

М.М. Осипчук, Р.В. Шевчук, З.М. Нитребич

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ



навчальний посібник

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»**

М.М. Осипчук, Р.В. Шевчук, З.М. Нитребич

**ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

Навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей

Львів
Растр-7
2024

УДК 519.2(075.8)

Е 50

Рекомендувала Науково-методична рада
Національного університету «Львівська політехніка»
як навчальний посібник для студентів
технічних спеціальностей
(протокол №81 від 26 вересня 2024 року)

Автори:

М.М. Осипчук, доктор фізико-математичних наук, професор;

Р.В. Шевчук, кандидат фізико-математичних наук, доцент;

З.М. Нитребич, доктор фізико-математичних наук, професор

Рецензенти:

Копитко В.І., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики Ченстоховського політехнічного університету;

Заторський Р.І., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики та інформатики і методики навчання Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

Мединський І.П., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри прикладної математики Національного університету «Львівська політехніка».

Е 50 Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики:

навчальний посібник. / М.М. Осипчук, Р.В. Шевчук,

З.М. Нитребич. Львів: Растр-7, 2024. – 181с.

ISBN 978-617-8537-06-7

У навчальному посібнику викладено основи теорії ймовірностей та математичної статистики. Наведено приклади і задачі, які ілюструють основні поняття, а також пояснюють можливе застосування теоретичного матеріалу.

Навчальний посібник призначений для студентів технічних спеціальностей.

УДК 519.2(075.8)

© Осипчук М.М., Шевчук Р.В.,
Нитребич З.М., 2024

© Національний університет
«Львівська політехніка», 2024

© Видавництво «Растр-7», 2024

ISBN 978-617-8537-06-7

Розділ 1

Випадкові події та ймовірності

1.1 Стохастичний експеримент та ймовірнісний простір

1.1.1 Стохастичний експеримент, події

Вихідним поняттям теорії ймовірностей є поняття стохастичного експерименту, випадкової події та ймовірності випадкової події. *Стохастичним (випадковим) експериментом* будемо називати експеримент (деяку дію), результат якого неможливо точно передбачити наперед. При цьому будемо розглядати тільки такі експерименти, які можна повторювати при незмінних умовах будь-яку кількість раз. Будь-який результат стохастичного експерименту, який може бути зафіксованим (спостерігатися), будемо називати *випадковою подією*¹ (*подією*). Серед випадкових подій виділимо ті з них, які не можуть відбуватися одночасно і не можуть бути розкладені на простіші випадкові події. Такі події будемо називати *елементарними подіями*.

Таким чином, з кожним стохастичним експериментом можна пов'язати деяку множину Ω елементарних подій (*простір елементарних подій*). Кожну подію, яка може настати в результаті цього екс-

¹Пізніше дамо більш точне означення випадкової події

Зміст

1	Випадкові події та ймовірності	3
1.1	Стохастичний експеримент та ймовірнісний простір	3
1.1.1	Стохастичний експеримент, події	3
1.1.2	Дії над подіями	4
1.1.3	Ймовірність	6
1.2	Властивості та приклади ймовірностей	7
1.2.1	Властивості ймовірності	7
1.2.2	Класичне означення ймовірності	10
1.2.3	Геометричне означення ймовірності	11
1.3	Умовні ймовірності. Незалежність випадкових подій	13
1.3.1	Умовні ймовірності	13
1.3.2	Теорема множення ймовірностей	15
1.3.3	Незалежні випадкові події	16
1.4	Формули повної ймовірності та Байєса	18
1.5	Повторні незалежні випробування	22
1.5.1	Схема Бернуллі	22
1.5.2	Найімовірніша кількість успіхів у схемі Бернуллі	22
1.5.3	Теорема Пуассона	23
1.6	Вправи для аудиторної та самостійної роботи	25
2	Випадкові величини	31
2.1	Випадкові величини, їх розподіли	31
2.1.1	Функція розподілу	31
2.1.2	Ймовірність потрапляння значення випадкової величини в проміжок	35
2.1.3	Неперервні та дискретні випадкові величини	36
2.1.4	Розподіл функцій від випадкових величин	38
2.2	Випадкові вектори	40
2.2.1	Розподіл випадкового вектора та його елементів	40
2.2.2	Незалежні випадкові величини	45
2.2.3	Композиція розподілів	46
2.3	Числові характеристики випадкових величин	47
2.3.1	Математичне сподівання	47
2.3.2	Дисперсія та середньоквадратичне відхилення	50
2.3.3	Характеристики випадкових векторів	52
2.3.4	Інші характеристики випадкових величин	54
2.4	Приклади розподілів випадкових величин	56
2.4.1	Біномний розподіл	56
2.4.2	Розподіл Пуассона	57
2.4.3	Геометричний розподіл	58
2.4.4	Рівномірний розподіл	59

