \pi], \end{cases} \qquad x_0 = \pi,$$

$$28)\ f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & \text{якщо } x \in [-\pi; 0), \\ 1, & \text{якщо } x \in [0; \pi], \end{cases} \qquad x_0 = 0,$$

$$29)\ f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & \text{якщо } x \in [-\pi; 0), \\ \pi, & \text{якщо } x \in [0; \pi], \end{cases} \qquad x_0 = 0,$$

$$30)\ f(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \in [-\pi; 0), \\ -\pi + x, & \text{якщо } x \in [0; \pi], \end{cases} \qquad x_0 = 0.$$

2. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x)$ на заданому інтервалі. Побудувати графік цієї функції, а також графік її періодичного продовження.

1) $f(x) = 4 - x$, $x \in (2; 6)$, $T = 2l = 4$,

2) $f(x) = x + 2\pi$, $x \in (-3\pi; -2\pi)$, $T = 2l = \pi$, за косинусами кратних дуг,

3) $f(x) = 1$, $x \in (2; 3)$, $T = 2l = 1$, за синусами кратних дуг,

4) $f(x) = x - 4\pi$, $x \in (4\pi; 5\pi)$, $T = 2l = \pi$, за синусами кратних дуг,

5) $f(x) = x + 2\pi$, $x \in (-3\pi; -2\pi)$, $T = 2l = \pi$, за синусами кратних дуг,

6) $f(x) = -1$, $x \in (-2; -1)$, $T = 2l = 1$, за синусами кратних дуг,

7) $f(x) = 2\pi - x$, $x \in (\pi; 2\pi)$, $T = 2l = \pi$,

8) $f(x) = x - 2$, $x \in (2; 4)$, $T = 2l = 2$,

9) $f(x) = 4 - x$, $x \in (3; 4)$, $T = 2l = 1$,

10) $f(x) = x + 1$, $x \in (-2; -1)$, $T = 2l = 1$,

11) $f(x) = x - 3$, $x \in (2; 4)$, $T = 2l = 2$, за синусами кратних дуг,

12) $f(x) = x - 3\pi$, $x \in (2\pi; 4\pi)$, $T = 2l = 2\pi$,

13) $f(x) = 4\pi - x$, $x \in (3\pi; 4\pi)$, $T = 2l = \pi$,

14) $f(x) = 3 - x$, $x \in (2; 3)$, $T = 2l = 1$, за косинусами кратних дуг,

15) $f(x) = x - 2$, $x \in (0; 2)$, $T = 2l = 2$,

16) $f(x) = x - 3\pi$, $x \in (0; 3\pi)$, $T = 2l = 3\pi$, за синусами кратних дуг,

17) $f(x) = -x$, $x \in (-2\pi; 0)$, $T = 2l = 2\pi$,

18) $f(x) = 6\pi - x$, $x \in (5\pi; 6\pi)$, $T = 2l = \pi$,

19) $f(x) = x - 4\pi$, $x \in (4\pi; 5\pi)$, $T = 2l = \pi$, за косинусами кратних дуг,

20) $f(x) = -x - \pi$, $x \in (-2\pi; -\pi)$, $T = 2l = \pi$,

21) $f(x) = x + 2\pi$, $x \in (-3\pi; -2\pi)$, $T = 2l = \pi$,

22) $f(x) = -x - 1$, $x \in (-2; -1)$, $T = 2l = 1$, за косинусами кратних дуг,

23) $f(x) = x + 2$, $x \in (-3; -2)$, $T = 2l = 1$,

24) $f(x) = x - 2$, $x \in (2; 4)$, $T = 2l = 2$,

25) $f(x) = 3 - x$, $x \in (2; 4)$, $T = 2l = 2$,

26) $f(x) = -x - \pi$, $x \in (-2\pi; -\pi)$, $T = 2l = \pi$,

27) $f(x) = 6 - x$, $x \in (5; 6)$, $T = 2l = 1$,

28) $f(x) = 5 - x$, $x \in (4; 6)$, $T = 2l = 2$,

29) $f(x) = x - 4$, $x \in (3; 5)$, $T = 2l = 2$,

30) $f(x) = x - 3$, $x \in (2; 3)$, $T = 2l = 1$, за косинусами кратних дуг.

