Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

ФІНАНСОВІ РОЗРАХУНКИ В УМОВАХ ВИЗНАЧЕНОСТІ

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ЧАСТИНА І

Івано-Франківськ
2016

Уклали: Сороківський В.М.,

Можировська З.Г.,

Сороківська М.В.,

Загороднюк А.В.

Фінансові розрахунки в умовах визначеності. Методичні матеріали до самостійної роботи. Частина І. Електронне видання.

Розділ 1. Фінансові розрахунки в умовах визначеності

1.1. Вступ

Із вступом нашої держави на шлях ринкових перетворень надзвичайно велике значення має формування та використання *фінансових ресурсів.* Управління фінансами вимагає від фінансового менеджера глибоких знань особливостей ринку, досвіду ведення фінансових розрахунків, інтуїції щодо прийняття рішень. Такі риси формуються в процесі оволодіння теоретичними основами *фінансового аналізу* та практичної діяльності.

У фінансовому аналізі фінансові відносини між суб'єктами господарської діяльності за допомогою математичних засобів подаються у вигляді певних *математичних моделей процесу управління*, що дає можливість аналізувати і порівнювати альтернативні варіанти, а в кінцевому результаті приймати *найоптимальніше фінансове рішення.* За допомогою прийомів і методів фінансового аналізу можна звести до мінімуму ризик при здійсненні конкретної операції і водночас досить точно вирахувати майбутні доходи. В цьому плані важливе місце відводиться так званим *комерційним і фінансовим обчисленням.* Суть таких обчисень для менеджерів очевидна: будь-яка угода супроводжується виконанням розрахунків, які є основою для прийняття рішень щодо її укладення.

Виявляється, що в фінансових розрахунках є маса речей, які тільки на перший погляд є очевидними. Наприклад, у *фінансовому контракті* може бути вказана деяка ставка за користування *кредитом*, проте фактичні витрати можуть бути суттєво вищими. Думка про те, що схема обчислення складних процентів вигідніша за схему обчислення простих процентів, справедлива не завжди.

На перший погляд складається враження, що вміння володіти фінансовими та комерційними розрахунками потрібні лише спеціалістам (банкірам, фінансистам, комерсантам). Проте це не так, оскільки будь-яка угода по суті має фінансову природу, і той, хто краще володіє фінансовими розрахунками зможе укласти контракт, який, принаймні, не буде йому невигідним.

Наприклад, вам потрібний *банківський кредит*. В одному банку вам пропонують на умовах *щоквартального нарахування процентів* за *ставкою* 2% річних, а в другому проценти нараховуватимуться щорічно, але за ставкою 3%. Який варіант вибрати?

Ви хочете позичити гроші під проценти. Яку схему нарахування процентів доцільно передбачити в договорі?

Ви одержали довготерміновий кредит в банку, який будете погашати частинами протягом декількох років. Які будуть ваші витрати на *погашення боргу* за певний час і яка частина боргу залишиться непогашеною?

Слід зауважити, що, обгрунтовуючи базові методи *фінансової математики*, все ж таки на перше місце слід ставити економічну та фінансову природу операції, а використовуваний математичний апарат має лише допоміжне значення.

1.2. Нарощення і дисконтування

1.2.1. Час і невизначенність як впливові фактори

Невід'ємною складовою фінансового аналізу є врахування фактору часу. В його основі лежить *принцип нерівноцінності грошей в різні календарні терміни.* Однакові суми грошей „сьогодні", грошей „завтра" оцінюються по-різному. Сьогоднішні гроші прирівнюються збільшеній грошовій масі в майбутньому і, навпаки, замість грошей „потім" можна згодитися на зменшення виплати, але зараз.

Чим зумовлені подібні переваги? По-перше, можливістю продуктивного використання грошей як *фінансового активу*, який приносить *прибуток*.

Другий фактор – *невизначеність* майбутнього і пов’язаний з цим *ризик*. „Гроші в кишені” можуть бути витрачені на споживання в даний момент.

Гроші, які зберігаються, піддаються різним ризикам залежно від способу зберігання. Якщо вони зберігаються вдома, їм грозить обезцінювання; якщо вони даються в борг, то *ризик неповернення* залежить від успішності кредитованого заходу, яке може закінчитися і повним крахом, і збитками.

1.2.2. Нарощення простих процентів

До основних категорій фінансового аналізу відносяться *проценти* і *процентна ставка*. Процентна ставка виконує дві важливі функції:

- з одного боку, процентна ставка – це *ціна на гроші*;

- з іншого боку, процентна ставка – це міра, *показник ефективності фінансової операції.*

Позначимо процентну ставку через i та зафіксуємо *початкову суму грошей* P. При *нарощенні простих процентів* за ставкою i кожна наступна сума більша попередньої на частку i від початкової суми P, тобто на iP. До кінця одиничного проміжку початкова сума P зросте на iP та буде рівною $P_1 = P + iP = P(1+i)$, накінець другого проміжку сума P_1 зросте ще на iP і стане $P_2 = P(1+i) + iP = P(1+2i)$. До кінця n-ого проміжку нарахована *нарощена сума* дорівнюватиме

$$P_n = P(1+ni). \qquad (1.2.1)$$

Таким чином, послідовність нарощених сум $P, P_1, \ldots, P_n$ є *арифметичною прогресією* з *першим членом* P і *різницею* iP.

Величина $(1+ni)$ називається *множником нарощення*, а величина Pni – *процентними грішми*, тобто

$$I = Pni, \qquad (1.2.2)$$

де I – процентні гроші або прості проценти.

Приклад 1.2.1. Якою стане початкова сума $P = 1000$ грн. через $n = 10$ років, якщо процентна ставка $i = 10\%$?

Розв'язок. За формулою (1.2.1) $P_{10} = (1+10\cdot 0{,}1)\cdot 1000 = 2000$ (грн.).

Приклад 1.2.2. Прості проценти за *позику* на суму 600 грн на 3 міс. становлять 30 грн. Знайти річну процентну ставку.

Розв'язок. За формулою (1.2.2) $i = \dfrac{I}{Pn} = \dfrac{30}{600\cdot 0{,}25} = 0{,}2$. Отже, $i = 20\%$. Ми врахували, що 3 міс.$= 3/12 = 0{,}25$ року.

Приклад 1.2.3. Банк виплачує 75,35 долара кожних три місяці за *валютним рахунком*, виходячи з 8% річних. Знайти розмір валютного рахунку.

Розв'язок. За формулою (1.2.2) $P = \dfrac{I}{in} = \dfrac{75{,}35}{0{,}08\cdot 0{,}25} = 3767{,}5$ (грн.).