2.4.5	Показниковий розподіл	62
2.4.6	Нормальний розподіл	63
2.4.7	Двовимірний нормальний розподіл	67
2.5	Характеристичні функції	71
2.5.1	Означення та властивості	71
2.5.2	Характеристична функція нормального розподілу	74
2.6	Послідовості випадкових величин	75
2.6.1	Нерівності Чебишова	75
2.6.2	Закон великих чисел	79
2.6.3	Центральна гранична теорема	82
2.6.4	Теорема Муавра-Лапласа	85
2.7	Вправи для аудиторної та самостійної роботи	88
3	Оцінювання параметрів розподілів	99
3.1	Точкові оцінки	99
3.1.1	Статистики та оцінки	99
3.1.2	Властивості оцінок. Нерівність Крамера-Рао	100
3.1.3	Емпірична функція розподілу	108
3.1.4	Вибіркові моменти	111
3.1.5	Метод моментів	117
3.1.6	Метод максимальної правдоподібності	119
3.2	Інтервальні оцінки	121
3.2.1	Поняття про інтервальне оцінювання	121
3.2.2	Загальний метод опорних величин	122
3.2.3	Деякі спеціальні розподіли	123
3.2.4	Інтервальні оцінки параметрів нормального розподілу	128
3.3	Вправи для аудиторної та самостійної роботи	132
4	Перевірка статистичних гіпотез	139
4.1	Задачі перевірки статистичних гіпотез	139
4.2	Найбільш потужні критерії	141
4.2.1	Критерій відношення правдоподібностей	141
4.2.2	Приклад знаходження найбільш потужного критерію	143
4.3	Перевірка гіпотез і надійні інтервали	145
4.4	Гіпотези про параметри нормального розподілу	146
4.5	Критерій Стьюдента	148
4.6	Критерій Фішера	150
4.7	Критерій χ^2	151
4.7.1	Критерій χ^2 для гіпотези про узгодженість з функцією розподілу	151
4.7.2	Критерій χ^2 для гіпотези про вид розподілу	154
4.7.3	Критерій χ^2 для гіпотези про незалежність	155
4.8	Вправи для аудиторної та самостійної роботи	157
A	Статистичні таблиці	171
A.1	Значення функції стандартного нормального розподілу	171
A.2	Квантили розподілу Пірсона	172
A.3	Квантили розподілу Стьюдента	175
A.4	Квантили розподілу Фішера	176

Навчальне видання

**Осипчук Михайло Михайлович
Шевчук Роман Володимирович
Нитребич Зіновій Миколайович**

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей

Видано в авторській редакції

Підписано до друку 02.10.2024 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний. Друк цифровий.
Умовн. друк. арк. 10,7. Обл.-вид. арк. 7,32.
Наклад 100 прим.

Видавець і виготовлювач: ТОВ «Растр-7»
79005, м. Львів, вул. Кн. Романа, 9/1.
Тел./факс: (032) 235 72 13. Е-mail: rastr.sim@gmail.com
www.rastr-7.com.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ЛВ № 22 від 19.11.2002 р.