Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
“Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника”
Національний університет
“Львівська політехніка”

Методичні рекомендації до написання розрахункової роботи з дисципліни “Математичний аналіз” для студентів денної та заочної форми навчання математичних та технічних спеціальностей

Івано-Франківськ

2020

УДК 517.1:517.2
ББК 22.161я73
М 69

Рекомендовано Вченою радою факультету математики та інформатики ДВНЗ "Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника" як методичні рекомендації для студентів математичних та технічних спеціальностей (протокол № 4 від 30 листопада 2020 р.).

Рецензенти:

Мойсишин В.М., доктор технічних наук, професор (Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу),

Каленюк П.І., доктор фізико-математичних наук, професор (Національний університет "Львівська політехніка").

М69 Методичні рекомендації до написання розрахункової роботи з дисципліни "Математичний аналіз" для студентів денної та заочної форми навчання математичних та технічних спеціальностей / Я.О. Баранецький, М.І. Копач, В.В. Кравців, М.В. Марцінків, А.В. Соломко. – Івано-Франківськ : Сімик, 2020. – 70 с.

У методичних рекомендаціях виписані завдання для виконання розрахункових робіт, а також зразки розв'язування прикладів з частини курсу математичного аналізу, яка стосується криволінійних, кратних, поверхневих інтегралів та елементів теорії поля.

Для студентів математичних та технічних спеціальностей, які вивчають курс "математичний аналіз II".

УДК 517.1:517.2
ББК 22.161я73

Зміст

Передмова

Методичні рекомендації укладено на підставі досвіду викладання курсу математичного аналізу та вищої математики для студентів фізико-математичних та технічних спеціальностей.

Матеріал рекомендацій охоплює поняття криволінійних інтегралів першого і другого роду та методів їх розв'язування, властивості та застосування кратних інтегралів, властивості та застосування поверхневих інтегралів, а також застосування основних інтегральних формул та елементів теорії поля.

Викладений матеріал структурно поділений на підрозділи, в яких подані 25 варіантів індивідуальних прикладів по кожному завданню, а також наведені зразки розв'язування завдань. Така схема поданого матеріалу особливо зручна для читання дисципліни для студентів заочної форми навчання, враховуючи обмежену кількість годин аудиторних занять.

Слід зазначити, що для досконалого вивчення матеріалу перед тим, як починати розв'язувати вправи, необхідно добре засвоїти теоретичний матеріал з кожної теми. Для цього радимо студентам опрацювати літературу, подану вкінці методичних рекомендацій (див. [1]-[9]). Після цього, проаналізувавши зразки розв'язування завдань, можна виконувати індивідуальні вправи.

Індивідуальні завдання до розділу I

1. Обчислити криволінійний інтеграл від точки A до точки B вздовж прямої (L), що їх з'єднує:

1) $\int\limits_{(L)} xydl,\ A(-1;-1),\ B(1;1);$

2) $\int\limits_{(L)} x\sqrt{y}dl,\ A(0;0),\ B(4;2);$

3) $\int\limits_{(L)} xy^2dl,\ A(0;1),\ B(2;2);$

4) $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{2x-y},\ A(0;-2),\ B(4;0);$

5) $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}},\ A(1;2),\ B(2;4);$

6) $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+4}},\ A(0;0),\ B(1;2);$

7) $\int\limits_{(L)} (x^2-y)dl,\ A(0;0),\ B(1;2);$

8) $\int\limits_{(L)} \frac{x}{x+y}dl,\ A(2;-4),\ B(0;-3);$

9) $\int\limits_{(L)} (x^2+y^2)dl,\ A(3;2),\ B(4;4);$

10) $\int\limits_{(L)} y^2dl,\ A(-1;3),\ B(-2;4);$

11) $\int\limits_{(L)} \frac{x}{x-y}dl,\ A(2;-1),\ B(4;0);$

12) $\int\limits_{(L)} \frac{1}{\sqrt{y}}dl,\ A(1;1),\ B(3;2);$

13) $\int\limits_{(L)} \frac{2x}{3x+y}dl,\ A(2;-4),\ B(0;-3);$

14) $\int\limits_{(L)} (x-y^2)dl,\ A(0;0),\ B(4;3);$

15) $\int\limits_{(L)} \sqrt{y}dl,\ A(2;0),\ B(4;2);$

16) $\int\limits_{(L)} \frac{dl}{\sqrt{x-y}},\ A(0;-2),\ B(4;0);$

17) $\int\limits_{(L)} (x+y)dl,\ A(0;1),\ B(2;3);$

18) $\int\limits_{(L)} (\sqrt{x}+\sqrt{y})dl,\ A(1;1),\ B(2;0);$

19) $\int\limits_{(L)} \dfrac{dl}{x+y^2},\ A(1;-3),\ B(1;-1);$

20) $\int\limits_{(L)} \sqrt{x+y}dl,\ A(2;4),\ B(0;1);$

21) $\int\limits_{(L)} \dfrac{y}{\sqrt{x}}dl,\ A(2;3),\ B(8;1);$

22) $\int\limits_{(L)} (x^2-y^2)dl,\ A(2;0),\ B(4;2);$

23) $\int\limits_{(L)} \dfrac{dl}{\sqrt{x+y}},\ A(1;0),\ B(4;3);$

24) $\int\limits_{(L)} (x-y)dl,\ A(0;0),\ B(4;3);$

25) $\int\limits_{(L)} \sqrt{x-y}dl,\ A(0;-1),\ B(2;-5).$

2. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж дуги (L) :

1) $\int\limits_{(L)} (2z-\sqrt{x^2+y^2})dl$, де (L) – дуга кривої $x=\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;

2) $\int\limits_{(L)} (x^2+y^2)^4 dl$, де (L) – коло $x^2+y^2=a^2$;

3) $\int\limits_{(L)} \dfrac{dl}{x-z}$, де (L) – відрізок прямої $z=\dfrac{1}{x}-2$, що з'єднує точки $A(0;-2)$ та $B(4;0)$;

4) $\int\limits_{(L)} (x-y)dl$, де (L) – коло $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{a^2}{4}$;

5) $\int\limits_{(L)} \sqrt{y^2+x^2}dl$, де (L) – коло $y^2+x^2=ay$, $(a>0)$;

6) $\int\limits_{(L)} xdl$, де (L) – дуга параболи $y=x^2$ від точки $A(2;4)$ до точки $B(1;1)$;

7) $\int\limits_{(L)} xydl$, де (L) – чверть еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, що міститься в першому квадранті;

8) $\int\limits_{(L)} x^2dl$, де (L) – верхня половина кола $x^2+y^2=a^2$ між точками $A(a;0)$ та $B(-a;0)$;

9) $\int\limits_{(L)} (x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{4}{3}})dl$, де (L) – дуга астроїди $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;

10) $\int\limits_{(L)} (\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})dl$, де (L) – дуга астроїди $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$;

11) $\int\limits_{(L)}(x+y)dl$, де (L) – контур трикутника з вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$;

12) $\int\limits_{(L)}\sqrt{x^2+y^2}dl$, де (L) – дуга параметрично заданої кривої $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

13) $\int\limits_{(L)}|y|dl$, де (L) – дуга лемніскати $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

14) $\int\limits_{(L)}(x^2+y^2+z^2)dl$, де (L) – дуга кривої $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

15) $\int\limits_{(L)}xyzdl$, де (L) – чверть кола $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=\dfrac{R^2}{4}$, що лежить в першому октанті;

16) $\int\limits_{(L)}x\sqrt{x^2-y^2}dl$, де (L) – половина лемніскати $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $x\geqslant 0$;

17) $\int\limits_{(L)}(x+y)dl$, де (L) – чверть кола $x^2+y^2+z^2=R^2$, $y=x$, що лежить в першому октанті;

18) $\int\limits_{(L)}\dfrac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де (L) – дуга кривої $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$;

19) $\int\limits_{(L)}xydl$, де (L) – контур прямокутника з вершинами $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$, $C(0;2)$;

20) $\int\limits_{(L)}ydl$, де (L) – дуга параболи $y^2=2px$, що відтинається параболою $x^2=2py$;

21) $\int\limits_{(L)}(x+y)dl$, де (L) – права пелюстка лемніскати $r^2=a^2\cos 2\varphi$;

22) $\int\limits_{(L)}\sqrt{2y^2+z^2}dl$, де (L) – коло $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x=y$;

23) $\int\limits_{(L)} (x+y)dl$, де (L) – дуга кривої $x = t,\ y = \dfrac{3t^2}{\sqrt{2}},\ z = t^3,\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$;

24) $\int\limits_{(L)} \sqrt{x^2+y^2}dl$, де (L) – коло $x^2 + y^2 = ax$;

25) $\int\limits_{(L)} y^2 dl$, де (L) – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж дуги (L) :

1) $\int\limits_{(L)} \dfrac{y^2+1}{y}dx - \dfrac{x}{y^2}dy$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(1;2)$ до точки $B(2;4)$;

2) $\int\limits_{(L)} (x+y)dx - xdy$, де (L) – крива $y = x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$;

3) $\int\limits_{(L)} ydx + zdy + xdz$, де (L) – крива $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

4) $\int\limits_{(L)} (x+y)dx - (x-y)dy$, де (L) – ламана OAB, де $O(0;0),\ A(2;0),\ B(4;5)$;

5) $\int\limits_{(L)} (x^2-y)dx - (x-y^2)dy$, де (L) – крива $x = 5\cos t,\ y = 5\sin t$ від точки $A(5;0)$ до точки $B(0;5)$;

6) $\int\limits_{(L)} (2a-y)dx - (a-y)dy$, де (L) – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$;

7) $\int\limits_{(L)} \dfrac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, де (L) – крива $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

8) $\int\limits_{(L)} (x^2+y)dx - (y^2+x)dy$, де (L) – ламана ABC, де $A(1;2),\ B(1;5)$, $C(3;5)$;

9) $\int\limits_{(L)} ydx + xdy$, де (L) – крива $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$;

10) $\int\limits_{(L)} (x^2+y^2)dx-(x^2-y^2)dy$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(0;2)$ до точки $B(2;0)$;

11) $\int\limits_{(L)} xdx-ydy+(x+y-1)dz$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(1;1;1)$ до точки $B(2;3;4)$;

12) $\int\limits_{(L)} (x^2-y^2)dx$, де (L) – крива $y=x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;4)$;

13) $\int\limits_{(L)} \frac{x}{y}dx+xdy$, де (L) – крива $y=\ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$;

14) $\int\limits_{(L)} (x^2+y^2)dy$, де (L) – контур чотирикутника $ABCD$, де $A(0;0)$, $B(2;0)$, $C(4;4)$, $D(0;4)$;

15) $\int\limits_{(L)} (x^2y-3x)dx+(y^2x+2y)dy$, де (L) – крива $x=\sqrt[3]{3}\cos t$, $y=2\sin t$ від точки $A(\sqrt[3]{3};0)$ до точки $B(\sqrt[3]{-3};0)$;

16) $\int\limits_{(L)} (xy-x^2)dx+xdy$, де (L) – крива $y=2x^2$ від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;2)$;

17) $\int\limits_{(L)} (x^2-2x)dx+(y^2-2xy)dy$, де (L) – крива $y=x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1;1)$;

18) $\int\limits_{(L)} ydx+\frac{x}{y}dy$, де (L) – крива $y=e^{-x}$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(-1;e)$;

19) $\int\limits_{(L)} \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$, де (L) – контур трикутника ABC, де $A(1;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$;

20) $\int\limits_{(L)} \frac{y}{2x}dx-xdy$, де (L) – крива $y=\ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e^2;2)$;

21) $\int\limits_{(L)} \sin y dx + \sin x dy$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(0;\pi)$ до точки $B(\pi;0)$;

22) $\int\limits_{(L)} (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, де (L) – крива $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,$ $0 \leqslant t \leqslant 1$;

23) $\int\limits_{(L)} -x\cos y dx + y \sin x dy$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(\pi;2\pi)$;

24) $\int\limits_{(L)} x\cos y dx - y\sin x dy$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(0;0)$ до точки $B(3;6)$;

25) $\int\limits_{(L)} xdy$, де (L) – контур трикутника, утвореного осями координат і прямою $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$.

4. Обчислити роботу силового поля $\vec{F}$ з переміщенням матеріальної точки вздовж лінії (L) від точки A до точки B :

1) $\vec{F} = xe^y\vec{i} + xy\vec{j}$, де (L) – крива $y = x^2,\ A(0;0),\ B(1;1)$;

2) $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(-2;0)$ до точки $B(0;1)$;

3) $\vec{F} = y\vec{i} + (y - x)\vec{j}$, де (L) – крива $y = a - \dfrac{x^2}{a},\ A(-a;0),\ B(0;a)$;

4) $\vec{F} = y\vec{i} + \ln x\vec{j}$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(2;0)$ до точки $B(3;1)$;

5) $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + y^2\vec{j}$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$;

6) $\vec{F} = (x^2 + 2xy)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$, де (L) – крива $y = x^2,\ A(0;0),\ B(1;1)$;

7) $\vec{F} = x^2y\vec{i} - xy^2\vec{j}$, де (L) – крива $x^2 + y^2 = 4,\ A(2;0),\ B(0;2)$;

8) $\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(-4;0)$ до точки $B(0;2)$;

9) $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + \vec{j}$, де (L) – крива $x^2 + y^2 = 4,\ A(2;0),\ B(-2;0)$;

10) $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(2;3;4)$ до точки $B(3;4;5)$;

11) $\vec{F} = (xy - x)\vec{i} + \dfrac{x^2}{2}\vec{j}$, де (L) – крива $y = 2\sqrt{x}$, $A(0;0)$, $B(1;2)$;

12) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, де (L) – крива $y = x^2$, $A(-1;1)$, $B(1;1)$;

13) $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$, де (L) – крива $x^2 + y^2 = 1$, $A(1;0)$, $B(-1;0)$;

14) $\vec{F} = (x^2 - 2xy)\vec{i} + (y^2 - 2xy)\vec{j}$, де (L) – крива $y = x^2$, $A(-1;1)$, $B(1;1)$;

15) $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$, де (L) – крива $y = 2 - \dfrac{x^2}{8}$, $A(-4;0)$, $B(0;2)$;

16) $\vec{F} = xy\vec{i} + (1 - y)\vec{j}$, де (L) – крива $y = \cos x$, $A(0;1)$, $B(\frac{\pi}{2};0)$;

17) $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$, де (L) – крива $x^2 + y^2 = 9$, $A(3;0)$, $B(0;3)$;

18) $\vec{F} = xy\vec{i}$, де (L) – крива $y = \sin x$, $A(\pi;0)$, $B(0;0)$;

19) $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x\vec{j}$, де (L) – крива $x^2 + y^2 = 1$, $A(1;0)$, $B(0;1)$;

20) $\vec{F} = -x\vec{i} + y\vec{j}$, де (L) – крива $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$, $A(1;0)$, $B(0;3)$;

21) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + 2x\vec{j}$, де (L) – крива $x^2 + y^2 = 4$, $A(2;0)$, $B(-2;0)$;

22) $\vec{F} = (x^2 - 2y)\vec{i} + (y^2 - 2x)\vec{j}$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(-4;0)$ до точки $B(0;2)$;

23) $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (1 - y)\vec{j}$, де (L) – крива $y = \sin x$, $A(0;0)$, $B(\frac{\pi}{2};1)$;

24) $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$, де (L) – крива $y = x^3$, $A(0;0)$, $B(2;8)$;

25) $\vec{F} = x^2y\vec{i} + y\vec{j}$, де (L) – відрізок прямої від точки $A(-1;0)$ до точки $B(0;1)$.

Зразки розв'язування індивідуальних завдань до розділу I

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} (x-y)dl$ вздовж прямої (L), що з'єднує точки $A(0;-1),\ B(2;-5)$.