Приклад 1.2.4. За який термін вклад в 500 грн. збільшиться втричі при ставці 8% річних?

Розв'язок. З формули (1.2.1) $n = \dfrac{P_n - P}{Pi} = \dfrac{1500-500}{500\cdot 0{,}08} = 25$ (років).

1.2.3. Нарощення складних процентів

При нарощенні *складних процентів* за ставкою i кожна наступна сума зростає на частку i від попередньої. Таким чином, на кінець одиничного проміжку нарахована сума P зростає на частку i: $P_1 = P + iP = P(1+i)$; на кінець другого проміжку нарахована сума P_1 зросте на частку i: $P_2 = P_1 + iP_1 = P(1+i) + iP(1+i) = P(1+i)^2$. На кінець n-ого проміжку $P_n = P(1+i)^n$. Таким чином, послідовність нарощених сум $P, P_1, \dots, P_n$ є *геометричною прогресією* з *першим членом* P і *знаменником* $(1+i)$.

Так для суми $P = 1000$ грн., $i = 10\%$ нарощення за складними процентами: 1000; $1000 + 0{,}1\cdot 1000 = 1100$; $1100 + 0{,}1\cdot 1100 = 1210$; $1210 + 0{,}1\cdot 1210 = 1331{,}1$.

Приклад 1.2.5. Річна ставка складних процентів дорівнює 8%. Через скільки років сума подвоється?

Розв'язок. Для цього потрібно розв'язати нерівність $(1+0{,}08)^n \ge 2$ або $n \ge \ln(1{,}08) \approx 9$ (років).

При роботі зі складними процентами для наближеного оцінювання корисне наступне правило: *якщо процентна ставка* i, *то подвоєння копіталу за такою ставкою відбувається приблизно за* $72/i$ *років*.

Це правило є більш точнішим для малих ставок.

При одній і тій же ставці i нарощення складних процентів відбувається скоріше, ніж простих, при довжині періоду нарощення більшого за одиницю, і повільніше, якщо період нарощення менший за одиницю.

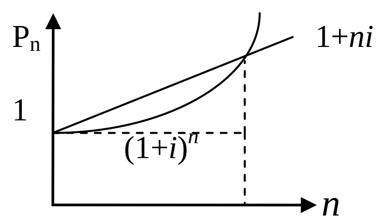


Рис. 1.1

В попередніх прикладах *термін інвестування* виражається в роках, місяцях. Іноді задають його також календарними датами першого та останнього днів інвестування. Тоді, щоб використовувати формули простих процентів, спочатку треба визначити загальну кількість днів інвестування позики, потім виразити термін як частину року, склавши відношення кількості днів користування грішми і кількості днів у році, тобто: $t = \partial / k$, де k - кількість днів у році; ∂ - кількість днів інвестування (позики); t - термін інвестування в роках.

Нехай $\partial_п$ - день початку терміну інвестування, або *дата видачі позики*, $\partial_з$ - день закінчення терміну, або *дата погашення позики*. Тоді $\partial = \partial_з - \partial_п$ – для звичайного року, та $\partial = \partial_з - \partial_п + 1$ – для високосного року за умови, що 29 лютого входить у термін інвестування. Тоді для обчислення простих процентів справедлива формула:

$$I = Pi\frac{\partial}{k} \qquad (1.2.3)$$

Якщо термін інвестування менший року, то при різних значеннях ∂ і k можна отримати такі результати:

1) Якщо ∂ наближена кількість днів інвестування, $k = 360$, то обчислені за формулою (1.2.3) прості проценти називаються *звичайними*. У світовій практиці цей метод обчислення простих процентів називають *німецьким*.

Наближену кількість днів вираховують з повної кількості місяців у терміні та числа днів неповного місяця. При цьому вважають, що місяць має 30 днів. Від дати погашення віднімають дату видачі позики і переводять кількість місяців у дні.

Якщо дата початку інвестування (дата видачі позики) та його завершення (дата погашення) у різних роках, тоді методика обчислення наближеної кількості днів не змінюється (рік при цьому перетворюють у дні, з розрахунку, що в ньому 360 днів).

2) Якщо ∂ – точна кількість днів інвестування, $k = 360$, то обчислені проценти за формулою (1.2.3) називаються *комерційними*, а метод їх обчислення – *французьким*.

3) Якщо ∂ – точна кількість днів інвестування, $k = 365\,(366)$, то обчислені проценти називають *точними*, а метод *англійським*.

Найпоширеніший у фінансовій практиці – комерційний метод нарахування простих процентів. Він вигідний інвестору. Для боржників вигідний точний метод нарахування простих процентів. Його використовують при *міжнародних валютних операціях*.

1.2.4. Дисконтування

Розглянемо процедури, які в певному сенсі є оберненими до процесу нарахування процентів.

Означення 1.2.1. *Дисконтуванням* називається авансове отримання (вирахування) з особи, яка бере кредит, процентів в момент його видачі.

Наприклад, ви берете кредит в банку в розмірі 1000 грн. під 10% річних, причому проценти банк утримує при видачі кредиту, тобто ви одержите 900 грн., але через рік повернете 1000 грн. В цій операції все на користь банку. По-перше, проценти утримані. По-друге, дохідність операції для банку $1000/900-11{,}1\%$.

Другим варіантом дисконтування є *облік (викуповування) векселя* в банку, коли банк, беручи вексель від пред'явника, видає йому позначену на векселі суму до терміну його погашення.

Означення 1.2.2. *Фінансовий документ*, який засвідчує *кредитну операцію,* називають *борговим зобов'язанням*.

Вексель є короткостроковим (терміном до 1 року) борговим зобов'язанням – письмовою обіцянкою особи виплатити певну суму грошей іншій особі у вказаний термін.

Означення 1.2.3. Знижка ціни товару чи курсу цінного паперу при різних угодах називається *дисконтом* і позначається D_i.

У фінансових розрахунках дисконт означає знижку вартості погашення боргових зобов'язань і допомагає визначити теперішню вартість цього зобов'язання. При нарощенні простих процентів має місце формула $D_i = P_n - P = P_n - \dfrac{P_n}{1+ni} = \dfrac{P_n ni}{1+ni}$.

Приклад 1.2.6. З якої суми можна отримати 3400 грн. через три роки нарощенням за простими процентами при ставці 12%? Яка величина дисконту?

Розв'язок. Оскільки $P_n = 3400$ грн., $n=3$, $i=0{,}12$, то отримаємо, що $P = \dfrac{3400}{1+3\cdot 0{,}12} = 2500$ грн., а величина дисконту $D_i = P_n - P = 3400 - 2500 = 900$(грн.).