Приклади розв'язування вправ до розділу V

1. Розвинути в ряд Фур'є задану функцію $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [-\pi; 0), \\ \pi - x, & \text{якщо } x \in [0; \pi], \end{cases}$ $(T = 2\pi)$. Побудувати графік суми ряду. Знайти значення суми ряду в заданій точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ задовольняє умови Діріхле: 1) рівномірно обмежена, бо $|f(x)| \le \pi$ при $x \in [-\pi; \pi]$; 2) має скінченне число точок розриву I роду, а саме розрив типу стрибка у точці $x_0 = 0$, бо $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \pi$; 3) має не більше ніж скінченне число точок екстремуму, а саме, максимум в точці $x = 0$ і мінімум у точці $x = \pi$. Тому у всіх точках інтервалу $(-\pi; \pi)$, де вона неперервна, допускає розвинення в тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Знайдемо коефіцієнти ряду:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{0} 1 \cdot dx + \int\limits_{0}^{\pi} (\pi - x)dx \Big) = \frac{1}{\pi}\Big(x\Big|_{-\pi}^{0} + \Big(\pi x - \frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{0}^{\pi} \Big) = 1 + \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{0} \cos nx dx + \int\limits_{0}^{\pi} (\pi - x) \cos nx dx \Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + (\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} + \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \Big) = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1 - \cos \pi n}{\pi n^2} = \frac{(-1)^{n+1} + 1}{\pi n^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_{-\pi}^{0}\sin nxdx + \int\limits_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin nxdx\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + (\pi - x)\frac{(-\cos nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi} - \int\limits_{0}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{-1+\cos\pi n}{n} + \frac{\pi}{n} - \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\Big) = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n} + \frac{1}{n}.$$

Отже,

$$f(x) = \frac{2+\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}\cos nx + \Big(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n} + \frac{1}{n}\Big)\sin nx\Big).$$

Ця рівність має місце у всіх точках інтервалу $(-\pi;\pi)$, крім точок розриву та його кінців. В точці розриву сума ряду дорівнює середньому арифметичному границь функції справа і зліва, тобто $S(0) = \frac{1+\pi}{2}$. На кінцях інтервалу $S(\pi) = S(-\pi) = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \frac{1}{2}$.

Графік суми ряду буде складатися із нескінченної множини окремих точок з ординатою $\frac{1}{2}$ і абсцисою πn, $n \in Z \setminus \{0\}$ точок $\Big(2\pi n; \frac{\pi+1}{2}\Big), n \in Z$ та графіків функцій $y = 1, x \in (-\pi;0)$ та $y = \pi - x, x \in (0;\pi)$ над якими здійснюється паралельне перенесення вздовж осі Ox на $2\pi n, n \in Z \setminus \{0\}$.

2. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = -x - \pi$ на заданому інтервалі $x \in (-2\pi; -\pi)$. Побудувати графік цієї функції, а також графік її періодичного продовження при $T = 2l = \pi$.

Розв'язання. Маємо випадок довільного проміжку $(a; b)$, довжина якого $2l = \pi$. Продовжимо нашу функцію періодичним чином з періодом $T = \pi$ на всю дійсну вісь і розглянемо, наприклад, проміжок $(0; \pi)$. Нова функція, періодична з періодом $T = \pi$, на цьому проміжку матиме вигляд

$$f_1(x) = -x + \pi.$$

Розвинемо її в ряд Фур'є, коефіцієнти якого будемо шукати за формулами

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f_1(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, n = 1, 2, ...$$

Обчислимо коефіцієнти:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi - x)dx = \frac{2}{\pi}\Big(-\frac{x^2}{2} + \pi x\Big)\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f_1(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\Big(\int\limits_0^{\pi}(\pi - x)\cos\frac{\pi n x}{\frac{\pi}{2}}dx\Big) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big((\pi - x)\frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi}\frac{\sin 2nx}{2n}dx\Big) = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos 2nx}{(2n)^2}\Big|_0^{\pi} = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin 2nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(\pi - x)\sin 2nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big((\pi - x)\frac{(-\cos 2nx)}{2n}\Big|_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi}\frac{\cos 2nx}{2n}dx\Big) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2n} - \frac{\sin 2nx}{(2n)^2}\Big|_0^{\pi}\Big) = \frac{1}{n}.$$

Отже,

$$f_1(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin 2nx, S(0) = S(\pi) = \frac{f(+0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Сума цього ряду у всіх точках неперервності $f(x)$ при $x \in (-2\pi; -\pi)$ співпадає із значеннями функції. Таким чином

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin 2nx, x \in (-2\pi; -\pi).$$

Рекомендована література

1. *Виноградова И.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 416 с.

2. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.

3. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ / А.Я. Дороговцев. – К.: Либідь, 1993. – Ч.1. – 320 с.

4. *Дюженкова Л.І.* Математичний аналіз у задачах і прикладах: Навчальний посібник / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2002. – Ч.1. – 462 с.

5. *Заболоцький М.В.* Математичний аналіз: Підручник / М.В. Заболоцький, О.Г. Сторож, С.І. Тарасюк. – К.: Знання, 2008. – 421 с.

6. *Ляшко И.И.* Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента / И.И. Ляшко, А.К. Боярчук, Я.Г. Гай, Г.П. Головач. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 224 с.

7. *Никольський С.М.* Курс математического анализа / С.М. Никольський. – М.: Наука, 1983. – Т.1. – 461 с.

8. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Лань, 2005. – Ч.2. – 464 с.

9. *Шкіль М.І.* Математичний аналіз: Підручник / М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2005. – Ч.2. – 510 с.

10. *Томусяк А.А.* Практикум з математичного аналізу: Інтегральне числення. Ряди: Навч. посібник / А.А. Томусяк, Н.М. Шунда. – К.: Вища школа, 1995. – 541 с.