Розв'язання. Для обчислення криволінійного інтеграла I-го роду скористаємося, наприклад, формулою, коли крива задана в параметричній формі $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$.

$$\int\limits_{(L)} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Рівняння прямої (AB) знаходимо із співвідношення:

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-(-1)}{-5-(-1)} = t.$$

Звідси $x = 2t, y = -4t - 1$. Точці A відповідає значення параметра $t = 0$, а точці B значення параметра $t = 1$. Отже,

$$\int\limits_{(L)} x - ydl = \int\limits_{0}^{1} (2t + 4t + 1)\sqrt{2^2 + (-4)^2}dt = \sqrt{20}\int\limits_{0}^{1} (6t+1)dt =$$

$$= \sqrt{20}\Big(\frac{6t^2}{2} + t\Big)\Big|_0^1 = 4\sqrt{20} = 8\sqrt{5}. \quad \triangleright$$

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} y^2 dl$ вздовж кривої (L), де (L) – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$.

Розв'язання. Знайдемо межі зміни параметра, тобто такі два послідовні значення t, при яких $y = 0$. Це $t = 0$ та $t = 2\pi$. Використовуючи формулу для обчислення криволінійного інтеграла I-го роду, коли крива задана в параметричній формі, маємо

$$\int\limits_{(L)} y^2 dl = \int\limits_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2(\sin t)^2}dt =$$

$$= \sqrt{2}a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{1-\cos t}dt = \sqrt{2}a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^2\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}dt =$$

$$= 8a^3\int\limits_0^{2\pi}\sin^5\frac{t}{2}dt = -16a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)^2 d\left(\cos^2\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -16a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos^2\frac{t}{2}+\cos^4\frac{t}{2}\right)d\left(\cos^2\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -16a^3\left(1-\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}+\frac{1}{5}\cos^5\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = -16a^3\left(-1-1+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right) = \frac{256}{15}a^3. \triangleright$$

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} xdy$ вздовж дуги (L), де (L) – контур трикутника, утвореного осями координат і прямою $\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = 1$.

Розв'язання. Маємо криволінійний інтеграл II-го роду вздовж контура трикутника AOB, де $O(0;0)$, $A(0;3)$, $B(2;0)$. За властивістю криволінійного інтеграла II-го роду

$$\int\limits_{(AOBA)} xdy = \int\limits_{(AO)} xdy + \int\limits_{(OB)} xdy + \int\limits_{(BA)} xdy.$$

Зауважимо, що в нашому випадку контур замкнений, то вибираємо його додатню орієнтацію відносно області, яку він обмежує. Врахуємо також, що $\int\limits_{(L)} P(x,y)dx = 0$ вздовж прямої (L), яка перпендикулярна до осі Ox, аналогічно $\int\limits_{(L)} Q(x,y)dy = 0$ вздовж прямої (L), яка перпендикулярна до осі Oy.

Рівняння прямої (BA) має вигляд $y = 3 \cdot \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$, де змінна x змінюється від 2 до 0.

Отже, використовуючи формулу для обчислення криволінійного інтеграла II-го роду, коли крива задана у явному вигляді, маємо

$$\int\limits_{(AOBA)} xdy = \int\limits_{(BA)} xdy = \int\limits_{2}^{0} x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)dx = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_2^0 = 3. \quad \triangleright$$

4. Обчислити роботу силового поля $\vec{F} = x^2y\vec{i} + y\vec{j}$ з переміщення матеріальної точки вздовж лінії (L), де (L) – відрізок прямої від точки $A(-1;0)$ до точки $B(0;1)$.

Розв'язання. Щоб знайти роботу сили $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ з переміщення матеріальної точки вздовж кривої (L) від точки A до точки B, скористаємось формулою

$$A = \int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Задамо рівняння прямої, що проходить через точки A та B, наприклад, у явному вигляді $\dfrac{y}{1} = \dfrac{x+1}{1}$, звідси $y = x + 1$.

Використаємо формулу для обчислення криволінійного інтеграла II-го роду, коли крива задана у явному вигляді $y = y(x), x \in [a;b]$:

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x))dx.$$

Отже,

$$\int\limits_{(AB)} x^2ydx + ydy = \int\limits_{-1}^{0} (x^2(x+1) + (x+1)\cdot 1)dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (x^3 + x^2 + x + 1)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-1}^{0} = \frac{7}{12}. \quad \triangleright$$

Індивідуальні завдання до розділу II

1. Змінити порядок інтегрування в повторних інтегралах:

1) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)dx;$

2) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx;$

3) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx;$

4) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx;$

5) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f(x,y)dy;$

6) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int\limits_{0}^{\arcsin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} dy \int\limits_{0}^{\arccos y} f(x,y)dx;$

7) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2+y}} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{-y}} f(x,y)dx;$

8) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{-1}^{-\ln y} f(x,y)dx;$

9) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y)dy;$

10) $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy;$

11) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x^2}^{1} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)dy;$

12) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{-\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)dx;$

13) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dy \int\limits_{0}^{\sin y} f(x,y)dx + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int\limits_{0}^{\cos y} f(x,y)dx;$

14) $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-(2+x)}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{\sqrt[3]{x}}^{0} f(x,y)dy;$

15) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{e} dy \int\limits_{\ln y}^{1} f(x,y)dx;$

16) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx;$

17) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx;$

18) $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{y^3} f(x,y)dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-y} f(x,y)dx;$

19) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy;$

20) $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-(2+y)}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{0} f(x,y)dx;$

21) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx + \int\limits_1^e dy \int\limits_{\ln y}^1 f(x,y)dx;$

22) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy;$

23) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{\cos x} f(x,y)dy;$

24) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_y^0 f(x,y)dx;$

25) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^3} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy.$

2. Обчислити подвійні інтеграли по області (D), обмеженій кривими:

1) $\iint\limits_{(D)} (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy;\ (D): x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x};$

2) $\iint\limits_{(D)} (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy;\ (D): x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^2;$

3) $\iint\limits_{(D)} (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy;\ (D): x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^3;$

4) $\iint\limits_{(D)} (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;\ (D): x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x};$

5) $\iint\limits_{(D)} (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy;\ (D): x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x};$

6) $\iint\limits_{(D)} (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;\ (D): x = 1,\ y = \sqrt[3]{x},\ y = -x^2;$

7) $\iint\limits_{(D)} (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy;\ (D): x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x};$

8) $\iint\limits_{(D)} (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy;\ (D): x = 1,\ y = \sqrt{x},\ y = -x^3;$

9) $\iint\limits_{(D)} (4xy + 3x^2y^2)dxdy;\ (D): x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x};$

10) $\iint\limits_{(D)}(12xy+9x^2y^2)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2;$

11) $\iint\limits_{(D)}(8xy+9x^2y^2)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3;$

12) $\iint\limits_{(D)}(24xy+18x^2y^2)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x};$

13) $\iint\limits_{(D)}(12xy+27x^2y^2)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x};$

14) $\iint\limits_{(D)}(8xy+18x^2y^2)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2;$

15) $\iint\limits_{(D)}\left(\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x};$

16) $\iint\limits_{(D)}\left(\frac{4}{5}xy+9x^2y^2\right)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3;$

17) $\iint\limits_{(D)}(24xy-48x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x};$

18) $\iint\limits_{(D)}(6xy+24x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2;$

19) $\iint\limits_{(D)}(4xy+16x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3;$

20) $\iint\limits_{(D)}(4xy+16x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x};$

21) $\iint\limits_{(D)}(44xy+16x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x};$

22) $\iint\limits_{(D)}(4xy+17x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2;$

23) $\iint\limits_{(D)}(xy-4x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x};$

24) $\iint\limits_{(D)}(4xy+17x^3y^3)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3;$

25) $\iint\limits_{(D)} \left(6x^2y^2 + \dfrac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy;\ (D):\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

3. Обчислити подвійні інтеграли по області (D), обмеженій кривими:

1) $\iint\limits_{(D)} ye^{\frac{xy}{2}}dxdy;\ (D):\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=2,\ x=4;$

2) $\iint\limits_{(D)} y^2\sin\dfrac{xy}{2}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\dfrac{x}{2};$

3) $\iint\limits_{(D)} y\cos xydxdy;\ (D):\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=1,\ x=2;$

4) $\iint\limits_{(D)} y^2e^{-\frac{xy}{4}}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=2,\ y=x;$

5) $\iint\limits_{(D)} y\sin xydxdy;\ (D):\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=1,\ x=2;$

6) $\iint\limits_{(D)} y^2\cos\dfrac{xy}{2}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\ y=\dfrac{x}{2};$

7) $\iint\limits_{(D)} 4ye^{2xy}dxdy;\ (D):\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=1;$

8) $\iint\limits_{(D)} 4y^2\sin xydxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\ y=x;$

9) $\iint\limits_{(D)} y\cos 2xydxdy;\ (D):\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=1;$

10) $\iint\limits_{(D)} y^2e^{-\frac{xy}{8}}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=2,\ y=\dfrac{x}{2};$

11) $\iint\limits_{(D)} 12y\sin 2xydxdy;\ (D):\ y=\dfrac{\pi}{4},\ y=\dfrac{\pi}{2},\ x=2,\ x=3;$

12) $\iint\limits_{(D)} y^2\cos 2dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x;$

13) $\iint\limits_{(D)} ye^{\frac{xy}{4}}dxdy;\ (D):\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=4,\ x=8;$

14) $\iint\limits_{(D)} 4y^2\sin 2xydxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x;$

15) $\iint\limits_{(D)} 12y\cos 2xydxdy;\ (D):\ y=\dfrac{\pi}{4},\ y=\dfrac{\pi}{2},\ x=1,\ x=2;$

16) $\iint\limits_{(D)} y^2e^{-\frac{xy}{2}}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{2},\ y=x;$

17) $\iint\limits_{(D)} y\sin xydxdy;\ (D):\ y=\pi,\ y=2\pi,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=1;$

18) $\iint\limits_{(D)} y^2\cos 2xydxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\ y=\dfrac{x}{2};$

19) $\iint\limits_{(D)} 8ye^{4xy}dxdy;\ (D):\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\dfrac{1}{4},\ x=\dfrac{1}{2};$

20) $\iint\limits_{(D)} 3y^2\cos\dfrac{xy}{2}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{4\pi}{3}},\ y=\dfrac{2x}{3};$

21) $\iint\limits_{(D)} y\cos xydxdy;\ (D):\ y=\pi,\ y=3\pi,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=1;$

22) $\iint\limits_{(D)} y^2e^{-\frac{xy}{2}}dxdy;\ (D):\ x=0,\ y=1,\ y=\dfrac{x}{2};$

23) $\iint\limits_{(D)} y\sin 2xydxdy;\ (D):\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{3\pi}{2},\ x=\dfrac{1}{2},\ x=2;$

24) $\iint\limits_{(D)} y^2\cos xydxdy;\ (D):\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=2x;$

25) $\iint\limits_{(D)} 6ye^{\frac{xy}{3}}dxdy;\ (D):\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=3,\ x=6.$

4. Обчислити потрійні інтеграли по області (V), обмеженій поверхнями:

1) $\iiint\limits_{(V)} 2y^2e^{xy}dxdydz;\ (V):\ x=0,\ y=1,\ y=x,\ z=0,\ z=1;$

2) $\iiint\limits_{(V)} x^2z\sin(xyz)dxdydz;\ (V):\ x=2,\ y=\pi,\ z=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0;$

3) $\iiint\limits_{(V)} y^2\mathrm{ch}\,(2xy)dxdydz;\ (V):\ x=0,\ y=-2,\ y=4x,\ z=0,\ z=2;$

4) $\iiint\limits_{(V)} 8y^2ze^{2xyz}dxdydz$; $(V):\ x=-1,\ y=2,\ z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

5) $\iiint\limits_{(V)} x^2\mathrm{sh}\,(3xy)dxdydz$; $(V):\ x=1,\ y=2x,\ y=0,\ z=0,\ z=36$;

6) $\iiint\limits_{(V)} y^2z\cos(xyz)dxdydz$; $(V):\ x=1,\ y=\pi,\ z=2,\ x=0,\ y=0,$ $z=0$;

7) $\iiint\limits_{(V)} y^2\cos\big(\frac{\pi xy}{4}\big)dxdydz$; $(V):\ x=0,\ y=-1,\ y=\frac{x}{2},\ z=0,\ z=-\pi^2$;

8) $\iiint\limits_{(V)} x^2z\sin\big(\frac{xyz}{4}\big)dxdydz$; $(V):\ x=1,\ y=2\pi,\ z=4,\ x=0,$ $y=0,\ z=0$;

9) $\iiint\limits_{(V)} y^2e^{-xy}dxdydz$; $(V):\ x=0,\ y=-2,\ y=4x,\ z=0,\ z=1$;

10) $\iiint\limits_{(V)} 2y^2ze^{xyz}dxdydz$; $(V):\ x=1,\ y=1,\ z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

11) $\iiint\limits_{(V)} y^2\mathrm{ch}\,(2xy)dxdydz$; $(V):\ x=0,\ y=1,\ y=x,\ z=0,\ z=8$;

12) $\iiint\limits_{(V)} x^2z\,\mathrm{sh}\,(xyz)dxdydz$; $(V):\ x=2,\ y=1,\ z=1,\ x=0,\ y=0,$ $z=0$;

13) $\iiint\limits_{(V)} y^2e^{\frac{xy}{2}}dxdydz$; $(V):\ x=0,\ y=2,\ y=2x,\ z=0,\ z=-1$;

14) $\iiint\limits_{(V)} y^2z\cos\big(\frac{xyz}{3}\big)dxdydz$; $(V):\ x=3,\ y=1,\ z=2\pi,\ x=0,$ $y=0,\ z=0$;

15) $\iiint\limits_{(V)} y^2\cos\big(\frac{\pi xy}{2}\big)dxdydz$; $(V):\ x=0,\ y=-1,\ y=x,\ z=0,\ z=2\pi^2$;

16) $\iiint\limits_{(V)} 2x^2z\,\mathrm{sh}\,(xyz)dxdydz$; $(V):\ x=1,\ y=-1,\ z=1,\ x=0,$ $y=0,\ z=0$;

17) $\iiint\limits_{(V)} y^2\cos(\pi xy)dxdydz$; $(V):\ x=0,\ y=1,\ y=2x,\ z=0,\ z=\pi^2$;

18) $\iiint\limits_{(V)} 2x^2z\,\mathrm{sh}\,(2xyz)dxdydz$; $(V): x=2, y=\dfrac{1}{2}, z=\dfrac{1}{2}, x=0,$ $y=0, z=0$;

19) $\iiint\limits_{(V)} x^2\mathrm{sh}\,(2xy)dxdydz$; $(V): x=-1, y=x, y=0, z=0, z=8$;

20) $\iiint\limits_{(V)} x^2z\sin\big(\dfrac{xyz}{2}\big)dxdydz$; $(V): x=1, y=4, z=\pi, x=0, y=0,$ $z=0$;

21) $\iiint\limits_{(V)} y^2\mathrm{ch}\,(xy)dxdydz$; $(V): x=0, y=-1, y=x, z=0, z=2$;

22) $\iiint\limits_{(V)} y^2z\,\mathrm{ch}\,(xyz)dxdydz$; $(V): x=1, y=1, z=1, x=0, y=0,$ $z=0$;

23) $\iiint\limits_{(V)} y^2\cos\big(\dfrac{\pi xy}{2}\big)dxdydz$; $(V): x=2, y=x, y=0, z=0, z=\pi$;

24) $\iiint\limits_{(V)} y^2z\cos\big(\dfrac{xyz}{9}\big)dxdydz$; $(V): x=9, y=1, z=2\pi, x=0,$ $y=0, z=0$;

25) $\iiint\limits_{(V)} x^2\sin(\pi xy)dxdydz$; $(V): x=1, y=2x, y=0, z=0, z=4\pi$.