Приклад 1.2.7. Через півроку після надання кредиту займач повинен заплатити 2140 грн. Яка початкова величина кредиту, якщо він виданий під 14% річних і кількість днів в році $k=360$? Яка величина дисконту?

Розв'язок. Оскільки $P_n = 2140$грн., $i = 14\%$, $\partial = 180$, $k = 360$, то $P = \dfrac{2140}{1+\dfrac{180}{360}\cdot 0{,}14} = 2000$ грн., а величина дисконту $D_i = 2140 - 2000 = 140$ грн.

За певний період *обліковою ставкою* називають відношення різниці між повною та викупівельною ціною цінного паперу (дисконту) до його повної вартості:

$$d = \frac{D}{P_n} = \frac{P_n - P}{P_n}, \qquad (1.2.4)$$

де P_n – сума боргу при погашенні; P – викупівельна (теперішня) сума грошей; D – розмір дисконту.

Очевидно, що розмір дисконту, облікова ставка та теперішня ціна за період, який залишився до погашення, є величинами, залежними від тривалості цього періоду t $(t \le n)$. Тоді формула (1.2.4) запишеться

$$d_t = \frac{D_t}{P_n} = \frac{P_n - P_t}{P_n}, \qquad (1.2.5)$$

звідки отримуємо

$$D_t = P_n d_t, \qquad (1.2.6)$$

$$P_t = P_n(1 - d_t). \qquad (1.2.7)$$

Облікову ставку у формулах вказують за деякий фінансовий період. Здебільшого за один рік, і таку облікову ставку називають *річною обліковою*.

Ставку за період t обчислюють за формулою $d_t = dt$, де t - залишок терміну в роках, що залишився до погашення боргу, d - річна облікова ставка. Тоді формули (1.2.6) і (1.2.7) запишуть

$$D_t = P_n dt, \qquad (1.2.8)$$

$$P_t = P_n(1 - dt). \qquad (1.2.9)$$

Величини D_t і d_t називають *банківським дисконтом* та *простою обліковою ставкою*, а формула (1.2.9) є *формулою банківського дисконтування суми* P_n. Множник $V_t = 1 - dt$ називається *дисконтним множником*.

Банківське дисконтування, або банківський облік, застосовується в операціях з обліку векселів банком або іншими фінансовими організаціями.

Розглянемо найбільш поширену ситуацію, коли власник векселя на суму P_n (сума до погашення) пропонує банку раніше терміну оплати векселя купити його. Така купівля векселя у власника до настання терміну оплати за ціною, яка повинна бути виплачена за векселем в кінці терміну, називається *дисконтуванням векселя*, а сама операція – *обліком векселя*. Сума, яку отримує власник векселя при достроковому обліку, називається *дисконтованою величиною векселя*.

Приклад 1.2.8. Власник векселя на суму 50000 грн. обліковує його 13.09.2005р. з терміном погашення 28.09.2005р. Знайти суму, яку отримає власник векселя від банку, якщо банк обліковує його за ставкою 30%, а кількість днів у році $k = 360$.

Розв'язок. Оскільки $P_n = 50000$, $\frac{\partial}{k} = 15/360$, $d = 0{,}3$, то $P = P_n\left(1 - \frac{\partial d}{k}\right) = 50000\left(1 - \frac{15}{360}\cdot 0{,}3\right) = 49375$ (грн.).

Дисконт D_d є величиною процентів, нарахованих за час n від дня дисконтування до дня погашення векселя на суму P_n, яку потрібно сплатити в кінці терміну. Якщо ставка дисконтування d, то $D_d = Pnd$, де n – час від дня дисконтування до дня погашення векселя. Зазвичай, час від дня дисконтування до дня погашення векселя виражається в днях.

Приклад 1.2.9. Банк 12.04.05 облікував два векселі з термінами погашення відповідно 20.05.05 і 11.06.05. При цьому в результаті застосування облікової ставки 18% річних банком були утримані комісійні в розмірі 885 грн. Знайти номінальну вартість другого векселя, якщо перший пред'явлений на суму 15000 грн., $k = 360$ днів.

Розв'язок. Перший облікований за 38 днів до терміну погашення, другий – за 60 днів. Оскільки $P_n = 15000$ грн., $n_1 = 38/360$, $d = 0{,}18$, то $D_d^1 = 15000\cdot\frac{38}{360}\cdot 0{,}18 = 285$ (грн.). Тоді дисконт D_d^2 від обліку другого векселя $D_d^2 = 885 - 225 = 600$ (грн.). Далі $P_n^2 = \left(D_d^2/n_2 d\right) = \left(600\Big/\frac{60}{360}\cdot 0{,}18\right) = 20000$ (грн.).

Відповідно, номінальна вартість другого векселя дорівнює 20000 грн.

Приклад 1.2.10. Вексель на суму 10000 грн. виданий на 150 днів, при цьому передбачено нарахування на вказану суму простих процентів за ставкою 16% $(k_1 = 365)$. За 80 днів до терміну погашення вексель був облікований банком за обліковою ставкою 12% $(k_2 = 360)$. Визначити дисконт, отриманий банком.

Розв'язок. Оскільки на 10000 грн. будуть нараховані прості проценти за 150 днів, то спочатку знаходимо суму, яка повинна бути виплачена пред'явнику векселя при його погашенні: $P_n = 10000\left(1+\frac{150}{365}\cdot 0{,}16\right) = 10658$ (грн.), а дисконт, отриманий банком в якості комісійних, $D_d = 10658\cdot\frac{80}{360}\cdot 0{,}12 = 284$ (грн.).

Приклад 1.2.11. Власник векселя на 1000 грн. з терміном його погашення 6 місяців, через 2 місяці продає його банку для отримання готівки. Знайти річну облікову ставку й теперішню вартість векселя за два місяці до погашення, якщо величина дисконту – 80 грн.

Розв'язок. Оскільки за 4 місяці до погашення дисконт рівний 80 грн., то облікова ставка за цей період рівна $80/1000 = 8\%$. Тоді річна ставка $d = \frac{d_t}{t} = \frac{8}{1/3} = 24\%$. Тут $t = 4$ місяці $= 1/3$ року. Теперішню вартість векселя за 2 місяці до його погашення $(t = 2/12 = 1/6)$ знаходимо за формулою $P = P_n(1-dt) = 1000(1-0{,}24\cdot\frac{1}{6}) = 960$ грн.

Приклад 1.2.12. На вексель на 1000 грн., виписаний 20 лютого 1998 року з датою погашення 20 листопада 1998 року, нараховується 15% річних. Його обліковано в банку 20 червня 1998 року за обліковою ставкою 11%. Якою буде викупівельна вартість векселя цього дня?

Розв'язок. Точна кількість днів між 20 лютого та 20 листопада буде 324--51=273 дні. Тривалість цього терміну в роках за банківським правилом дорівнює $n = 273/360$. Отже, повна вартість векселя при погашенні за формулою (1.2.1) дорівнює $P_n = P(1+in) = 1000(1+0{,}15\cdot\frac{273}{360}) = 1112{,}5$ грн. Якщо вексель обліковується 20 червня, тоді термін до погашення $n = 324 - 171 = 153$(дні), або в роках $n = 153/360$. Провівши дисконтування повної вартості векселя за обліковою ставкою $d = 11\%$ річних, визначимо вартість векселя 20.06 за формулою (1.2.9): $P_t = P_n(1 - dt) = 1112{,}5(1 - 0{,}11 \cdot \frac{153}{360}) = 1061{,}1$ грн.

1.2.5. Еквівалентні процентні ставки

Для банку, який обліковує вексель на суму грошей P_n, *облікова вартість векселя* є *теперішньою вартістю суми грошей*. P_n, тобто це сума, яку банк виплатить пред'явнику векселя, а D – дисконт, сума, яку отримує банк в момент погашення, тобто через термін, що залишився до погашення.

На відміну від звичайної ситуації, коли інвестується відома сума грошей, на яку за час t нараховуються проценти за процентною ставкою i, при обліку наперед відомо нарощену суму, а її поточну вартість знаходимо з урахуванням облікової ставки d і терміну, який залишився до погашення. Таким чином, дисконт та дисконтна ставка є тими ж характеристиками *кредитної угоди*, як процент і процентна ставка. Вони відрізняються лише напрямком схеми розрахунку. При обчисленні процентів і процентної ставки основною (вихідною) величиною є початкова (поточна) вартість P, а при обчисленні дисконту й облікової ставки – майбутня вартість грошей P_n.

За період t процентна ставка $i_t = \frac{P_n - P}{P}$. З іншого боку, дисконт за цей період $D_t = P_n - P$, а облікова ставка за цей період $d_t = \frac{D_t}{P_n} = \frac{P_n - P}{P_n}$

Ми бачимо, що процентна та облікові ставки пов'язують між собою суми P_n і P, які відносяться до кінця періоду t, а саме $P = P_n(1 - d_t)$, а $P_n = P(1 + i_t)$. Тоді $P = P(1 + i_t)(1 - d_t)$ і $(1 + i_t)(1 - d_t) = 1$. З отриманої рівності отримуємо

$$d_t = \frac{i_t}{1 + i_t}, \qquad (1.2.10)$$

$$i_t = \frac{d_t}{1 - d_t}. \qquad (1.2.11)$$

Зокрема, для терміну $t = 1$ рік: $d = \frac{i}{1+i}$, $i = \frac{d}{1-d}$.

У фінансових розрахунках процентна та облікова ставки характеризують угоду по-різному. Різниця полягає у виборі часової бази, а саме – моменту часу, щодо якого обчислюється вигідність кредитної угоди (фінансової операції). Для процентної ставки це – початок терміну угоди, а для облікової – кінець терміну угоди. Вищезазначені формули дають змогу для однієї з заданих величин знайти другу для одного і того ж періоду часу.

Кажуть, що ці формули задають умови *еквівалентності облікової процентної ставки* стосовно заданого періоду часу.

Означення 1.2.4. Різні за видом процентні ставки називаються *еквівалентними*, якщо в однотипних фінансових операціях вони дають у розрахунках однакові остаточні результати.

Формули $P = P_n(1 - dt)$ і $P = \frac{P_n}{1+it}$ дають однаковий результат. Отже, еквівалентність i та d означає, що $\frac{1}{1+it} = 1 - dt$.

Очевидно, що завжди $d_t < i_t$, але оскільки також $d_t < 1$, то $d_t < \min(i_t, 1)$, що дозволяє точніше оцінити облікову ставку d_t.

Крім введених показників, розглядають ще *дисконт-фактор* $V_t = 1 - d_t$, а також *індекс росту* B_t суми P_n за час t: $B_t = \frac{P_n}{P} = \frac{1}{V_t} = 1 + i_t = \frac{1}{1-d_t}$.

Формули $P = \frac{P_n}{1+ni}$ і $P = \frac{P_n}{(1+i)^n}$ називаються *формулами математичного дисконтування*. Вираз $\frac{1}{(1+i)^n}$ називається *дисконтним множником* за складною процентною ставкою.

Банківське дисконтування за складною обліковою ставкою d_c проводиться за формулою

$$P = P_n (1 - d_c)^n. \qquad (1.2.12)$$

Приклад 1.2.13. Знайти теперішню вартість 200 грн., отриманих через 2 роки: а) при простій ставці процентів 10,5%; б) за обліковою ставкою 10,5%.

Розв'язок. а) при процентній ставці 10,5%

$$P = \frac{P_n}{1 + in} = \frac{200}{1 + 2 \cdot 10{,}5} = 165{,}29 \text{ (грн.)};$$

б) для облікової ставки 10,5% $P = P_n(1 - dn) = 200(1 - 2 \cdot 0{,}105) = 158$ (грн.).

Зауважимо, що про еквівалентність або відповідність процентної та облікової ставок можна говорити лише тоді, коли вказано термін, щодо якого стверджується еквівалентність. Ставки, які еквівалентні стосовно одного фіксованого періоду часу, не будуть еквівалентними щодо іншого періоду часу.

Приклад 1.2.14. Нехай проста річна ставка $i = 20\%$. Знайти еквівалентні річні облікові ставки для термінів: а) три місяці; б) шість місяців.

Розв'язок. Якщо d – відповідна річна облікова ставка, то з рівняння еквівалентності $d_t = \frac{i_t}{1 + i_t}$ отримаємо, що $d = \frac{i}{1 + it} = \frac{0{,}2}{1 + 0{,}2 \cdot 0{,}25} = 0{,}19048$; $d \approx 19\%$ для трьох місяців.

Аналогічно, для шести місяців $d = \frac{0{,}2}{1 + 0{,}2 \cdot 0{,}5} = \frac{0{,}2}{1{,}1} = 0{,}1818$; $d \approx 18\%$.

Приклад 1.2.15. Обчислити суму дисконту при проведенні банківського дисконтування суми 18 тис. грн. за 4 роки за складною обліковою ставкою 12%.