5. Обчислити потрійний інтеграл по області (V), обмеженій поверхнями:

1) $\iiint\limits_{(V)} xdxdydz$; $(V): y=10x, y=0, x=1, z=xy, z=0$;

2) $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dxdydz}{(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8})^4}$; $(V): \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{8}=1, x=0, y=0, z=0$;

3) $\iiint\limits_{(V)} 15(y^2+z^2)dxdydz$; $(V): z=x+y, x+y=1, x=0, y=0, z=0$;

4) $\iiint\limits_{(V)} (3x+4y)dxdydz$; $(V): y=x, y=0, x=1, z=5(y^2+z^2), z=0$;

5) $\iiint\limits_{(V)} (1+2x^3)dxdydz$; $(V): y=9x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0$;

6) $\iiint\limits_{(V)} (27+54y^3)dxdydz$; $(V): y=x, y=0, x=1, z=\sqrt{xy}, z=0$;

7) $\iiint\limits_{(V)} y dx dy dz$; $(V): \ y = 15x, \ y = 0, \ x = 1, \ z = xy, \ z = 0;$

8) $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dx dy dz}{(1 + \frac{x}{16} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3})^5}$; $(V): \ \dfrac{x}{16} + \dfrac{y}{8} + \dfrac{z}{3} = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0;$

9) $\iiint\limits_{(V)} (3x^2 + y^2) dx dy dz$; $(V): \ z = 10y, \ x + y = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0;$

10) $\iiint\limits_{(V)} (15x + 30z) dx dy dz$; $(V): \ z = 5(x^2 + 3y^2), \ z = 0, \ y = x,$ $y = 0, \ x = 1;$

11) $\iiint\limits_{(V)} (4 + 8z^3) dx dy dz$; $(V): \ y = x, \ y = 0, \ x = 1, \ z = \sqrt{xy}, \ z = 0;$

12) $\iiint\limits_{(V)} (1 + 2x^3) dx dy dz$; $(V): \ y = 36x, \ y = 0, \ x = 1, \ z = \sqrt{xy}, \ z = 0;$

13) $\iiint\limits_{(V)} 21xz dx dy dz$; $(V): \ y = 5x, \ y = 0, \ x = 2, \ z = xy, \ z = 0;$

14) $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dx dy dz}{(1 + \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3})^6}$; $(V): \ \dfrac{x}{10} + \dfrac{y}{8} + \dfrac{z}{3} = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0;$

15) $\iiint\limits_{(V)} (x^2 + 3y^2) dx dy dz$; $(V): \ z = 10x, \ x + y = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0;$

16) $\iiint\limits_{(V)} (60y + 90z) dx dy dz$; $(V): \ y = x, \ y = 0, \ x = 1, \ z = x^2 + y^2, \ z = 0;$

17) $\iiint\limits_{(V)} \left(\dfrac{10}{3}x + \dfrac{5}{3}\right) dx dy dz$; $(V): \ y = 9x, \ y = 0, \ x = 1, \ z = \sqrt{xy}, \ z = 0;$

18) $\iiint\limits_{(V)} (1 + 2x^3) dx dy dz$; $(V): \ y = 4x, \ y = 0, \ x = 1, \ z = \sqrt{xy}, \ z = 0;$

19) $\iiint\limits_{(V)} 3y^2 dx dy dz$; $(V): \ y = 2x, \ y = 0, \ x = 2, \ z = xy, \ z = 0;$

20) $\iiint\limits_{(V)} \dfrac{dx dy dz}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6}\right)^4}$; $(V): \ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{6} = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0;$

21) $\iiint\limits_{(V)} x^2 dx dy dz$; $(V): \ z = 10(x + 3y), \ x + y = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0;$

22) $\iiint\limits_{(V)}(8y+12z)dxdydz$; $(V):\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=3x^2+2y^2,\ z=0$;

23) $\iiint\limits_{(V)}(1+2\sqrt{y})dxdydz$; $(V):\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0$;

24) $\iiint\limits_{(V)}(x+y)dxdydz$; $(V):\ y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=30x^2+60y^2,\ z=0$;

25) $\iiint\limits_{V}\dfrac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)^4}$; $(V):\ \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{16}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

6. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої заданими лініями:

1) $y=\dfrac{3}{x},\ y=4e^x,\ y=3,\ y=4$;

2) $x=\sqrt{36-y^2},\ x=6-\sqrt{36-y^2}$;

3) $x^2+y^2=72,\ 6y=-x^2,\ (y\leqslant 0)$;

4) $x=8-y^2,\ x=-2y$;

5) $y=\dfrac{3}{x},\ y=8e^x,\ y=3,\ y=8$;

6) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2},\ y=\dfrac{1}{2x},\ x=16$;

7) $x=5-y^2,\ x=-4y$;

8) $x^2+y^2=12,\ -\sqrt{6}y=x^2,\ (y\leqslant 0)$;

9) $y=\sqrt{12-x^2},\ y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2},\ x=0,\ (x\geqslant 0)$;

10) $y=\dfrac{3\sqrt{x}}{2},\ y=\dfrac{3}{2x},\ x=9$;

11) $y=\sqrt{24-x^2},\ 2\sqrt{3}y=x^2,\ x=0,\ (x\geqslant 0)$;

12) $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0,\ (x\geqslant 0)$;

13) $y=20-x^2,\ y=-8x$;

14) $y=\sqrt{18-x^2},\ y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}$;

15) $y=32-x^2,\ y=-4x$;

16) $y=\dfrac{2}{x},\ y=5e^x,\ y=2,\ y=5$;

17) $x^2+y^2=36,\ 2\sqrt{3}y=x^2,\ (y\geqslant 0)$;

18) $y=3\sqrt{x},\ y=\dfrac{3}{x},\ x=4$;

19) $y=6-\sqrt{36-x^2},\ y=\sqrt{36-x^2},\ x=0,\ (x\geqslant 0)$;

20) $y=\dfrac{25}{4}-x^2,\ y=x-\dfrac{5}{2}$;

21) $y = \sqrt{x},\ y = \dfrac{1}{x},\ x = 16;$

22) $y = \dfrac{2}{x},\ y = 7e^{x},\ y = 2,\ y = 7;$

23) $x = 27 - y^2,\ x = -6y;$

24) $x = \sqrt{72 - y^2},\ 6x = y^2,\ y = 0,\ (y \geqslant 0);$

25) $y = \sqrt{6 - x^2},\ y = \sqrt{6} - \sqrt{6 - x^2}.$

7. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

1) $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x;$

2) $x^2 - 4x + y^2 = 0,\ x^2 - 8x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

3) $y^2 - 6y + x^2 = 0,\ y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x;$

4) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 4x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = x;$

5) $y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y^2 - 10y + x^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x;$

6) $x^2 - 4x + y^2 = 0,\ x^2 - 8x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = x;$

7) $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y^2 - 6y + x^2 = 0,\ y = x,\ y = 0;$

8) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 10x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = \sqrt{3}x;$

9) $y^2 - 6y + x^2 = 0,\ y^2 - 10y + x^2 = 0,\ y = x,\ y = 0;$

10) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 4x + y^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x;$

11) $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y = \sqrt{3}x,\ x = 0;$

12) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 6x + y^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x;$

13) $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y^2 - 6y + x^2 = 0,\ y = \sqrt{3}x,\ x = 0;$

14) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 8x + y^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x;$

15) $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 6y + x^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ x = 0;$

16) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 4x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

17) $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 10y + x^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x;$

18) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 6x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

19) $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y^2 - 10y + x^2 = 0,\ y = \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y = \sqrt{3}x;$

20) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 6x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = x;$

21) $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y = x,\ y = 0;$

22) $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 4x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = \sqrt{3}x;$

23) $y^2 - 6y + x^2 = 0,\ y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y = x,\ y = 0;$

24) $x^2 - 4x + y^2 = 0,\ x^2 - 8x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = \sqrt{3}x;$

25) $y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y = x,\ y = 0.$

8. Пластинка (D) задана кривими, що її обмежують, μ – поверхнева густина. Знайти масу пластинки.

1) $(D):\ x = 1,\ y = 0,\ y^2 = 4x,\ (y \geqslant 0);\ \mu = 7x^2 + y;$

2) $(D):\ x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0);\ \mu = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2};$

3) $(D):\ x = 1,\ y = 0,\ y^2 = 4x,\ (y \geqslant 0);\ \mu = \dfrac{7x^2}{2} + 5y;$

4) $(D):\ x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 16,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0);\ \mu = \dfrac{2x + 5y}{x^2 + y^2};$

5) $(D):\ x = 2,\ y = 0,\ y^2 = 2x,\ (y \geqslant 0);\ \mu = \dfrac{7x^2}{8} + 2y;$

6) $(D):\ x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 16,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0);\ \mu = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2};$

7) $(D):\ x = 2,\ y = 0,\ y^2 = \dfrac{x}{2},\ (y \geqslant 0);\ \mu = \dfrac{7x^2}{2} + 6y;$

8) $(D):\ x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 25,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \geqslant 0,\ y \leqslant 0);\ \mu = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2};$

9) $(D):\ x = 1,\ y = 0,\ y^2 = 4x,\ (y \geqslant 0);\ \mu = x + 3y^2;$

10) $(D):\ x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 9,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \geqslant 0,\ y \leqslant 0);\ \mu = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2};$

11) $(D):\ x = 1,\ y = 0,\ y^2 = x,\ (y \geqslant 0);\ \mu = 3x + 6y^2;$

12) $(D):\ x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 25,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \leqslant 0,\ y \geqslant 0);\ \mu = \dfrac{2y - x}{x^2 + y^2};$

13) $(D):\ x = 2,\ y = 0,\ y^2 = \dfrac{x}{2},\ (y \geqslant 0);\ \mu = 2x + 3y^2;$

14) $(D):\ x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 16,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \leqslant 0,\ y \geqslant 0);\ \mu = \dfrac{2y - 3x}{x^2 + y^2};$

15) $(D):\ x = \dfrac{1}{2},\ y = 0,\ y^2 = 8x,\ (y \geqslant 0);\ \mu = 7x + 3y^2;$

16) $(D):\ x^2 + y^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 16,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \leqslant 0,\ y \geqslant 0);\ \mu = \dfrac{2y - 5x}{x^2 + y^2};$

17) $(D):\ x = 1,\ y = 0,\ y^2 = 4x,\ (y \geqslant 0);\ \mu = 7x^2 + 2y;$

18) $(D):\ x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 16,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0);\ \mu = \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2};$

19) $(D):\ x = 2,\ y = 0,\ y^2 = 2x,\ (y \geqslant 0);\ \mu = \dfrac{7x^2}{4} + \dfrac{y}{2};$

20) $(D):\ x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0);\ \mu = \dfrac{x + 2y}{x^2 + y^2};$

21) $(D):\ x=2,\ y=0,\ y^2=2x,\ (y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{7x^2}{4}+y;$

22) $(D):\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0);\ \mu=\dfrac{2x-y}{x^2+y^2};$

23) $(D):\ x=2,\ y=0,\ y^2=\dfrac{x}{2},\ (y\geqslant 0);\ \mu=\dfrac{7x^2}{2}+8y;$

24) $(D):\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=25,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0,\ y\leqslant 0);\ \mu=\dfrac{x-4y}{x^2+y^2};$

25) $(D):\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x,\ (y\geqslant 0);\ \mu=6x+3y^2.$

9. Пластинка (D) задана нерівностями, μ – поверхнева густина. Знайти масу пластинки.

1) $(D):\ x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1;\ \mu=y^2;$

2) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 2,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant\dfrac{2}{3}x;\ \mu=y^2;$

3) $(D):\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}\leqslant 1,\ y\geqslant 0;\ \mu=x^2y;$

4) $(D):\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}\leqslant 1,\ y\geqslant 0;\ \mu=\dfrac{7}{18}x^2y;$

5) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 4,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant\dfrac{x}{2};\ \mu=8yx^{-3};$

6) $(D):\ \dfrac{x^2}{9}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0;\ \mu=7xy^6;$

7) $(D):\ \dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1;\ \mu=4y^4;$

8) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant\dfrac{3x}{2};\ \mu=xy^{-1};$

9) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 4,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant\dfrac{x}{2};\ \mu=xy^{-1};$

10) $(D):\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0;\ \mu=x^3y;$

11) $(D):\ \dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0;\ \mu=6x^3y^3;$

12) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 25,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant\dfrac{x}{2};\ \mu=xy^{-3};$

13) $(D):\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1;\ \mu=x^2y^2;$

14) $(D):\ \dfrac{x^2}{16}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0;\ \mu=5xy^7;$

15) $(D):\ \dfrac{x^2}{4}+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0;\ \mu=30x^3y^7;$

16) $(D):\ 1\leqslant\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 3,\ y\geqslant 0,\ y\leqslant\dfrac{2}{3}x;\ \mu=\dfrac{y}{x};$

17) $(D): \ x^2 + \dfrac{y^2}{25} \leqslant 1, \ y \geqslant 0; \ \mu = 7x^4y;$

18) $(D): \ x^2 + \dfrac{y^2}{9} \leqslant 1, \ y \geqslant 0; \ \mu = 35x^4y^3;$

19) $(D): \ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leqslant 1; \ \mu = x^2;$

20) $(D): \ 1 \leqslant x^2 + \dfrac{y^2}{16} \leqslant 9, \ y \geqslant 0, \ y \leqslant 4x; \ \mu = yx^{-3};$

21) $(D): \ \dfrac{x^2}{9} + y^2 \leqslant 1, \ x \geqslant 0; \ \mu = 11xy^8;$

22) $(D): \ 1 \leqslant \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} \leqslant 5, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 2x; \ \mu = \dfrac{x}{y};$

23) $(D): \ 1 \leqslant \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \leqslant 5, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant \dfrac{2x}{3}; \ \mu = \dfrac{x}{y};$

24) $(D): \ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leqslant 1, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0; \ \mu = x^5y;$

25) $(D): \ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} \leqslant 1; \ \mu = x^4.$

10. Знайти об'єм тіла (V), обмеженого поверхнями:

1) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \ \dfrac{9z}{2} = x^2 + y^2;$

2) $z = 7,5\sqrt{9 - x^2 - y^2}, \ z = 8,5 - x^2 - y^2;$

3) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \ z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{255}};$

4) $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, \ z = 1, \ x^2 + y^2 = 60, \ (x^2 + y^2 \leqslant 60);$

5) $z = \sqrt{\dfrac{16}{9} - x^2 - y^2}, \ 2z = x^2 + y^2;$

6) $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, \ z = 10 - x^2 - y^2;$

7) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \ z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}};$

8) $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}, \ z = 6, \ x^2 + y^2 = 51, \ (x^2 + y^2 \leqslant 51);$

9) $z = 10,5\sqrt{x^2 + y^2}, \ z = \dfrac{23}{2} - x^2 - y^2;$

10) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \ 6z = x^2 + y^2;$

11) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \ z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{80}};$

12) $z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}, \ z = 5, \ x^2 + y^2 = 45, \ (x^2 + y^2 \leqslant 45);$

13) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \ \dfrac{3z}{2} = x^2 + y^2;$

14) $z = 6\sqrt{x^2 + y^2}, \ z = 16 - x^2 - y^2;$

15) $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \ z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{63}};$

16) $z=\sqrt{64-x^2-y^2},\ z=4,\ x^2+y^2=39,\ (x^2+y^2\leqslant 39)$;

17) $z=\sqrt{144-x^2-y^2},\ 18z=x^2+y^2$;

18) $z=1,5\sqrt{x^2+y^2},\ z=\dfrac{5}{2}-x^2-y^2$;

19) $z=\sqrt{9-x^2-y^2},\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}}$;

20) $z=\sqrt{49-x^2-y^2},\ z=3,\ x^2+y^2=33,\ (x^2+y^2\leqslant 33)$;

21) $z=\sqrt{36-x^2-y^2},\ 9z=x^2+y^2$;

22) $z=9\sqrt{x^2+y^2},\ z=22-x^2-y^2$;

23) $z=\sqrt{16-x^2-y^2},\ z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}}$;

24) $z=\sqrt{36-x^2-y^2},\ z=2,\ x^2+y^2=27,\ (x^2+y^2\leqslant 27)$;

25) $z=\sqrt{\dfrac{4}{9}-x^2-y^2},\ z=x^2+y^2$.