Розв'язок. Знайдемо теперішню вартість 18 тис.грн. за формулою (1.2.12): $P = 18000(1 - 0{,}12)^4 = 10794{,}52$(грн.). Тоді сума дисконту дорівнює $D = P_n - P = 18000 - 10794{,}52 = 7205{,}48$ (грн.).

1.2.6. Номінальна та ефективна процентні ставки

Зауважимо, що дисконтування за складною обліковою ставкою вигідніше для боржника, ніж дисконтування за простою.

На практиці капіталізація процентів досить часто відбувається декілька разів на рік: за півріччя, щоквартально, щомісячно і навіть щоденно. Наприклад, такі ситуації нерідко обумовлюються умовами в депозитних договорах, в угодах на одержання кредиту, в контрактах, які передбачають виплату дивідендів та ряді інших.

При нарахуванні складних процентів декілька разів на рік користуються формулою

$$P_n = P(1+i)^n, \tag{1.2.13}$$

де n – число періодів нарахування, а i – процентна ставка за період. Проте в фінансових угодах, як правило, вказується не ставка за період, а річна процентна ставка i та одночасно визначається кількість періодів нарахування m в рік. Тоді тривалість періоду нарахування дорівнює $1/m$.

Річна процентна ставка i називається *номінальною*, якщо відповідна процентна ставка j за період $1/m$ знаходиться з рівності $j = i/m$.

Тоді формула (1.2.13) для знаходження нарощеного капіталу за n років при m- кратному нарахуванні процентів в рік набуде вигляду

$$P_n = P(1+\frac{i}{m})^{mn} = P(1+j)^{mn} \tag{1.2.14}$$

Приклад 1.2.16. В банк вкладена сума 5000 грн. на два роки з піврічним нарахуванням складних процентів під 20% річних. Яка сума буде отримана через два роки?

Розв'язок. В нашому випадку нарахування процентів відбудеться чотири рази за ставкою 10%, а схема нарахування наступна:

6 міс. 5000 1,1 5500; 18 міс. 6050 1,1 6655;

12 міс. 5500 1,1 6050; 24 міс. 6655 1,1 7320,5

або за формулою (1.2.14) $P_2 = 5000(1+0{,}2/2)^{2\cdot 2} = 7320{,}5$ (грн.).

Якщо в умовах прикладу 1.2.16 проценти нараховувалися щоквартально, то $P_2 = 5000(1+0{,}05)^{4\cdot 2} = 7387{,}5$ (грн.).

Таким чином, можна зробити декілька простих практичних висновків:

а) при нарахуванні складних процентів: 12% річних еквівалентні 1% в місяць;

б) чим частіше відбувається нарахування за схемою складних процентів, тим більша сумарна накопичена сума.

Зауважимо, що для простих процентів такі висновки не мають місця. Дійсно, $P_n = P(1+mn\frac{i}{m}) = P(1+ni)$.

З формули (1.2.14) можна знайти період n, за який сума P при m-кратному нарахуванні процентів в рік за ставкою i зросте до величини P_n, а також процентну ставку i, якщо відомо, що за n- періодів при m- кратному нарахуванні процентів в рік сума P зросла до P_n:

$$n = \frac{\ln\frac{P_n}{P}}{m\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)}, \qquad (1.2.15)$$

$$i = m\left(\left(\frac{P_n}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right). \qquad (1.2.16)$$

Приклад 1.2.17. На вклад щомісячно нараховуються складні проценти за номінальною річною ставкою 16%. За який період початковий капітал потроїться? Як зміниться результат, якщо складні проценти нараховуються щорічно?

Розв'язок. а) поклавши $P_n = 3P$, $m = 12$, $i = 6$, за формулою (1.2.15) знаходимо $n = \frac{\ln 3}{(1+\frac{0,16}{12})} = 6,912$ року. При щорічному нарахуванні процентів скористаємося аналогом формули (1.2.15):

$$n = \frac{\ln\frac{P_n}{P}}{\ln(1+i)}. \qquad (1.2.17)$$

Тоді $n = \frac{\ln 3}{\ln(1+0,16)} = 7,402$ років.

Приклад 1.2.18. Вкладник хотів би за п'ять років подвоїти суму депозиту. Яку річну номінальну процентну ставку повинен запропонувати банк при нарахуванні складних процентів кожних півроку?

Розв'язок. Оскільки $n = 5$, $P_5 = 2P$, $m = 2$, то $i = 2 \cdot (2^{\frac{1}{2 \cdot 5}} - 1) = 0{,}1435$, тобто ставка повинна бути не меншою 14,35%.

Розглянута нами номінальна ставка, по-перше, не відображає реальної ефективності угоди, по-друге, не може бути використана для зіставлень. Для того, щоб забезпечити порівняльний аналіз таких угод, необхідно вибрати деякий показник, який був би універсальним для будь-якої схеми нарахування. Таким показником є *ефективна річна процентна ставка* $i_{еф}$, яка забезпечує перехід від P до P_n при заданих значеннях цих показників і нарахуванні процентів один раз в рік.

Загалом постановка задачі наступна. Задана вихідна сума P, річна процентна ставка (номінальна) i, число нарахувань складних процентів m. Цьому набору вихідних величин в рамках одного року відповідає певне значення нарощення величини F_1. Потрібно знайти таку річну ставку $i_{еф}$, яка забезпечувала б таке ж саме нарощення, як і вихідна схема, але при одноразовому нарахуванні процентів $(m = 1)$. Інакше кажучи, ефективна річна процентна ставка $i_{еф}$ дає можливість побачити, яка складна річна процентна ставка дозволяє досягти такого ж фінансового результату, як і при m- кратному нарахуванні складних процентів в рік за ставкою $\frac{i}{m}$.

З формули (1.2.14) при $n = 1$ (в рамках одного року) маємо $F_1 = P(1 + \frac{i}{m})^m$. З іншого боку, з означення ефективної ставки випливає, що $F_1 = P + P \cdot i_{еф} = P(1 + i_{еф})$. Порівнюючи праві частини, отримаємо:

$$i_{еф} = (1 + \frac{i}{m})^m - 1. \qquad (1.2.18)$$

З останньої формули випливає, що ефективна ставка залежить від кількості внутрірічних нарахувань, причому з ростом m вона збільшується.

Крім того, для кожної номінальної ставки можна знайти відповідну їй ефективну ставку. Ці дві ставки збігаються лише при $m=1$. А саме, ефективна ставка $i_{еф}$ є критерієм ефективності фінансової угоди і може бути використана для просторово-часових зіставлень.

Формулу (1.2.18) можна отримати ще, визначаючи норму прибутку за рік при нарахуванні складних процентів за номінальною процентною ставкою i:

$$r_1 = \frac{F_1 - P}{P} = \frac{P\left(1+\frac{i}{m}\right)^m - P}{P} = \left(1+\frac{i}{m}\right)^m - 1 = i_{еф}.$$

Таким чином, $i_{еф}$ показує, який відносний річний прибуток буде одержаний від нарахування складних процентів за даною номінальною ставкою.

Приклад 1.2.19. Підприємець може одержати кредит: а) або на умовах щомісячного нарахування процентів з розрахунку 26% річних; б) або на умовах піврічного нарахування процентів з розрахунку 27% річних. Який з варіантів а) чи б) вигідніший?

Розв'язок. Для кожного з варіантів ефективні ставки:

а) $i_{еф} = (1+\frac{0,26}{12})^{12} - 1 = 0,2933;$ б) $i_{еф} = (1+\frac{0,27}{2})^2 - 1 = 0,2882.$

Таким чином, варіант б) є вигіднішим, оскільки рівень витрат підприємця є меншим, ніж у варіанті а).

Зауважимо, що прийняте рішення не залежить від величини кредиту, критерієм є відносний показник – ефективна ставка, а вона, як випливає з формули (1.2.18), залежить лише від номінальної ставки і кількості нарахувань.

Розуміння ролі ефективної процентної ставки надзвичайно важливе для фінансового менеджера. Справа в тому, що прийняття рішення про отримання банківського кредиту на певних умовах робиться з прийнятливості пропонованої процентної ставки, яка в цьому випадку характеризує відносні витрати займача. В рекламних проспектах, як правило, на сутності не акцентується, хоча здебільшого мається на увазі номінальна ставка, яка може суттєво відрізнятися від ефективної.

З формули (1.2.18) випливає, зокрема, співвідношення для визначення номінальної ставки, якщо вказана ефективна річна процентна ставка $i_{еф}$ та число нарахувань складних процентів m:

$$i = m\left(\left(1 + i_{еф}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right). \qquad (1.2.19)$$

Приклад 1.2.20. Визначити номінальну ставку, якщо ефективна ставка дорівнює 18%, а складні проценти нараховуються щомісячно.

Розв'язок. Оскільки $i_{еф} = 0{,}18$ і $m = 12$, то за формулою (1.2.19) $i = 12[(1 + 0{,}18)^{\frac{1}{m}} - 1] = 0{,}1667$ або $16{,}67\%$.

Якщо дві номінальні річні процентні ставки визначають одну і ту ж ефективну ставки, то вони називаються *еквівалентними*. З цього означення випливає: еквівалентні номінальні процентні ставки $i^{(m)}$ та $i^{(e)}$ задовольняють рівностям: $i_{еф} = (1 + \frac{i^{(m)}}{m})^m - 1 = (1 + \frac{i^{(e)}}{e})^e - 1$.

Приклад 1.2.21. Якими будуть еквівалентні номінальні річні процентні ставки з піврічним, щоквартальним нарахуванням?

Розв'язок. За формулою (1.2.19) одержимо:

$$i^{(2)} = 2((1 + 0{,}2)^{\frac{1}{2}} - 1) = 0{,}1909; \qquad i^{(4)} = 4[(1 + 0{,}2)^{\frac{1}{4}} - 1] = 0{,}1865.$$

Таким чином, номінальні ставки $i^{(2)} = 19{,}09\%$ і $i^{(4)} = 18{,}65\%$ є еквівалентними, причому видно, що $i^{(4)} < i^{(2)}$.

Дана нерівність справедлива і загалом, а саме: нехай $i^{(m)}$ і $i^{(l)}$ – еквівалентні номінальні річні проценті ставки і $m > l$, тоді $i^{(m)} < i^{(l)}$.

1.2.7. Неперервне нарощення та дисконтування

Нехай номінальна річна ставка i. При нарахуванні процентів m раз в рік за ставкою $\frac{i}{m}$ ефективна річна ставка $i_{еф} = (1 + \frac{i}{m})^m - 1$, тобто за рік сума збільшується в $(1+\frac{i}{m})^m$ раз. При частішому нарахуванні процентів $(m\to\infty)$

$\lim\limits_{m\to\infty}(1+\frac{i}{m})^m = e^i \quad (e\approx 2{,}17)$.

Неперервним нарощенням за ставкою i називається збільшення суми в e^i раз за одиничний проміжок нарахування і в загальному вигляді – збільшення суми в e^{it} раз за t проміжків нарахування.

Неперервним дисконтуванням називається операція, обернена неперервному нарощенню, тобто зменшення суми в e^{it} разів за t проміжків.

Таким чином, формула для знаходження нарощеної суми за n років при неперервному нарахуванні відсотків:

$$P_n = \lim_{m\to\infty} P\cdot\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n\cdot m} = P\cdot e^{i_{неп}\cdot n}. \qquad (1.2.20)$$

Надалі позначатимемо $i_{неп}=\delta$ і назвемо δ *силою росту*. Число δ є *номінальною річною ставкою* при неперервному нарахуванні відсотків. Тоді формула (1.2.20) набуде вигляду $P_n = P\cdot e^{\delta\cdot n}$, де $e^{\delta\cdot n}$ - *множник нарощення*, причому нею можна користуватися і тоді, коли n не є цілим числом.

Очевидно, що $P_1,\ P_2,...,P_n$ утворюють геометричну прогресію зі знаменником e^{δ}. Множник $e^{\delta\cdot n}$ дорівнює індексу росту суми P за n років.

Прирівнявши праві частини в формулах (1.2.13) і (1.2.20) ($i_{неп}=\delta$), отримаємо $Pe^{\delta\cdot n} = P\cdot(1+i)^n$, звідки:

$$\delta = \ln(1+i). \qquad (1.2.21)$$

Приклад 1.2.22. Знайти нарощене значення 250 тис. грн., покладених в банк на 6 років за номінальною ставкою 12% річних з нарахуванням відсотків: а) 1 раз на рік; б) 2 рази на рік; в) неперервно.

Розв'язок. а) $P_n = P(1+i)^n = 250000\cdot(1+0{,}12)^6 = 493455{,}67$ (грн.);

б) $P_n = 250000\cdot\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{12} = 503049$ (грн.); в) $P_n = 250000\cdot e^{0{,}126} = 513608{,}3$ (грн.).

Приклад 1.2.23. Знайти грошовий виграш, який отримає інвестор за 3 роки від інвестування 50 тис. грн. за процентною річною ставкою 6%, якщо замість щомісячного нарахування відсотків буде проводитись нарахування неперервних відсотків.