11. Знайти об'єм тіла (V), обмеженого поверхнями:

1) $z=2-12(x^2+y^2),\ z=24x+2$;

2) $z=10((x-1)^2+y^2)+1,\ z=21-20x$;

3) $z=10(x^2+y^2)+3,\ z=16x+3$;

4) $z=2-20((x+1)^2+y^2),\ z=-40x-38$;

5) $z=4-14(x^2+y^2),\ z=4-28x$;

6) $z=28((x+1)^2+y^2)+3,\ z=56x+59$;

7) $z=32(x^2+y^2)+3,\ z=3-64x$;

8) $z=4-6((x-1)^2+y^2),\ z=12x-8$;

9) $z=2-4(x^2+y^2),\ z=8x+2$;

10) $z=22((x+1)^2+y^2)+3,\ z=47-44x$;

11) $z=24(x^2+y^2)+1,\ z=48x+1$;

12) $z=2-18((x+1)^2+y^2),\ z=-36x-34$;

13) $z=-16(x^2+y^2)-1,\ z=-32x-1$;

14) $z=30((x+1)^2+y^2)+1,\ z=60x+61$;

15) $z=26(x^2+y^2)-2,\ z=-52x-2$;

16) $z=-2((x+1)^2+y^2)-1,\ z=4x-5$;

17) $z=-2(x^2+y^2)-1,\ z=-4y-1$;

18) $z = 26((x-1)^2 + y^2) - 2,\ z = 50 - 52x;$

19) $z = 30(x^2 + y^2) + 1,\ z = 60y + 1;$

20) $z = -16((x+1)^2 + y^2) - 1,\ z = -32x - 33;$

21) $z = 2 - 18(x^2 + y^2),\ z = 2 - 36y;$

22) $z = 24((x+1)^2 + y^2) + 1,\ z = 48x + 49;$

23) $z = 22(x^2 + y^2) + 3,\ z = 3 - 44y;$

24) $z = 2 - 4((x-1)^2 + y^2),\ z = 8x - 6;$

25) $z = 4 - 6(x^2 + y^2),\ z = 12y + 4.$

12. Знайти об’єм тіла (V), заданого нерівностями:

1) $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 49,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ -x \leqslant y \leqslant 0;$

2) $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 64,\ \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ -\sqrt{3x} \leqslant y \leqslant 0;$

3) $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 64,\ z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant 0;$

4) $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36,\ z \geqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}},\ 0 \leqslant y \leqslant -\dfrac{x}{\sqrt{3}};$

5) $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 36,\ z \geqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ -\sqrt{3}x \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x;$

6) $25 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100,\ z \leqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ -\sqrt{3}x \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x;$

7) $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 49,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}},\ y \leqslant -\dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \leqslant -\sqrt{3}x;$

8) $25 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 121,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \leqslant z \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x;$

9) $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 64,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ x \leqslant y \leqslant 0;$

10) $16 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100,\ \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ \sqrt{3}x \leqslant y \leqslant 0;$

11) $16 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100,\ z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ -\sqrt{3}x \leqslant y \leqslant -\dfrac{x}{\sqrt{3}};$

12) $16 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 64,\ z \geqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}},\ -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant -\sqrt{3}x;$

13) $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 49,\ z \geqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ y \leqslant 0,\ y \leqslant \sqrt{3}x;$

14) $36 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 121,\ z \leqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ y \geqslant \sqrt{3}x,\ y \geqslant 0;$

15) $4 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 64,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}},\ y \leqslant \sqrt{3}x,\ y \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

16) $36 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 144,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \leqslant z \leqslant 0,\ y \geqslant \sqrt{3}x,\ y \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

17) $9 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 81,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}},\ 0 \leqslant y \leqslant -x;$

18) $36 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 144,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \leqslant z \leqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}},\ 0 \leqslant y \leqslant -\sqrt{3}x;$

19) $36 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 144,\ z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},\ \sqrt{3}x \leqslant y \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

20) $36 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100,\ z \geqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}},\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x;$

21) $9 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 64,\ z \geqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ y \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \leqslant -\dfrac{x}{\sqrt{3}};$

22) $49 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 144,\ z \leqslant -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}},\ y \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}},\ y \geqslant -\dfrac{x}{\sqrt{3}};$

23) $9 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 81,\ 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}},\ y \leqslant 0,\ y \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

24) $49 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 169,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \leqslant z \leqslant 0,\ y \geqslant 0,\ y \geqslant \dfrac{x}{\sqrt{3}};$

25) $16 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 100,\ -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \leqslant z \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}},\ 0 \leqslant y \leqslant x.$

13. Тіло (V) задано поверхнями, які його обмежують. Знайти масу тіла, якщо $\varrho(x,y,z)$ – густина тіла.

1) $64(x^2+y^2) = z^2,\ x^2+y^2 = 4,\ y = 0,\ z = 0,\ (y \geqslant 0, z \geqslant 0);$ $\varrho(x,y,z) = \dfrac{5}{4}(x^2+y^2);$

2) $x^2+y^2+z^2 = 4,\ x^2+y^2 = 1,\ (x^2+y^2 \leqslant 1),\ x = 0,\ (x \geqslant 0);$ $\varrho(x,y,z) = 4|z|;$

3) $x^2+y^2 = 1,\ x^2+y^2 = 2z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0);$ $\varrho(x,y,z) = 10x;$

4) $x^2+y^2 = \dfrac{16}{49}z^2,\ x^2+y^2 = \dfrac{4}{7}z,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0);$ $\varrho(x,y,z) = 80yz;$

5) $x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2 = 4z^2,\ x = 0,\ y = 0,\ (x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0);$ $\varrho(x,y,z) = 20z;$

6) $36(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=1,\ x=0,\ z=0,\ (x\geqslant 0, z\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=\frac{5}{6}(x^2+y^2)$;

7) $x^2+y^2+z^2=16,\ x^2+y^2=4,\ (x^2+y^2\leqslant 4)$; $\varrho(x,y,z)=2|z|$;

8) $x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=8z,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=5x$;

9) $x^2+y^2=\frac{2}{25}z^2,\ x^2+y^2=\frac{2}{5}z,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=28xz$;

10) $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=z^2,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=6z$;

11) $25(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=2(x^2+y^2)$;

12) $x^2+y^2+z^2=9,\ x^2+y^2=4,\ (x^2+y^2\leqslant 4),\ y=0,\ (y\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=|z|$;

13) $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=6z,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=90y$;

14) $x^2+y^2=\frac{z^2}{25},\ x^2+y^2=\frac{z}{5},\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=14yz$;

15) $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=9z^2,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=10z$;

16) $9(x^2+y^2)=z^2,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=\frac{5}{3}(x^2+y^2)$;

17) $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=1,\ (x^2+y^2\leqslant 1)$; $\varrho(x,y,z)=6|z|$;

18) $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=z,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=10x$;

19) $x^2+y^2=\frac{z^2}{49},\ x^2+y^2=\frac{z}{7},\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=10xz$;

20) $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2=4z^2,\ x=0,\ y=0,\ (x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$; $\varrho(x,y,z)=10z$;

21) $16(x^2+y^2) = z^2$, $x^2+y^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$; $\varrho(x, y, z) = 5(x^2 + y^2)$;

22) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4$, $(x^2 + y^2 \leqslant 4)$; $\varrho(x, y, z) = |z|$;

23) $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 4z$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$; $\varrho(x, y, z) = 5y$;

24) $x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{49}$, $x^2 + y^2 = \dfrac{z}{7}$, $x = 0$, $y = 0$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$; $\varrho(x, y, z) = 10xz$;

25) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$; $\varrho(x, y, z) = 32z$.

Зразки розв'язування індивідуальних завдань до розділу II

1. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy.$

Розв'язання. Зобразимо область інтегрування (див. рис. 1).

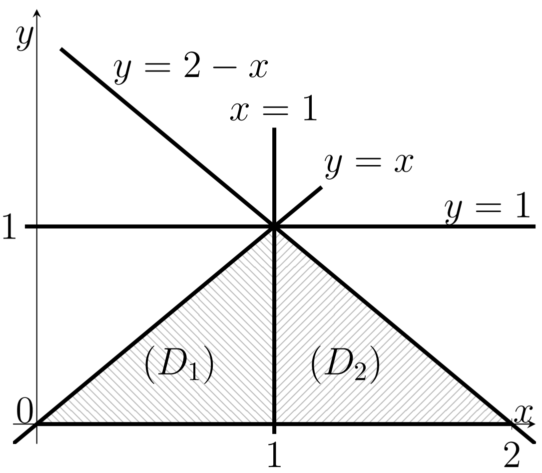

Рис. 1

В першому повторному інтегралі внутрішній інтеграл обчислюється по y, то його межі визначають лінії, якими обмежена область інтегрування зверху і знизу, а саме $y = x$ та $y = 0$.

Межі в зовнішньому інтегралі $x = 0$ та $x = 1$ вказують, в яких межах змінюється $x : 0 \le x \le 1$.

Побудувавши дані лінії, знаходимо область інтегрування (D_1). Подібним чином знаходимо область інтегрування (D_2) другого інтеграла, яка знизу та зверху обмежена прямими $y = 0$ та $y = 2 - x$, а зліва і справа – прямими $x = 1$ та $x = 2$.

Заштриховану область $(D) = (D_1)\bigcup(D_2)$ можна розглядати як криволінійну трапецію, обмежену зверху і знизу прямими $y = 1$ та $y = 0$, а зліва і справа прямими $x = y$ та $x = 2$ відповідно. Тоді ми приходимо до такого повторного інтеграла:

$$\int_0^2 dy \int_y^{2-y} f(x,y)dx. \quad \triangleright$$

2. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} \left(6x^2y^2 + \dfrac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy$ по області (D), обмеженій кривими: $x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

Розв'язання. Криві $y = x^2$ та $y = -\sqrt{x}$ мають єдину спільну точку з абсцисою $x = 0$. Наша область зліва і справа обмежена прямими $x = 0$ та $x = 1$, знизу і зверху кривими $y = -\sqrt{x}$ та $y = x^2$ (див. рис. 2).

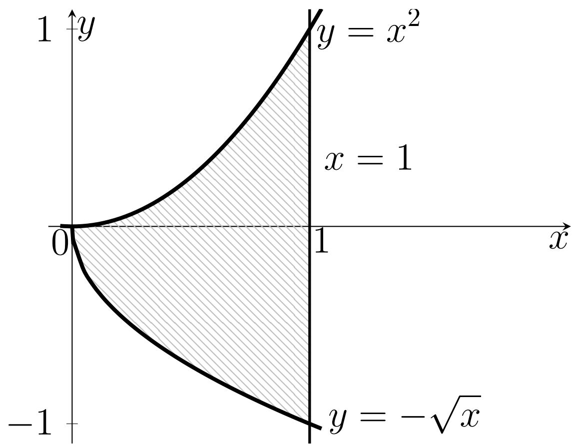

Рис. 2

Перейдемо до повторних інтегралів:

$$\iint\limits_{(D)} \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \left(6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(6x^2\frac{y^3}{3} + \frac{25}{3}x^4\frac{y^5}{5}\right)\Big|_{-\sqrt{x}}^{x^2} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big(2x^2 \cdot x^6 + \frac{5}{3}x^4 \cdot x^{10} - 2x^2(-\sqrt{x})^3 - \frac{5}{3}x^4(-\sqrt{x})^5\Big)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big(2x^8 + \frac{5}{3}x^{14} + 2x^{2+\frac{3}{2}} + \frac{5}{3}x^{4+\frac{5}{2}}\Big)dx =$$

$$= \Big(2\frac{x^9}{9} + \frac{5}{3}\frac{x^{15}}{15} + 2x^{\frac{9}{2}} \cdot \frac{2}{9} + \frac{5}{3}x^{\frac{15}{2}} \cdot \frac{2}{15}\Big)\Big|_0^1 = 1. \quad \triangleright$$

3. Обчислити подвійні інтеграли $\iint\limits_{(D)} 6ye^{\frac{xy}{3}}dxdy$ по області (D), обмеженій кривими: $y = \ln 2,\ y = \ln 3,\ x = 3,\ x = 6$.

Розв'язання. Маємо прямокутну область з межами, паралельними до координатних осей. Перейдемо до повторних інтегралів, вибираючи зручний порядок інтегрування:

$$\iint\limits_{(D)} 6ye^{\frac{xy}{3}}dxdy = 6\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} dy \int\limits_3^6 ye^{\frac{xy}{3}}dx = 6\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} ye^{\frac{xy}{3}}\frac{3}{y}\Big|_3^6 dy =$$

$$= 18\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}(e^{2y} - e^y)dy = 18\Big(\frac{e^{2y}}{2} - e^y\Big)\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = 9 \cdot 9 - 18 \cdot 3 = 27. \quad \triangleright$$

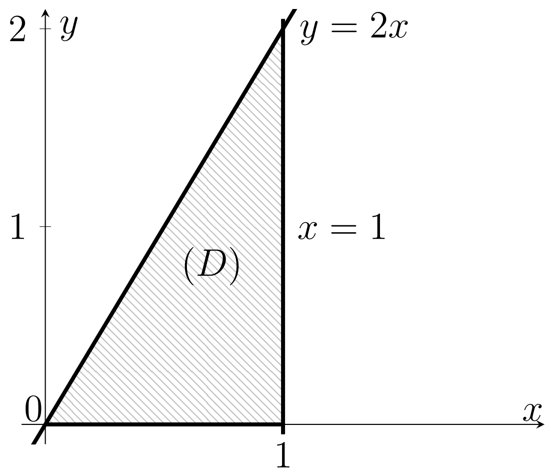

Рис. 3

4. Обчислити потрійні інтеграли $\iiint\limits_{(V)} x^2\sin(\pi xy)dxdydz$ по області (V), обмеженій поверхнями: $x = 1$, $y = 2x$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 4\pi$.

Розв'язання. Переходимо до повторних інтегралів, вибираючи зручний порядок інтегрування. Оскільки маємо дві площини $z = 0$ та $z = 4\pi$, які паралельні до площини xOy, то наша область обмежена зверху і знизу цими площинами. Поверхні $x = 1$, $y = 2x$ та $y = 0$ – це площини, які перпендикулярні до площини xOy, при цьому проектування взаємно однозначне (див. рис. 3).

Отже,

$$\iiint\limits_{(V)} x^2 \sin(\pi xy) dxdydz = \int\limits_0^{4\pi} dz \iint\limits_{(D)} x^2 \sin(\pi xy) dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{4\pi} dz \int\limits_0^{1} dx \int\limits_0^{2x} x^2 \sin(\pi xy) dy = \int\limits_0^{4\pi} dz \int\limits_0^{1} x^2 \cdot \frac{(-\cos(\pi xy))}{\pi x}\Big|_0^{2x} dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{4\pi} dz \int\limits_0^{1} (x\cos(2\pi x^2) - x)dx = -\frac{1}{\pi}\cdot 4\pi\Big(\int\limits_0^{1} \frac{\cos(2\pi x^2)d(2\pi x^2)}{4\cdot\pi} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1\Big) =$$

$$= -4\Big(\frac{\sin(2\pi x^2)}{4\pi}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\Big) = 2. \quad \triangleright$$

5. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_{V} \dfrac{dxdydz}{\left(1 + \frac{x}{6} + \frac{y}{4} + \frac{z}{16}\right)^4}$ по області (V), обмеженій поверхнями: $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{16} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Розв'язання. Рівняння $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ – це рівняння координатних площин, $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{16} = 1$ – рівняння площини, що перетинає вісь Ox в точці з абсцисою $x = 6$, вісь Oy – в точці з ординатою $y = 4$ та вісь Oz – в точці з аплікатою $z = 16$.

Ми можемо, наприклад, розглядати нашу область, як таку, що обмежена знизу площиною $z = 0$, зверху площиною $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{16} = 1$. Площини $x = 0$ та $y = 0$ перпендикулярні до площини xOy, тому проектування області на площину xOy є взаємно однозначним (див. рис. 4).