Розв'язок. $P_{n1} = 50000 \cdot \left(1 + \dfrac{0,06}{12}\right)^{12 \cdot 3} = 59834,02$ (грн.),

$$P_{n2} = 50000 \cdot e^{3 \cdot 0,6} = 59860,86 \text{ (грн).}$$

Грошовий виграш дорівнює $59860,86 - 59834,02 = 26,84$ (грн.).

1.2.8. Врахування інфляції в короткострокових і довгострокових фінансових операціях

Відомо, що *інфляція* спричиняє падіння купівельної спроможності грошей, тобто знецінює їх вартість, що негативно впливає на інтереси інвестора. Як же зменшити фінансові втрати від інфляції? Всі фінансові операції можна поділити на два види: *позикові*, коли початкова сума боргу є базою нарахування процентів за процентною ставкою i; *облікові*, коли остаточна сума боргу є базою для нарахування за обліковою ставкою d.

Для обох видів короткотермінових фінансових операцій застосовується один і той же спосіб врахування інфляції, а саме коригують процентну ставку.

В розрахунках, що стосуються позикових операцій, ставку процентів i замінюють *ставкою – брутто* i_α.

Кажуть, що інфляція (або *темп інфляції*) складає частку α в рік, якщо один і той же набір товарів коштує в кінці року в $(1+\alpha)$ раз більше, ніж на початку цього року. Можна також сказати, що в $(1+\alpha)$ раз зменшується *купівельна спроможність* однієї грошової одиниці. Ясно, що інфляція зменшує реальну процентну ставку i. Це буде вже процентна ставка з врахуванням інфляції. Дійсно, одна грошова одиниця зростає за рік в $(1+i)$ раз за рахунок нарощення процентів, але її купівельна спроможність зменшується в $(1+\alpha)$ раз через інфляцію. Таким чином, її *реальна цінність* – купівельна спроможність – буде рівна $(1+i)/(1+\alpha)$. Як ми зазначили, при інфляції гроші знецінюються, тому *реальний еквівалент* нарощеної за рік суми $P_n = P \cdot (1+i)$ буде дорівнювати $P_{n \cdot \alpha} = P \cdot \frac{1+i}{1+\alpha}$, де α - річний темп інфляції. Тоді реальна процентна ставка $j = \frac{P_{n \cdot \alpha} - P}{P} = \frac{i-\alpha}{1+\alpha}$.

При досить великому α ставка процентів j може стати навіть від'ємною. Звідси видно, що, якщо кредитор не відреагує на інфляцію достатнім збільшенням ставки, він буде працювати собі на збиток.

Для того, щоб номінальна ставка i_α забезпечувала нарощення реальної вартості грошових сум на частку j в рік при річній інфляції α, темп інфляції повинен задовільняти умову $(i_\alpha - \alpha)/(1+\alpha) = j$, звідки $i_\alpha = \alpha + j + j \cdot \alpha$ - *проста процентна ставка*.

Приклад 1.2.24. В проект інвестовано 12 тис. грн. під 10% річних. Визначити просту процентну ставку, яка враховує інфляцію (річний темп інфляції – 6%) та суму погашення з врахуванням інфляції.

Розв'язок. Просту процентну ставку, яка враховує інфляцію (ставку - брутто), шукаємо за формулою $i_\alpha = \alpha + j + j \cdot \alpha = 0{,}06 + 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}06 = 0{,}166$, $i_\alpha = 16{,}6\%$. Далі, $P_{n1} = 12000 \cdot (1 + 0{,}166) = 13992$ (грн.).

Для довільного терміну t: $i_\alpha = \alpha + j + j \cdot \alpha \cdot t$. Зокрема, для короткострокових операцій $(t < 1)$ $t = \frac{\partial}{k}$ матимемо $i_\alpha = \alpha + j + j \cdot \alpha \cdot \frac{\partial}{k}$.

У розрахунках в облікових операціях замінюють облікову ставку d обліковою ставкою – брутто d_α, яка враховує інфляцію α.

За формулою банківського дисконтування $P_n = P \cdot (1 - d_t)$ отримуємо

$$P_n = \frac{P_0}{1-d_t}, \quad P_{n\alpha} = \frac{P_i}{1-d_\alpha \cdot t}, \quad d_\alpha = d \cdot \alpha.$$

З іншого боку, компенсацію знецінення остаточної суми боргу P_n на величину річного темпу інфляції α за термін t можна знайти за формулою

$P_{n\alpha} = P_0 \cdot (1+\alpha \cdot t)$. Оскільки $P_n = \dfrac{P}{1-d \cdot t}$, то $P_{n \cdot \alpha} = \dfrac{P \cdot (1-\alpha \cdot t)}{1-d \cdot t}$. Тоді $\dfrac{P}{1-d_\alpha \cdot t} = \dfrac{P \cdot (1+\alpha \cdot t)}{1-d \cdot t}$ або $1-t \cdot d_\alpha = \dfrac{1-t \cdot d}{1+t \cdot \alpha}$, звідки $d_\alpha = \dfrac{\alpha + d}{1+\alpha \cdot t}$.

Зокрема, для $t=1$ $d_\alpha = \dfrac{\alpha + d}{1+\alpha}$, для $t<1$ $d_\alpha = \dfrac{\alpha + d}{1+\alpha \cdot \dfrac{\partial}{k}}$.

В усіх розрахунках, пов'язаних з банківським дисконтуванням, для врахування рівня інфляції проводять заміну ставок d на d_α.

Приклад 1.2.25. Як зміниться облікова ставка і сума процентів (дисконту) після врахування інфляції $\alpha = 10\%$ при проведенні обліку 90– денного векселя на 300 гривень, якщо банківська облікова ставка – 18%.

Розв'язок. За формулою $d_\alpha = \dfrac{\alpha + d}{1+\alpha \cdot \dfrac{\partial}{k}}$ знайдемо ставку – брутто

$$d_\alpha = \frac{0{,}18+0{,}1}{1+0{,}1 \cdot \dfrac{90}{360}} = \frac{0{,}28}{1{,}025} = 0{,}273; \quad d_\alpha = 27{,}3\%.$$

Оскільки дисконт дорівнює: $D = P_n \cdot d \cdot \dfrac{\partial}{k}$, то

$$D_\alpha = P_n \cdot d_\alpha \cdot \frac{\partial}{k} = 300 \cdot 0{,}273 \cdot \frac{90}{360} = 20{,}48 \text{ (грн.)}, \; D_\alpha = 300 \cdot 0{,}18 \cdot \frac{90}{360} = 13{,}5 \quad \text{(грн.)}.$$

Отже, якщо врахувати інфляцію, то облікова ставка збільшиться з 18% до 23,7%, а сума дисконту з 13,5 грн. збільшиться до 20,48 грн.