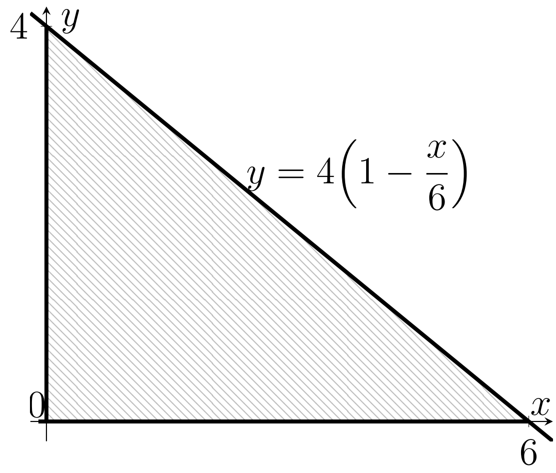

Рис. 4

В потрійному інтегралі перейдемо до повторних

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)^4} = \iint\limits_{(D)} dxdy \int\limits_0^{16(1-\frac{x}{6}-\frac{y}{4})} \frac{dz}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)^4} =$$

$$= -\frac{16}{3}\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{4(1-\frac{x}{6})} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)^3}\Bigg|_0^{16(1-\frac{x}{6}-\frac{y}{4})} dy =$$

$$= -\frac{16}{3}\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{4(1-\frac{x}{6})} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+1-\frac{x}{6}-\frac{y}{4}\right)^3} - \frac{1}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}\right)^3}\right) dy =$$

$$= -\frac{16}{3}\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{4(1-\frac{x}{6})} \left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}\right)^3}\right) dy =$$

$$= -\frac{16}{3}\int\limits_0^6 \left(\frac{1}{2^3} y\Big|_0^{4(1-\frac{x}{6})} + \frac{4}{2\cdot\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}\right)^2}\Bigg|_0^{4(1-\frac{x}{6})}\right) dx =$$

$$= -\frac{8}{3}\int\limits_0^6 \left(1-\frac{x}{6} + \frac{4}{\left(1+\frac{x}{6}+1-\frac{x}{6}\right)^2} - \frac{4}{\left(1+\frac{x}{6}\right)^2}\right) dx =$$

$$= -\frac{8}{3}\int\limits_0^6 \left(1-\frac{x}{6}+1-\frac{4}{\left(1+\frac{x}{6}\right)^2}\right) dx =$$

$$= -\frac{8}{3}\left(2x\Big|_0^6 - \frac{x^2}{12}\Big|_0^6 + \frac{24}{\left(1+\frac{x}{6}\right)}\Bigg|_0^6\right) = -\frac{8}{3}(2\cdot 6 - 3 + 12 - 24) = 8. \quad \triangleright$$

6. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої заданими лініями:

$$y = \sqrt{6 - x^2},\ y = \sqrt{6} - \sqrt{6 - x^2}.$$

Розв'язання. Зводимо обидва рівняння до канонічної форми. Підносячи обидві частини першого рівняння до квадрату при умові, що $y \geq 0$ і перетворивши, маємо $x^2 + y^2 = 6$. Друге рівняння зводимо до вигляду $(y - \sqrt{6})^2 = 6 - x^2$ при умові, що $y \leq 6$. Отже, ми маємо нижню половину кола $x^2 + (y - \sqrt{6})^2 = 6$ з центром в точці $A(0; \sqrt{6})$ радіусом $\sqrt{6}$ і верхню половину кола $x^2 + y^2 = 6$ з центром в точці $O(0; 0)$ радіусом $\sqrt{6}$ (див. рис. 5).

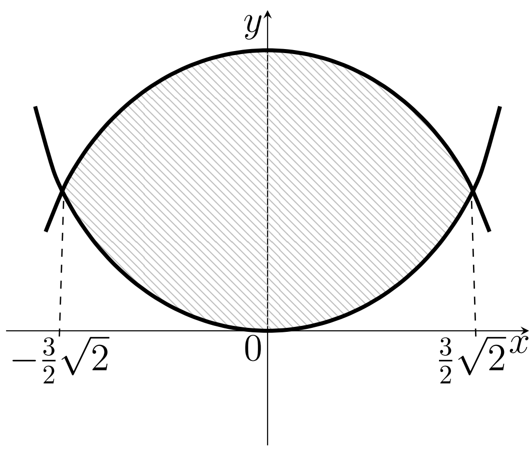

Рис. 5

Знайдемо координати точок перетину обох кривих, розв'язавши систему

$$\begin{cases} x^2 + (y - \sqrt{6})^2 = 6, \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$$

Маємо точки $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ та $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$. Площа фігури обчислюється за формулою $S = \iint\limits_{(D)} dxdy$. Отже,

$$S = \int\limits_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_{\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}}^{\sqrt{6-x^2}} dy = \int\limits_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} (2\sqrt{6 - x^2} - \sqrt{6})dx =$$

$$= 2\int\limits_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} \sqrt{6-x^2}dx - \sqrt{6}\Big(\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\Big).$$

Скористаємося формулою

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Отже,

$$S = 2\Big(\frac{x}{2}\sqrt{6-x^2}+\frac{6}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{6}}\Big)\Big|_{-\frac{3\sqrt{2}}{2}}^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} - 3\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} =$$

$$= 2\Big(\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{6-\frac{9}{2}}+\frac{6}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{12}}+\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{6-\frac{9}{2}}+\frac{6}{2}\arcsin\frac{3}{\sqrt{12}}\Big) - 6\sqrt{3} =$$

$$= 3\sqrt{3}+12\arcsin\frac{3}{\sqrt{12}} - 6\sqrt{3} = 4\pi - 3\sqrt{3} \text{ (кв.од.)}. \quad \triangleright$$

7. Знайти площу плоскої фігури, обмеженої даними лініями:

$$y^2-4y+x^2=0,\ y^2-8y+x^2=0,\ y=x,\ y=0.$$

Розв'язання. Перетворимо перші два рівняння:

$$y^2-4y+x^2=0 \text{ або } (y-2)^2+x^2=4,$$

$$y^2-8y+x^2=0 \text{ або } (y-4)^2+x^2=16.$$

Площу фігури знаходимо за формулою $S=\iint\limits_{(D)} dxdy$. Оскільки область – це частина кругових областей, то доцільно перейти до полярної системи координат: $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$. Перепишемо задані рівняння у полярній системі координат:

$$y^2+x^2=4y \Rightarrow r=4\sin\varphi,$$

$$y^2+x^2=8y \Rightarrow r=8\sin\varphi,$$

$$y=x \Rightarrow \cos\varphi=\sin\varphi \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$y=0 \Rightarrow \varphi=0.$$

Отже, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}, 4\sin\varphi\le r\le 8\sin\varphi.$

В результаті переходу до полярної системи координат область (D) взаємно однозначно відображається в область (D') (див. рис. 6).

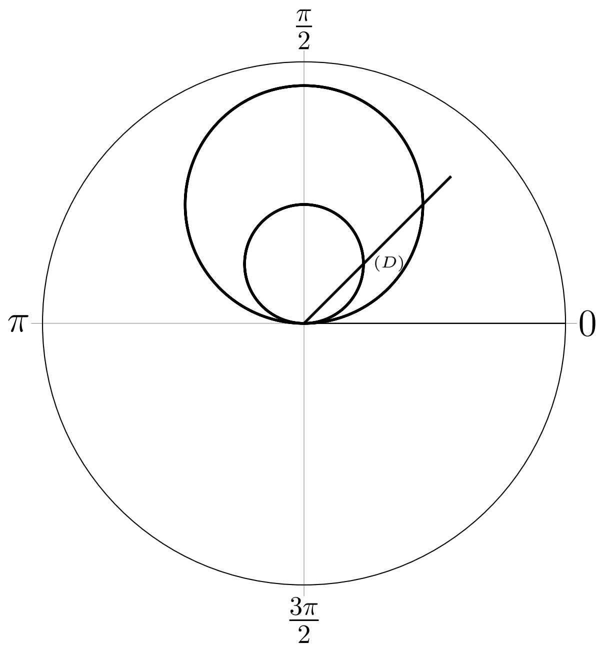

Рис. 6

Тоді площу плоскої фігури обчислюємо за формулою:

$$S = \iint\limits_{(D')} r dr d\varphi = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} r dr =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Big|_{4\sin\varphi}^{8\sin\varphi} d\varphi = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} (32\sin^2\varphi - 8\sin^2\varphi) d\varphi =$$

$$= 24 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = 24\Big(\frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4}\Big)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = 24\Big(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\Big) = 3(\pi - 2) \text{ (кв.од.).} \quad \triangleright$$

8. Пластинка (D) задана кривими, що її обмежують: $x = 1$, $y = 0$, $y^2 = 4x$, $(y \geqslant 0)$, та $\mu = 6x + 3y^2$ – поверхнева густина. Знайти масу пластинки.

Розв'язання. Масу пластини можна обчислити за формулою

$$m = \iint\limits_{(D)} \mu(x, y) dx dy,$$

де область (D) зображена на рис 7.

Отже,

$$m = \iint\limits_{(D)} (6x + 3y^2) dx dy = \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}}^{1} (6x + 3y^2) dx = \int\limits_{0}^{2} \Big(\frac{6x^2}{2} + 3y^2 x\Big)\Big|_{\frac{y^2}{4}}^{1} dy =$$

$$= \int\limits_0^2 \Big(3 + 3y^2 - \frac{3y^4}{16} - 3y^2 \cdot \frac{y^2}{4}\Big) dy = \int\limits_0^2 \Big(3 + 3y^2 - \frac{15}{16}y^4\Big) dy =$$

$$= \Big(3y + \frac{3y^3}{3} - \frac{15}{16}\frac{y^5}{5}\Big)\Big|_0^2 = 6 + 8 - 6 = 8. \quad \triangleright$$

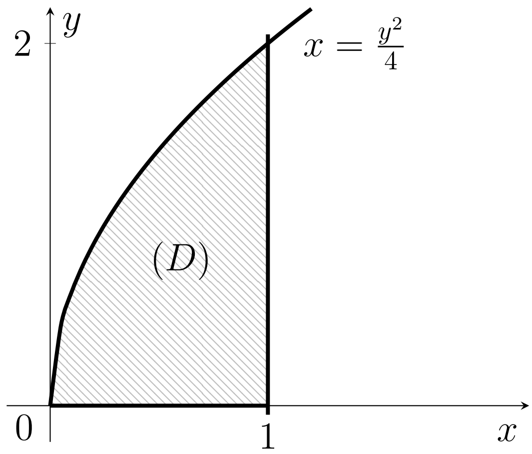

Рис. 7

9. Пластинка (D) задана нерівністю $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} \leqslant 1$, а $\mu = x^4$ – поверхнева густина. Знайти масу пластинки.

Розв'язання. Маса пластинки обчислюється за формулою

$$m = \iint\limits_{(D)} \mu(x, y) dxdy.$$

В нашому випадку (D) – внутрішня частина еліпса $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ разом з межею. Для обчислення подвійного інтеграла доцільно перейти до узагальнених полярних координат, які пов'язані з декартовими формулами $x = 2r\cos\varphi, y = 5r\sin\varphi$, $r \in [0; 1]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Якобіан переходу рівний $10r$. Отже,

$$m = \iint\limits_{(D)} x^4 dxdy = \iint\limits_{(D)} 16r^4\cos^4\varphi \cdot 10r d\varphi dr = 160 \int\limits_0^1 r^5 dr \int\limits_0^{2\pi} \cos^4\varphi d\varphi.$$

Повторний інтеграл розклався на добуток двох інтегралів, оскільки підінтегральна функція є добутком двох функцій, одна з яких залежить тільки від r, а друга – від φ, тому ці інтеграли рахуємо кожен окремо, а результати перемножуємо.

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^4\varphi d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \Big(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\Big)^2 d\varphi = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\Big(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\Big)d\varphi = \frac{1}{4}\Big(\varphi+2\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2}+\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{2}\frac{\sin 4\varphi}{4}\Big)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}.$$

Обчислимо тепер наступний інтеграл:

$$\int\limits_0^1 r^5 dr = \frac{r^6}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Отже, маса $m = 160\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3\pi}{4} = 20\pi.$ $\triangleright$

10. Знайти об'єм тіла (V), обмеженого поверхнями:

$$z = \sqrt{\frac{4}{9}-x^2-y^2},\ z = x^2+y^2.$$

Розв'язання. Спільною областю визначення обидвох функцій є множина точок $(x;y)$, координати яких задовольняють нерівність $0\le x^2+y^2\le\frac{4}{9}$. Об'єм тіла можна шукати як за подвійним так і за потрійним інтегралом. В першому випадку

$$V = \iint\limits_{(D)}(z(x,y)-z_0(x,y))dxdy,$$

де $z = z(x,y)$ – рівняння поверхні, що обмежує тіло зверху (у нашому випадку це верхня частина сфери $z = \sqrt{\frac{4}{9}-x^2-y^2}$ з центром в початку координат та радіусом $\frac{2}{3}$), а $z = z_0(x,y)$ – знизу (в нашому випадку – параболоїд обертання $z = x^2+y^2$ з вершиною в точці $O(0;0;0)$). З боків тіло обмежують твірні паралельні до осі z.

Знайдемо напрямну лінію цих твірних, тобто лінію перетину цих поверхонь: $\sqrt{\frac{4}{9}-x^2-y^2} = x^2+y^2$. Нехай $x^2+y^2 = t$, тоді $\sqrt{\frac{4}{9}-t} = t,\ t\ge 0$. Отримаємо $t^2+t-\frac{4}{9} = 0,\ t = \frac{1}{3}$. Отже, $x^2+y^2 = \frac{1}{3}$ – напрямна. Тоді область $(D) = \Big\{(x,y):\ x^2+y^2\le\frac{1}{3}\Big\}$.

Областю інтегрування є круг радіуса $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ і в рівнянні поверхонь, що обмежують тіло зверху і знизу, є вираз x^2+y^2, тому доцільно перейти до полярної системи координат. З формул зв'язку з декартовою системою координат $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ і рівняння межі області (D) знаходимо, що $0 \le r \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Тоді

$$V = \iint\limits_{(\Delta)} r\Big(\sqrt{\frac{4}{9}-r^2}-r^2\Big)drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} r\Big(\sqrt{\frac{4}{9}-r^2}-r^2\Big)dr =$$

$$= 2\pi\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{4}{9}-r^2\Big)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}-\frac{r^4}{4}\Big)\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= 2\pi\Big(-\frac{1}{3}\Big(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\Big)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\Big(\frac{4}{9}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big) = \frac{19\pi}{162} \text{ (куб.од.).} \quad \triangleright$$

11. Знайти об'єм тіла (V), обмеженого поверхнями:

$$z = 4-6(x^2+y^2),\ z = 12y+4.$$

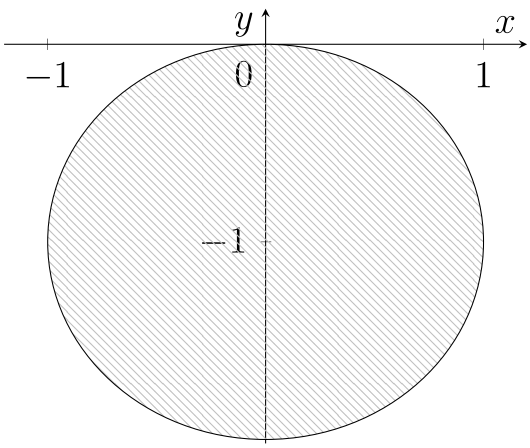

Рис. 8

Розв'язання. Перше рівняння задає параболоїд, утворений шляхом симетрії параболоїда $z = 4-6(x^2+y^2)$ відносно площини xOy з наступним перенесенням вздовж осі Oz на 4 одиниці вгору.

Друге рівняння – це рівняння площини, що проходить паралельно осі Ox і перетинає площину yOz по прямій $z = 12y+4$. Вона також проходить через вершину параболоїда і перетинає його по лінії, проекція якої на площину xOy

наступна: $12y+4=4-6(x^2+y^2)$ або $x^2+y^2+2y=0$, тобто $x^2+(y+1)^2=1$ (див рис. 8).

Об'єм тіла можна шукати, використовуючи як подвійний, так і потрійний інтеграл. В другому випадку при обчисленні потрійного інтеграла доцільно перейти до циліндричної системи координат, бо проекція області інтегрування на площину xOy є круговою (див. рис. 8). Отже, $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=z$.

$$V=\iiint\limits_{(V)} dxdydz=\iiint\limits_{(\Delta)} rdrd\varphi dz.$$

З формул зв'язку декартових і циліндричних координат знаходимо, що $-\pi\le\varphi\le 0$, $0\le r\le -2\sin\varphi$. Переходимо в потрійному інтегралі до повторних.

$$V=\int\limits_{-\pi}^{0}d\varphi\int\limits_{0}^{-2\sin\varphi}dr\int\limits_{12r\sin\varphi+4}^{4-6r^2}rdz=\int\limits_{-\pi}^{0}d\varphi\int\limits_{0}^{-2\sin\varphi}(4r-6r^3-12r^2\sin\varphi-4r)dr=$$

$$=\int\limits_{-\pi}^{0}\Big(-\frac{6r^4}{4}-\frac{12r^3}{3}\sin\varphi\Big)\Big|_0^{2\sin\varphi}d\varphi=\int\limits_{-\pi}^{0}(-24\sin^4\varphi-32\sin^4\varphi)d\varphi=$$

$$=-56\int\limits_{-\pi}^{0}\sin^4\varphi d\varphi=-56\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{(1-\cos 2\varphi)^2}{4}d\varphi=$$

$$=-14\int\limits_{-\pi}^{0}(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)d\varphi=14(\varphi-\sin 2\varphi)\Big|_{-\pi}^{0}-14\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{1+\cos 4\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=14\pi-7\varphi\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{14}{2}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{4}\Big|_{-\pi}^{0}=14\pi+7\pi=21\pi \text{ (куб.од.)}. \quad \triangleright$$

12. Знайти об'єм тіла (V), заданого нерівностями:

$$16\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 100,\ -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\leqslant z\leqslant\sqrt{\frac{x^2+y^2}{35}},\ 0\leqslant y\leqslant x.$$

Розв'язання. Перша нерівність описує частину простору, що знаходиться між концентричними сферами з центром в точці $O(0;0;0)$ радіусів 4 і 10 відповідно. Друга нерівність описує частину простору, що знаходиться вище конічної поверхні $z=-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ та нижче конічної поверхні $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}}$. Всі чотири поверхні є поверхнями обертання, для яких вісь Oz є спільною віссю обертання. Враховуючи це, при використанні формули $V=\iiint\limits_{(V)} dxdydz$ доцільно перейти до сферичної системи координат. Крім того, дві площини $y=0$ та $y=x$, які проходять через вісь Oz, вирізають частину простору, що знаходиться між сферами і конусами та яка складається з двох однакових частин.

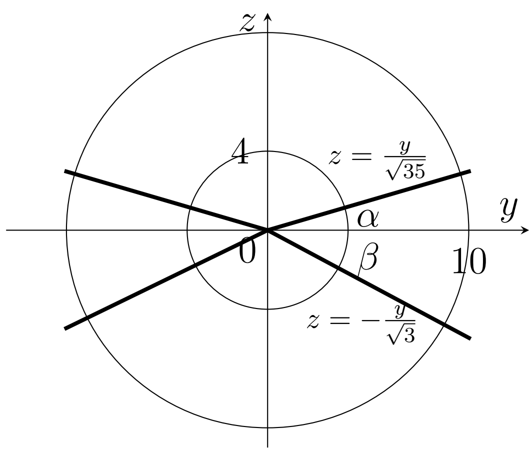

Рис. 9

Залежність між декартовими координатами точки $(x;y;z)$ і сферичними координатами тієї самої точки виражаються формулами $x=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le r\le+\infty$. Якобіан переходу – $I=r^2\sin\theta$.

Для знаходження меж зміни r і θ достатньо зробити переріз поверхонь обертання, наприклад, площиною yOz (див. рис. 9). З рисунка видно, що $4\le r\le 10$, а $\dfrac{\pi}{2}-\alpha\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}+\beta$. Оскільки $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{35}}$, то $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{35}}$, $\operatorname{tg}(-\beta)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, то $\beta=\dfrac{\pi}{6}$. Для знаходження меж зміни φ зробимо переріз поверхонь обертання площинами $y=0$ та $y=x$. В першому октанті кут між площинами рівний $\dfrac{\pi}{4}$, тому $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4}$. Отже,

$$V=\iiint\limits_{(V)} dxdydz=\iiint\limits_{(V')} r^2\sin\theta drd\varphi d\theta=$$

$$= 2\int\limits_4^{10} dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{35}}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}} r^2 \sin\theta d\theta = 2\int\limits_4^{10} r^2 dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (-\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{35}}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}} d\varphi =$$

$$= \frac{2r^3}{3}\Big|_4^{10} \cdot \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \cdot \Big(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\big(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{35}}\big)\Big) =$$

$$= \frac{2(1000-64)}{3} \cdot \frac{\pi}{4}\Big(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{\sqrt{35}}}{\sqrt{1+(\frac{1}{\sqrt{35}})^2}}\Big) = 156\pi\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\Big) = 104\pi \text{ (куб.од.).} \quad \triangleright$$

13. Тіло (V) задано поверхнями $x = 0$, $y = 0$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = z^2$, які його обмежують. Знайти масу тіла, якщо $\varrho(x, y, z) = 32z$ – густина тіла.

Розв'язання. Масу тіла (V) обчислюємо за формулою

$$m = \iiint\limits_{(V)} \varrho(x, y, z) dxdydz.$$

Поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ та $x^2 + y^2 = z^2$ – це поверхні обертання із спільною віссю обертання Oz. Тому доцільно перейти до сферичної системи координат. Умови $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ визначають, що тіло (V) знаходиться в першому октанті і обмежене верхньою частиною сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ та верхньою частиною конічної поверхні $x^2 + y^2 = z^2$. Переріз цих поверхонь, наприклад, площиною yOz, дає нам можливість знайти межі зміни r та θ (див. рис. 10).

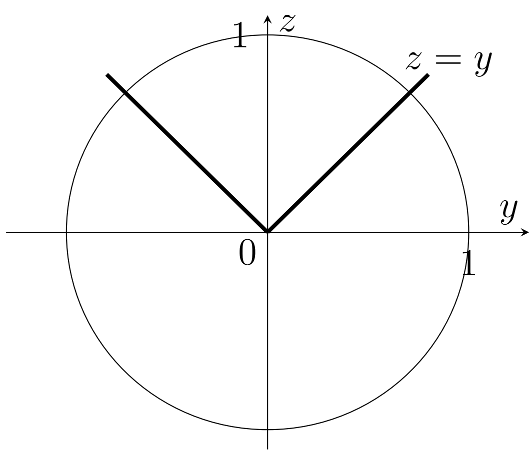

Рис. 10

Отже, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$. Оскільки тіло знаходиться в першому октанті, то $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Залежність між декартовими сферичними координатами виражаються формулами $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le r \le +\infty$. Якобіан переходу – $I = r^2\sin\theta$, то

$$m = \iiint\limits_{(V')} 32r\cos\theta r^2\sin\theta drd\varphi d\theta = 32\int\limits_0^1 r^3dr\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\cos\theta d\theta =$$

$$= \frac{32r^4}{4}\bigg|_0^1 \cdot \varphi\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\sin^2\theta}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = 8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi. \quad \triangleright$$

Індивідуальні завдання до розділу III

1. Обчислити поверхневий інтеграл по поверхні (S), де (S) – частина площини, що знаходиться в першому октанті.

1) $\iint\limits_{(S)} (7z+2)dS,\ (S): x+y+\dfrac{z}{2}=1;$

2) $\iint\limits_{(S)} (4x+7y+2z+1)dS,\ (S): 2x+\dfrac{y}{3}+2z=1;$

3) $\iint\limits_{(S)} (7x+y+2z+2)dS,\ (S): \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+z=1;$

4) $\iint\limits_{(S)} (1+y+11z)dS,\ (S): x+y+\dfrac{z}{3}=1;$

5) $\iint\limits_{(S)} (y-2z+4)dS,\ (S): 2x+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1;$

6) $\iint\limits_{(S)} (x+3y)dS,\ (S): \dfrac{x}{3}+2y+z=1;$

7) $\iint\limits_{(S)} (3x+2z)dS,\ (S): \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{9}=1;$

8) $\iint\limits_{(S)} (2x-y+3z-1)dS,\ (S): x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1;$

9) $\iint\limits_{(S)} (7x+9y)dS,\ (S): x+\dfrac{y}{3}+z=1;$

10) $\iint\limits_{(S)} (x+2y-z+1)dS,\ (S): \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1;$

11) $\iint\limits_{(S)} 7x dS,\ (S):\ x+\dfrac{y}{2}+4z=1;$

12) $\iint\limits_{(S)} (7x+4y+2z+1)dS,\ (S):\ \dfrac{x}{3}+2y+z=1;$

13) $\iint\limits_{(S)} (5x+y+4z+1)dS,\ (S):\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}=1;$

14) $\iint\limits_{(S)} (7x+y+z)dS,\ (S):\ x+\dfrac{y}{3}+z=1;$

15) $\iint\limits_{(S)} (1-2z)dS,\ (S):\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}+z=1;$

16) $\iint\limits_{(S)} (3x+2y)dS,\ (S):\ x+y+2z=1;$

17) $\iint\limits_{(S)} \dfrac{dS}{(1+x+z)^2},\ (S):\ x+y+z=1;$

18) $\iint\limits_{(S)} (5x-2y+4z+1)dS,\ (S):\ \dfrac{x}{2}+4y+\dfrac{z}{3}=1;$

19) $\iint\limits_{(S)} (x-2z)dS,\ (S):\ x+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1;$

20) $\iint\limits_{(S)} (9x+5y+2z)dS,\ (S):\ 3x+y+\dfrac{z}{9}=1;$

21) $\iint\limits_{(S)} (3x+y)dS,\ (S):\ 2x+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1;$

22) $\iint\limits_{(S)} (x+y-2z)dS,\ (S):\ x+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1;$

23) $\iint\limits_{(S)} (x+2z+2)dS,\ (S):\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+z=1;$

24) $\iint\limits_{(S)} (x+2y+2z)dS,\ (S):\ 8x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1;$

25) $\iint\limits_{(S)} (x-2y+z)dS,\ (S):\ 2x+\dfrac{y}{6}+z=1;$

2. Обчислити поверхневі інтеграли по поверхні (S).

1) Обчислити координати центра ваги однорідного параболоїда $2z = 4 - (x^2 + y^2)$, розташованого над площиною Oxy;

2) $\iint\limits_{(S)} x^2 dS$, де (S) – частина параболоїда $4z = x^2 + y^2$ між площинами $y = 0,\ z = 4$;

3) Обчислити масу півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ (z \geqslant 0)$, якщо поверхнева густина $\varrho(x, y, z) = \dfrac{z}{R}$;

4) Обчислити масу частини гіперболічного параболоїда $2z = x^2 - y^2$, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 1$, якщо $\varrho(x, y, z) = |z|$;

5) $\iint\limits_{(S)} z dS$, де (S) – менший сегмент півсфери $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, обмежений площиною $z = 4$;

6) Обчислити координати центра ваги однорідної площини $z = x$, обмеженої площинами $x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0$;

7) $\iint\limits_{(S)} xyz dS$, де (S) – параболоїд $z = x^2 + y^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$;

8) $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dS$, де (S) – частина конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що міститься всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2x$;

9) $\iint\limits_{(S)} z dS$, де (S) – частина поверхні $x^2 + z^2 = 2az,\ (a > 0)$, що вирізана поверхнею $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

10) $\iint\limits_{(S)} y dS$, де (S) – півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

11) Обчислити момент інерції еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ відносно осі Ox;

12) Обчислити масу частини поверхні $z = xy$ всередині циліндра $x^2 + y^2 = 1$, якщо поверхнева густина $\varrho(x, y, z) = x^2 + y^2$;

13) Обчислити координати центра ваги однорідної півсфери $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

14) Обчислити момент інерції відносно осі Oz бічної поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \leqslant z \leqslant a$;

15) $\iint\limits_{(S)} (x^2 - y^2)dS$, де (S) – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

16) Обчислити момент інерції еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ відносно осі Oz;

17) Обчислити масу, розподілену по поверхні куба $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, якщо $\varrho(x, y, z) = \sqrt[3]{|xyz|}$;

18) $\iint\limits_{(S)} (x + y + z)dS$, де (S) – верхня частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

19) Обчислити момент інерції відносно осі Ox частини параболоїда $2x = y^2 + z^2$, обмеженого площиною $x = 1$;

20) Обчислити масу сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, якщо поверхнева густина $\varrho(x, y, z) = x^2 + y^2$;

21) Обчислити масу параболічної оболонки $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $(0 \leqslant z \leqslant 1)$, якщо поверхнева густина $\varrho(x, y, z) = z$;

22) Обчислити момент інерції відносно осі Ox частини параболоїда $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \leqslant z \leqslant 1$;

23) $\iint\limits_{(S)} x dS$, де (S) – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, що лежить у першому октанті;

24) $\iint\limits_{(S)} x^2 y^2 dS$, де (S) – півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$;

25) $\iint\limits_{(S)} \dfrac{dS}{r^2}$, де (S) – циліндр $x^2 + y^2 = R^2$, обмежений площинами $z = 0$, $z = H$, r – відстань від поверхні до початку координат.

3. Обчислити поверхневий інтеграл по поверхні (S) :

1) $\iint\limits_{(S)} z dx dy$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x - y + z = 1$ з координатними площинами;

2) $\iint\limits_{(S)} x dx dz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x - y + z = 1$ з координатними площинами;

3) $\iint\limits_{(S)} yzdydz$, де (S) – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $z=0,\ y=0,\ x=0,\ x+y+z=1$;

4) $\iint\limits_{(S)} (x-y)dxdy$, де (S) – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2+y^2=z^2$, $(0\leqslant z\leqslant 1)$;

5) $\iint\limits_{(S)} (2x-y+z)dxdz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=5$ з координатними площинами;

6) $\iint\limits_{(S)} (x+y+z)dxdz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=3$ з координатними площинами;

7) $\iint\limits_{(S)} xdydz$, де (S) – внутрішня сторона верхньої півсфери $x^2+y^2+z^2=4,\ z\geqslant 0$;

8) $\iint\limits_{(S)} (x^2+2z)dydz$, де (S) – зовнішня сторона куба, обмеженого площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1$;

9) $\iint\limits_{(S)} xydxdy$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=2$ з координатними площинами;

10) $\iint\limits_{(S)} y^2dxdz$, де (S) – зовнішня сторона частини сфери $x^2+y^2+z^2=4$, що лежить у першому октанті;

11) $\iint\limits_{(S)} ydydz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x-y+z=1$ з координатними площинами;

12) $\iint\limits_{(S)} xydxdz$, де (S) – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$;

13) $\iint\limits_{(S)} xdydz+ydxdz+zdxdy$, де (S) – зовнішня сторона куба, обмеженого площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=1,\ y=1,\ z=1$;

14) $\iint\limits_{(S)} z^2dxdy$, де (S) – зовнішня частина еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$;

15) $\iint\limits_{(S)}(x+y)dydz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=3$ з координатними площинами;

16) $\iint\limits_{(S)} xzdxdz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=3$ з координатними площинами;

17) $\iint\limits_{(S)} x^2y^2zdxdz$, де (S) – додатня сторона нижньої половини сфери $x^2+y^2+z^2=9$;

18) $\iint\limits_{(S)} zdxdy$, де (S) – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=9$;

19) $\iint\limits_{(S)} xzdxdz$, де (S) – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$;

20) $\iint\limits_{(S)} yzdydz$, де (S) – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=4$ з координатними площинами;

21) $\iint\limits_{(S)} ydxdz+zdxdy$, де (S) – зовнішня сторона куба, обмеженого площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=2,\ y=2,\ z=2$;

22) $\iint\limits_{(S)}(x+z)dydz$, де (S) – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$;

23) $\iint\limits_{(S)}(y-z)dydz$, де (S) – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2+y^2=z^2$, $(0\leqslant z\leqslant 2)$;

24) $\iint\limits_{(S)} x^2dydz$, де (S) – зовнішня сторона частини сфери $x^2+y^2+z^2=4$, що лежить у першому октанті;

25) $\iint\limits_{(S)}(z-x)dxdz$, де (S) – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2+y^2=z^2$, $(0\leqslant z\leqslant 3)$.

Зразки розв'язування індивідуальних завдань до розділу III

1. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{(S)} (x-2y+z)ds$ по поверхні (S), де (S) – частина площини $2x+\dfrac{y}{6}+z=1$, що міститься в першому октанті.

Розв'язання. Якщо поверхню (S) можна задати в явному вигляді $z = z(x,y)$, $(x,y) \in (\overline{P})$, то поверхневий інтеграл I-го роду обчислюється за формулою

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(\overline{P})} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(z'_x(x,y))^2+(z'_y(x,y))^2}dxdy.$$

Рівняння площини $z = 1-2x-\dfrac{1}{6}y$, $(x,y) \in (\overline{P})$ (див. рис. 11).

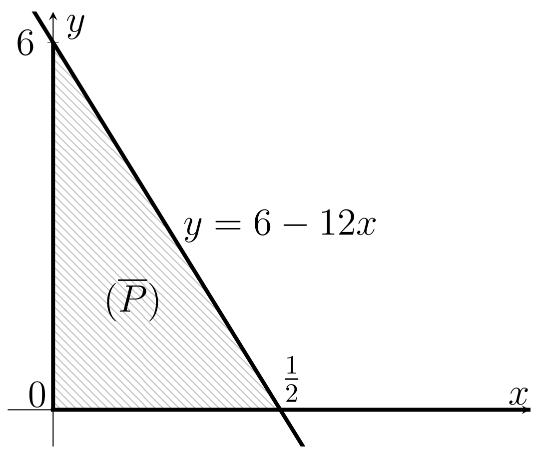

Рис. 11

Отже,

$$\iint\limits_{(S)} (x-2y+z)ds = \iint\limits_{(\overline{P})} \Big(x-2y+1-2x-\frac{1}{6}y\Big)\sqrt{1+(-2)^2+\Big(-\frac{1}{6}\Big)^2}dxdy =$$

$$= \frac{\sqrt{181}}{36}\int\limits_0^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_0^{6-12x}(-6x-13y+6)dy = \frac{\sqrt{181}}{36}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}(-6xy-\frac{13}{2}y^2+6y)\Big|_0^{6-12x}dx =$$

$$= \frac{\sqrt{181}}{36}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\Big(-36x+72x^2-\frac{13}{2}(36-144x+144x^2)+36-72x\Big)dx =$$

$$= \sqrt{181}\Big(-\frac{24}{3}x^3+\frac{23}{2}x^2-\frac{11}{2}x\Big)\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt{181}\Big(-\frac{24}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{23}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{11}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big) = -\frac{7\sqrt{181}}{8}. \quad \triangleright$$

2. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{(S)} \frac{ds}{r^2}$, де (S) – циліндр $x^2+y^2=R^2$, обмежений площинами $z=0, z=H$, r – відстань від поверхні до початку координат.

Розв'язання. Нехай точка $M(x,y,z)$ належить циліндру (див. рис. 12).

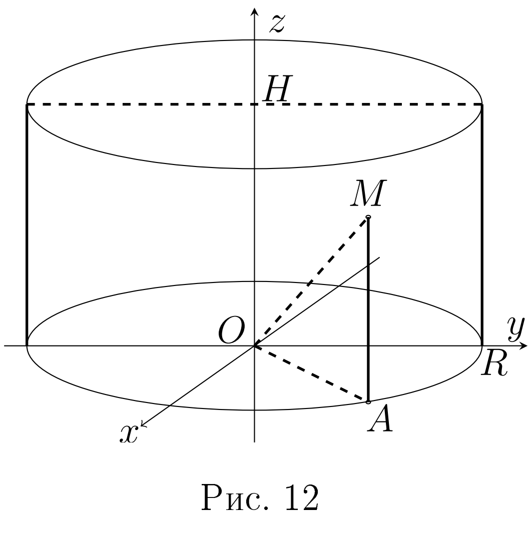

Рис. 12

Оскільки ΔOAM – прямокутний, то $OM^2 = OA^2 + AM^2 = R^2 + z^2$. Поверхню (S) задамо в параметричній формі: $z=u$, $x=R\cos v$, $y=R\sin v$, де

$$(u,v)\in(\overline{P}) = \{(u,v): 0\le u\le H,\ 0\le v\le 2\pi\}.$$

Обчислення поверхневого інтеграла I-го роду, коли поверхня задана в параметричному вигляді $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ здійснюється за формулою

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(\overline{P})} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

де

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2,$$

$$G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2,$$

$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v.$$

Знайдемо спочатку E, G, F :

$$E = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1,$$

$$G = (-R\sin v)^2 + (R\cos v)^2 + 0 = R^2,$$

$$F = 0 \cdot (R\sin v) + 0 \cdot (-R\cos v) + 1 \cdot 0 = 0.$$

Отже,

$$\iint\limits_{(S)} \frac{ds}{R^2+z^2} = \iint\limits_{\overline{P}} \frac{1}{R^2+u^2}\sqrt{1 \cdot R^2 - 0}dudv =$$

$$= R\int\limits_0^{2\pi} dv \int\limits_0^H \frac{du}{R^2+u^2} = 2\pi R \cdot \frac{1}{R}\operatorname{arctg}\frac{u}{R}\Big|_0^H = 2\pi \operatorname{arctg}\frac{H}{R}. \quad \triangleright$$

3. Обчислити поверхневий інтеграл II-го роду $\iint\limits_{(S)}(z-x)dxdz$ по поверхні (S), де (S) – зовнішня сторона конічної поверхні $x^2+y^2=z^2$, $(0 \leqslant z \leqslant 3)$.

Розв'язання. Якщо поверхня задана в явному вигляді $z = z(x,y)$, $(x,y) \in (\overline{P})$, то поверхневий інтеграл по зовнішній стороні поверхні (вектор нормалі утворює гострий кут з віссю Oz) обчислюється за формулою

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dydx =$$

$$= \iint\limits_{(\overline{P})} (-P(x,y,z(x,y))z'_x(x,y) - Q(x,y,z(x,y))z'_y(x,y) + R(x,y,z(x,y)))dxdy.$$

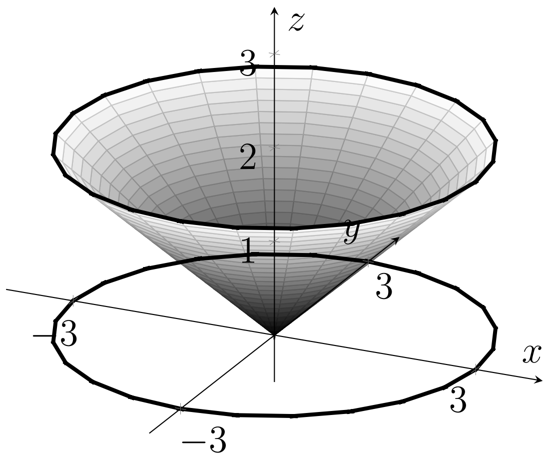

Рис. 13

При $z \geq 0$ рівняння конічної поверхні має вигляд $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, причому $x^2 + y^2 \leq 9$ (див. рис. 13). В нашому випадку

$$P(x, y, z) = R(x, y, z) = 0,$$

тому

$$I = \iint\limits_{(S)} (z - x) dx dz = \iint\limits_{(\overline{P})} (x - \sqrt{x^2 + y^2}) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

де $(\overline{P}) = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 9\}$. Переходимо до полярної системи координат. Тоді

$$I = \int\limits_0^3 dr \int\limits_0^{2\pi} (r \cos \varphi - r) \frac{r \sin \varphi}{r} \cdot r d\varphi = \int\limits_0^3 r^2 dr \int\limits_0^{2\pi} (\cos \varphi - 1) \sin \varphi d\varphi =$$

$$= \frac{r^3}{3} \Big|_0^3 \cdot \left(\frac{\sin^2 \varphi}{2} + \cos \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad \triangleright$$

Індивідуальні завдання до розділу IV

1. Обчислити потік векторного поля $\vec{u}$ через частину площини σ розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю Oz).

1) $\vec{u} = y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + y + z = 1;$

2) $\vec{u} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 5z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + \dfrac{z}{2} = 1;$

3) $\vec{u} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1;$

4) $\vec{u} = 2x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}, \quad \sigma: \ 2x + y + z = 1;$

5) $\vec{u} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ \dfrac{x}{3} + y + \dfrac{z}{2} = 1;$

6) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ 2x + 3y + z = 1;$

7) $\vec{u} = y\vec{j} + 3z\vec{k}, \quad \sigma: \ \dfrac{x}{2} + y + z = 1;$

8) $\vec{u} = 2x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + y + z = 1;$

9) $\vec{u} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 8z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + \dfrac{z}{2} = 1;$

10) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1;$

11) $\vec{u} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ 2x + 3y + z = 1;$

12) $\vec{u} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j}, \quad \sigma: \ x + y + z = 1;$

13) $\vec{u} = -x\vec{i} + y\vec{j} + 12z\vec{k}, \quad \sigma: \ 2x + \dfrac{y}{2} + z = 1;$

14) $\vec{u} = x\vec{i} + 3y\vec{j} - z\vec{k}, \quad \sigma: \ \dfrac{x}{3} + y + \dfrac{z}{2} = 1;$

15) $\vec{u} = x\vec{i} + 4y\vec{j} + 5z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + \dfrac{z}{2} = 1;$

16) $\vec{u} = x\vec{i} + 9y\vec{j} + 8z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + 3z = 1;$

17) $\vec{u} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + y + z = 1;$

18) $\vec{u} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + 3z = 1;$

19) $\vec{u} = x\vec{i} - y\vec{j} + 6z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + \dfrac{z}{2} = 1;$

20) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}, \quad \sigma: \ 2x + \dfrac{y}{2} + z = 1;$

21) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + y + z = 1;$

22) $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + y + z = 1;$

23) $\vec{u} = 2x\vec{i} + 3y\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad \sigma: \ 2x + 3y + z = 1;$

24) $\vec{u} = -x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + 3z = 1;$

25) $\vec{u} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}, \quad \sigma: \ x + 2y + 3z = 1.$

2. Обчислити потік векторного поля $\vec{u}$ через замкнену поверхню σ (нормаль зовнішня).

1) $\vec{u} = 2(z-y)\vec{j} + (x-z)\vec{k}, \ \sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = z, \ z = 0, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

2) $\vec{u} = 6x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k}, \ \sigma: \begin{cases} 3 - 2(x^2 + y^2) = z, \\ x^2 + y^2 = z^2, \ z \geqslant 0; \end{cases}$

3) $\vec{u} = 8x\vec{i} - 2y\vec{j} + x\vec{k}, \ \sigma: \begin{cases} x + y = 1, \ x = 0, \ y = 0, \\ x^2 + y^2 = z, \ z = 0; \end{cases}$

4) $\vec{u} = 2x\vec{i} + z\vec{k}, \ \sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = z, \\ x^2 + y^2 = 4, \ z = 0; \end{cases}$

5) $\vec{u} = z\vec{i} - 4y\vec{j} + 2x\vec{k}, \ \sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 1; \end{cases}$

6) $\vec{u} = (y + 2z)\vec{i} - y\vec{j} + 3z\vec{k}, \ \sigma: \begin{cases} 9 - \dfrac{2}{3}(x^2 + y^2) = z, \\ x^2 + y^2 = z^2, \ z \geqslant 0; \end{cases}$

7) $\vec{u} = (y + z)\vec{i} + (x - 2y + z)\vec{j} + x\vec{k}, \ \sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = z, \ z = 0; \end{cases}$

8) $\vec{u} = (x + z)\vec{i} + (z + y)\vec{k}, \ \sigma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x, \ z = 0, \ z \geqslant 0; \end{cases}$

9) $\vec{u} = (z+y)\vec{i} + y\vec{j} - x\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + z^2 = 2y, \\ y = 2; \end{cases}$

10) $\vec{u} = -2x\vec{i} + z\vec{j} + (x+y)\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2y, \\ x^2 + y^2 = z,\ z = 0; \end{cases}$

11) $\vec{u} = (2x+y)\vec{i} + (y+2k)\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} z = 2 - 4(x^2 + y^2), \\ z = 4(x^2 + y^2); \end{cases}$

12) $\vec{u} = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (z+x)\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} y = 2x,\ y = 4x, \\ x = 1,\ z = y^2,\ z = 0; \end{cases}$

13) $\vec{u} = x\vec{i} - (x+2y)\vec{j} + y\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = z,\ z = 0, \\ x + 2y + 3z = 6; \end{cases}$

14) $\vec{u} = z\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4z, \\ z = 4; \end{cases}$

15) $\vec{u} = 3x\vec{i} - z\vec{j},\ \sigma : \begin{cases} 6 - x^2 - y^2 = z, \\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geqslant 0; \end{cases}$

16) $\vec{u} = y\vec{i} + (x+2y)\vec{j} + x\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x, \\ x^2 + y^2 = z,\ z = 0; \end{cases}$

17) $\vec{u} = (2x-3z)\vec{i} + (3x+2z)\vec{j} + (x+y+z)\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 4 - x - y,\ z = 0; \end{cases}$

18) $\vec{u} = x\vec{i} + z\vec{j} - y\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} 4 - 2(x^2 + y^2) = z, \\ 2(x^2 + y^2) = z; \end{cases}$

19) $\vec{u} = -2y\vec{i} + x\vec{j} + 3z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 2x; \end{cases}$

20) $\vec{u} = (z+y)\vec{i} + (x-z)\vec{j} + x\vec{j} + z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 3x + 4y + z = 12,\ z = 0; \end{cases}$

21) $\vec{u} = (3x - y - z)\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ z = 2y; \end{cases}$

22) $\vec{u} = z\vec{i} + (3y - x)\vec{j} - z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + 2 = z,\ z = 0; \end{cases}$

23) $\vec{u} = 4x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} 3x + 2y = 12, \\ 3x + y = 6,\ x + y + z = 6,\ y = 0,\ z = 0; \end{cases}$

24) $\vec{u} = (2y - 15x)\vec{i} + (z - y)\vec{j} - (x - 3y)\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = z, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4},\ z = 0; \end{cases}$

25) $\vec{u} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k},\ \sigma : \begin{cases} y = x^2,\ y = 4x^2,\ y = 1, \\ x \geqslant 0,\ z = y,\ z = 0. \end{cases}$

3. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{u}$ по замкненому контуру (L), використовуючи формулу Гріна.

1) $\vec{u} = (xy + x + y)\vec{i} + (xy + x - y)\vec{j}, \quad (L) : (x - 1)^2 + y^2 = 1;$

2) $\vec{u} = (2y - x)\vec{i} + xy\vec{j}, \quad (L) : x = 0,\ y = 0,\ x + y = 2;$

3) $\vec{u} = (1 - x^2)\vec{i} + x(1 + y^2)\vec{j}, \quad (L) : x^2 + y^2 = 1;$

4) $\vec{u} = 2xy\vec{i} - (x + y)\vec{j}, \quad (L) : y = 3,\ y = x^2 - 1;$

5) $\vec{u} = (x^2 - y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}, \quad (L) : y = 4 - x^2,\ y = 0.$

Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{u}$ по замкненому контуру (L), використовуючи формулу Стокса.

6) $\vec{u} = (x + 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}, \quad (L) : x + y + z = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

7) $\vec{u} = (x + y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y + z)\vec{k}, \quad (L) : x + y + z = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

8) $\vec{u} = z\vec{j} - y\vec{k}, \quad (L) : x^2 + y^2 = 4,\ x + 2z = 5;$

9) $\vec{u} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}, \quad (L) : x^2 + y^2 = 9,\ z = 0;$

10) $\vec{u} = (2z - x)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} + 3z\vec{k}, \quad (L) : x + 4y + z = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

11) $\vec{u} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$, $\quad (L):\ x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 1;$

12) $\vec{u} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, $\quad (L):\ 2(1 - x^2 - y^2) = z,\ z = 0;$

13) $\vec{u} = (z^2 - x^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j} + (y^2 - z^2)\vec{k}$, $\quad (L):\ x^2 + y^2 + z = 6,\ x^2 + y^2 = z^2;$

14) $\vec{u} = (x - y + 3z)\vec{i} + (y - 3x + z)\vec{j} + (x - 3y + z)\vec{k}$, $(L):\ 2x + 3y + 6z = 3,$ $x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

15) $\vec{u} = (x + 3y + 2z)\vec{i} + (2x + z)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$, $\quad (L):\ 3x + 2y + 6z = 6,$ $x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

16) $\vec{u} = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$, $\quad (L):\ x + y + z = 1,$ $x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

17) $\vec{u} = -y\vec{i} + 2x\vec{j} + k\vec{k}$, $\quad (L):\ (x - 2)^2 + y^2 = 1,\ z = 0;$

18) $\vec{u} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$, $\quad (L):\ x + y + z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

19) $\vec{u} = y\vec{i} - x\vec{j} + 2\vec{k}$, $\quad (L):\ x^2 + y^2 = z,\ z = 1;$

20) $\vec{u} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$, $\quad (L):\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.$

Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{u}$ по замкненому контуру (L).

21) $\vec{u} = y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$, $\quad (L):\ x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 3;$

22) $\vec{u} = y\vec{i} - x\vec{k}$, $\quad (L):\ x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t,\ z = 0,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0;$

23) $\vec{u} = z\vec{i} - x\vec{k}$, $\quad (L)$ – відрізок прямої між точками $A(1;1;1)$, $B(3;2;1)$;

24) $\vec{u} = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + x\vec{k}$, $\quad (L):\ x = y^2 + z^2,\ x = 9;$

25) $\vec{u} = 2x^2\vec{i} - y\vec{k}$, $\quad (L)$ – відрізок прямої між точками $A(2;0;1)$, $B(3;2;2)$.

4. Перевірити, чи буде векторне поле $\vec{u}$ потенціальним і соленоїдним. Якщо поле $\vec{u}$ потенціальне, знайти його потенціал.

1) $\vec{u} = (3x - yz)\vec{i} + (3y - xz)\vec{j} + (3z - xy)\vec{k};$

2) $\vec{u} = (8x - 5yz)\vec{i} + (8y - 5xz)\vec{j} + (8z - 5xy)\vec{k};$

3) $\vec{u} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k};$

4) $\vec{u} = (x^2 + yz)\vec{i} + (y^2 + xz)\vec{j} + (z^2 + xy)\vec{k};$

5) $\vec{u} = (6xy + z)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + x\vec{k};$

6) $\vec{u} = (10x - 3yz)\vec{i} + (10y - 3xz)\vec{j} + (10z - 3xy)\vec{k};$

7) $\vec{u} = (6x + 7yz)\vec{i} + (6y + 7xz)\vec{j} + (6z + 7xy)\vec{k};$

8) $\vec{u} = (8x + 5yz)\vec{i} + (8y + 5xz)\vec{j} + (8z + 5xy)\vec{k}$;

9) $\vec{u} = (x + yz)\vec{i} + (y + xz)\vec{j} + (z + xy)\vec{k}$;

10) $\vec{u} = yz^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$;

11) $\vec{u} = (4x - 7yz)\vec{i} + (4y - 7xz)\vec{j} + (4z - 7xy)\vec{k}$;

12) $\vec{u} = (11x - 3yz)\vec{i} + (11y - 3xz)\vec{j} + (11z - 3xy)\vec{k}$;

13) $\vec{u} = (2x + 7yz)\vec{i} + (2y + 7xz)\vec{j} + (2z + 7xy)\vec{k}$;

14) $\vec{u} = (x - 2yz)\vec{i} + (y - 2xz)\vec{j} + (z - 2xy)\vec{k}$;

15) $\vec{u} = yz(2x + y + z)\vec{i} + xz(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$;

16) $\vec{u} = (4x - 2yz)\vec{i} + (4y - 7xz)\vec{j} + (4z - 7xy)\vec{k}$;

17) $\vec{u} = (x + 2yz)\vec{i} + (y + 2xz)\vec{j} + (z + 2xy)\vec{k}$;

18) $\vec{u} = (9x + 5yz)\vec{i} + (9y + 5xz)\vec{j} + (9z + 5xy)\vec{k}$;

19) $\vec{u} = (3x + yz)\vec{i} + (3y + xz)\vec{j} + (3z + xy)\vec{k}$;

20) $\vec{u} = (7x - 3yz)\vec{i} + (7y - 3xz)\vec{j} + (7z - 3xy)\vec{k}$;

21) $\vec{u} = (x + 7yz)\vec{i} + (y + 7xz)\vec{j} + (z + 7xy)\vec{k}$;

22) $\vec{u} = (7x - 2yz)\vec{i} + (7y - 2xz)\vec{j} + (7z - 2xy)\vec{k}$;

23) $\vec{u} = (3x + 4yz)\vec{i} + (3y + 4xz)\vec{j} + (3z + 4xy)\vec{k}$;

24) $\vec{u} = (12x + yz)\vec{i} + (12y + xz)\vec{j} + (12z + xy)\vec{k}$;

25) $\vec{u} = (5x + 4yz)\vec{i} + (5y + 4xz)\vec{j} + (5z + 4xy)\vec{k}$.

Зразки розв'язування індивідуальних завдань до розділу IV

1. Обчислити потік векторного поля $\vec{u} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}$ через частину площини $x + 2y + 3z = 1$, розташовану в першому октанті (нормаль утворює гострий кут з віссю Oz).

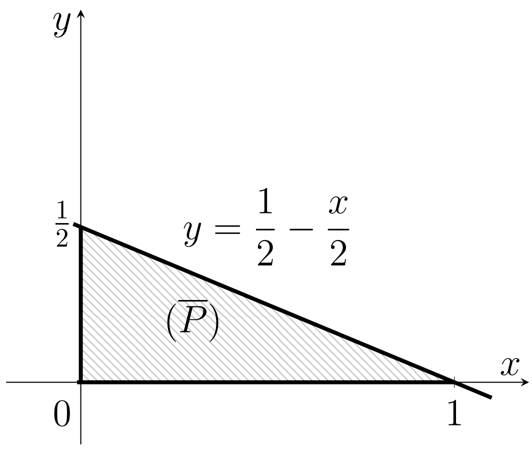

Рис. 14

Розв'язання. Потік векторного поля

$$\vec{u} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

через поверхню (S) у напрямі нормалі $\vec{n}$ обчислюється за формулою

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} \big(P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\big) dS,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі $\vec{n}$. Враховуючи формули зв'язку між поверхневими інтегралами I-го та II-го роду, маємо також, що

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy.$$

Скористаємось, наприклад, другою формулою і врахуємо, що поверхню можна задати у явному вигляді $z = z(x, y)$, $(x, y) \in (\overline{P})$ (див. рис. 14). Тоді

$$\Pi = \iint\limits_{(S)} \big(- P(x, y, z) z'_x(x, y) - Q(x, y, z) z'_y(x, y) + R(x, y, z)\big) dxdy.$$

Рівняння площини має вигляд $z = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{2}{3}y$. Тоді

$$\Pi = \iint\limits_{(\overline{P})} \Big(- 8x \cdot \Big(- \frac{1}{3}\Big) - 11y \cdot \Big(- \frac{2}{3}\Big) + 17\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\Big)\Big) dxdy =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} dy \int\limits_0^{1-2y} (8x + 22y + 17 - 17x - 34y) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Big(- \frac{9}{2}x^2 - 12xy + 17x\Big)\Big|_0^{1-2y} dy =$$

$$= \frac{1}{6} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (-9(1 - 2y)^2 - 24(1 - 2y)y + 34(1 - 2y)) dy =$$

$$= \frac{1}{6} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (-9 + 36y - 36y^2 - 24y + 48y^2 + 34 - 68y) dy = \frac{1}{6} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (12y^2 - 56y + 25) dy =$$

$$= \frac{1}{6}(4y^3 - 28y^2 + 25y)\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \cdot \Big(\frac{1}{2} - 7 + \frac{25}{2}\Big) = 1. \quad \triangleright$$

2. Обчислити потік векторного поля $\vec{u} = 2x\vec{j} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$, через замкнену поверхню $\sigma : \begin{cases} y = x^2,\ y = 4x^2,\ y = 1, \\ x \geqslant 0,\ z = y,\ z = 0, \end{cases}$ при умові, що нормаль зовнішня.

Розв'язання. При обчисленні потоку векторного поля

$$\vec{u} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

через поверхню (S^+) можна скористатись формулою Гауса-Остроградського

$$\Pi = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{u} dxdydz = \iiint\limits_{(V)} \Big(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\Big) dxdydz,$$

де (V) – зв'язна область, яку обмежує поверхня (S).

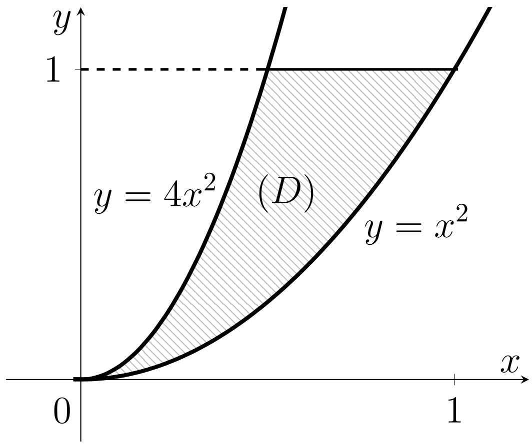

Рис. 15

В нашому випадку область (V) знизу обмежена площиною $z = 0$, зверху – площиною $z = y$. При проектуванні тіла (V) на площину xOy отримуємо плоску фігуру (D) (див. рис. 15). В результаті отримаємо, що

$$(V) = \left\{(x, y, z): \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \ \frac{\sqrt{y}}{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{y}, \ 0 \leqslant z \leqslant y\right\}.$$

Отже,

$$\iiint\limits_{(V)} (2+2+1)dxdydz = 5\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} dx \int\limits_0^y dz = 5\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} ydx =$$

$$= 5\int\limits_0^1 yx\Big|_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} dy = 5\int\limits_0^1 \frac{y\sqrt{y}}{2}dy = \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}y^2\sqrt{y}\Big|_0^1 = 1. \quad \triangleright$$

3. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{u} = y^2z^2\vec{j} + x^2z\vec{j} + x\vec{k}$ по замкнутому контуру $(L) = \left\{(x, y, z): \ x = \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4}, \ x = 4\right\}$.

Розв'язання. Циркуляція векторного поля

$$\vec{u} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

вздовж замкнутого контуру (Γ) обчислюється за формулою

$$L = \int\limits_{(\Gamma)} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Ми можемо скористатися формулою Стокса або безпосередньо обчислити криволінійний інтеграл, задавши криву (Γ) в параметричній формі: $x = 4$, $y = 6\cos t, \ z = 4\sin t$, де $t \in [0; 2\pi]$.

Отже,

$$L = \int\limits_0^{2\pi} \Big((6\cos t)^2 (4\sin t)^2 \cdot 0 + 4^2 \cdot 4\sin t(-6\sin t) + 4 \cdot 4\cos t \Big) dt =$$

$$= -4^2 \cdot 4 \cdot 6 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2} dt + (16\sin t)\Big|_0^{2\pi} = -192\Big(t - \frac{\sin 2t}{2}\Big)\Big|_0^{2\pi} = -384\pi. \quad \triangleright$$

4. Перевірити, чи буде векторне поле

$$\vec{u} = (5x + 4yz)\vec{i} + (5y + 4xz)\vec{j} + (5z + 4xy)\vec{k}$$

потенціальним і соленоїдним. Якщо поле $\vec{u}$ потенціальне, знайти його потенціал.

Розв'язання. Для того, щоб векторне поле було потенціальним, необхідно і достатньо виконання умов

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

В нашому випадку

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 4z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 4y, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 4x.$$

Отже, поле є потенціальне.

Знайдемо функцію $\varphi(x, y, z)$, як скалярний потенціал поля $\vec{u}$ з рівностей:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x, y, z) = 5x + 4yz,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x, y, z) = 5y + 4xz,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = R(x, y, z) = 5z + 4xy.$$

Інтегруючи першу рівність по x, отримаємо

$$\varphi(x, y, z) = \frac{5x^2}{2} + 4xyz + c_1(y, z).$$

Диференціюємо по y, використовуючи другу умову, отримуємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4xz + \frac{\partial}{\partial y} c_1(y, z) = 4xz + 5y.$$

Звідси $\dfrac{\partial}{\partial y} c_1(y,z) = 5y$. Інтегруємо по y : $c_1(y,z) = \dfrac{5y^2}{2} + c_2(z)$. Таким чином,

$$\varphi(x,y,z) = \frac{5x^2}{2} + 4xyz + \frac{5y^2}{2} + c_2(z).$$

Диференціюємо по z і використовуємо третю умову:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 4xy + \frac{d}{dz} c_2(z) = 5z + 4xy.$$

Звідси $c_2(z) = \dfrac{5z^2}{2} + c$, де $c = \text{const}$.

Таким чином, отримуємо в результаті

$$\varphi(x,y,z) = \frac{5x^2}{2} + \frac{5y^2}{2} + \frac{5z^2}{2} + 4xyz + c.$$

Зауважимо, що

$$\varphi(x,y,z) = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Для того, щоб векторне поле $\vec{u}$ було соленоїдним, необхідно і достатньо, щоб $\operatorname{div}\vec{u} = 0$. Оскільки

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

то в нашому випадку маємо:

$$\operatorname{div}\vec{u} = 5 + 5 + 5 = 15.$$

Отже поле не є соленоїдним. $\triangleright$

Рекомендована література

1. *Виноградова И.А.* Математический анализ в задачах и упражнениях / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 352 с.
2. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учебное пособие / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.
3. *Денисьєвський М.О.* Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних / М.О. Денисьєвський, А.В. Чайковський. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2012. — 276 с.
4. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ. Сборник задач / А.Я. Дороговцев. – К.: Вища школа, 1987. – 408 с.
5. *Дюженкова Л.І.* Математичний аналіз у задачах і прикладах: Навчальний посібник / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко, Г.О. Михалін, М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2002. – Ч.2. – 470 с.
6. *Заболоцький М.В.* Математичний аналіз: Підручник / М.В. Заболоцький, О.Г. Сторож, С.І. Тарасюк. – К.: Знання, 2008. – 421 с.
7. *Загороднюк А.В.* Практикум з математичного аналізу. – Частина V/ А.В. Загороднюк, М.І. Копач, В.В. Кравців, Г.П. Малицька, М.В. Марцінків, А.В. Соломко, С.В. Шарин. – 3-тє вид., переробл. і доповн. – Івано-Франківськ: Сімик, 2017. – 168 с.
8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т.3. – 662 с.
9. *Шкіль М.І.* Математичний аналіз: Підручник / М.І. Шкіль. – К.: Вища школа, 2005. – Ч.2. – 510 с.