1.2.9. Змінні ставки і реінвестування

Фінансова угода може передбачати не тільки сталу процентну ставку на весь період, але й встановлювати змінну в часі (змінну) ставку. Наприклад, наявність інфляції змушує періодично варіювати процентною ставкою, зокрема в угоді може бути обумовлена так звана *плаваюча процентна ставка*, коли фіксується не сама ставка, а змінна в часі її *база* і *маржа* – величина надбавки до бази. Величина маржі протягом терміну угоди буває як сталою, так і змінною, що визначається умовами контракту.

Нехай на період n_k встановлена річна процентна ставка i_k. Тоді приріст капіталу за цей період дорівнює величині $Pn_k i_k$. Якщо таких періодів m $(k = 1, 2, \ldots, m)$, то процентна сума за час $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m = \sum_{k=1}^{m} n_k$ (вважаючи, що всі періоди і, відповідно, процентні ставки вимірюються в одних і тих же одиницях) визначаються за формулою

$$F = P + Pn_1 i_1 + Pn_2 i_2 + \cdots Pn_m i_m = P(1 + \sum_{k=1}^{m} n_k i_k) \qquad (1.2.22)$$

Позначимо $\bar{i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} n_k i_k$. Тоді (1.2.22) набуде вигляду $F = P(1 + n\bar{i})$, тобто на весь період тривалістю n можна встановити процентну ставку $\bar{i}$, яка дає такий самий результат, як і дані змінні ставки.

Записавши $\bar{i} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{n_k}{n} \right) \cdot i_k$, зауважимо, що ставка $\bar{i}$ дорівнює зваженій сумі процентних ставок, де вагою для кожної ставки i_k служить частка (n_k / n) тривалості періоду n_k, яку він складає від загальної суми тривалостей періодів $n = \sum_{k=1}^{m} n_k$, причому очевидно, що сума всіх ваг рівна одиниці.

Формулою (1.2.22) можна користуватися і в тих випадках, коли періоди виражені в різних одиницях часу. Головне, щоб розмірність кожного періоду n_k була узгоджена з розмірністю процентної ставки i_k. Таким чином, якщо n_k виражений в роках, то i_k – річна процентна ставка за один день і т. д.

Приклад 1.2.26. Вкладник поклав в банк 15000 грн. за наступних умов: в перший рік процентна ставка дорівнює 20% річних, кожні наступні півроку ставка підвищується на 3%. Знайти процентну суму за 2 роки, якщо проценти нараховуються тільки на початкову суму вкладу.

Розв'язок. Оскільки $P = 15000$ грн., $n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = \frac{1}{2}$, $i_1 = 0{,}2$, $i_2 = 0{,}23$, $i_3 = 0{,}26$, то за формулою (1.2.22) $F = 15000(1 + 1 \cdot 0{,}2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}23 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}26) = 21675$ грн.

Таку ж нарощену суму можна одержати, якщо прості проценти нараховуються за два роки за ставкою $i = \frac{1}{2}(1 \cdot 0{,}2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}23 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}26) = 0{,}2225$, або $i = 22{,}25\%$ річних.

Нехай знову на період n_k встановлена процентна ставка i_k, але при зміні (або без зміни) ставки нарощення на даний момент сума вкладається знову під новий простий процент. Така фінансова операція називається *реінвестуванням* або *капіталізацією* отриманих на кожному етапі нарощення засобів.

Припустимо для визначеності, що період n_1 передує періоду n_2, який передує періоду n_3 і т. д. Тоді через час n_1 нарощена сума дорівнюватиме $F_1 = P(1 + n_1 i_1)$. Через час n_2 нарощена сума $F_2 = F_1(1 + n_2 i_2) = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2)$ і т.д. за час $n = \sum_{k=1}^{m} n_k$;

$$F = F_m = F_{m-1}(1 + n_m i_m) = P(1 + n_1 i_1)(1 + n_2 i_2) \cdots (1 + n_m i_m) = P \prod_{k=1}^{m} (1 + n_k i_k). \qquad (1.2.23)$$

Приклад 1.2.27. За умовами прикладу 1.2.26. знайти нарощену суму за 2 роки, якщо одночасно зі зміною ставки відбувається і капіталізація процентного доходу.

Розв'язок. З формули (1.2.23) $F = 15000(1 + 0{,}2)(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}23)(1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}26) = 22791$ (грн.), яка є більшою за нарощену суму попереднього прикладу, оскільки після кожного періоду нарахування здійснювалася операція реінвестування.

1.2.10. Проценти "на 100", "в 100". Арифметична та геометрична прогресії

Наведемо ряд задач, які досить часто виникають в комерційних розрахунках, а також ряд понять, які в даний час являють певний інтерес.

Приклад 1.2.28. Фірма реалізувала партію товару за S грн., отримавши при цьому $p\%$ прибутку. Знайти цей прибуток.

Розв'язок. Позначимо через X – собівартість товару. Тоді S є сумою собівартості товару X і отриманого прибутку $(pX/100)$: $S = X + \frac{pX}{100}$, звідки $X = S \Big/ (1 + \frac{p}{100})$. Тоді прибуток

$$S^1 = \frac{Xp}{100} = \frac{S}{(1 + \frac{p}{100})} \cdot \frac{p}{100} = \frac{Sp^1}{1 + p^1}, \; p^1 = \frac{p}{100}. \qquad (1.2.24)$$

Формула (1.2.24) називається *формулою обчислення процентів "на 100"*.

Якщо, наприклад, $p = 20\%$, $S = 120000$ грн., то $S^1 = \frac{120000 \cdot 0{,}2}{1{,}2} = 20000$ грн.

Приклад 1.2.29. Фірма реалізувала партію товару за S грн., отримавши при цьому $p\%$ збитку. Знайти цей збиток.

Розв'язок. Позначимо через X собівартість товару. Тоді S є різницею між собівартістю товару X і отриманим збитком $\frac{Xp}{100}$: $S = X - \frac{Xp}{100}$, звідки $X = S \Big/ (1 - \frac{p}{100})$. Тоді збиток

$$S^1 = \frac{Xp}{100} = \frac{S}{1 - \frac{p}{100}} \cdot \frac{p}{100} = \frac{Sp^1}{1 - p^1}, \; p^1 = \frac{p}{100}. \qquad (1.2.25)$$

Формула (1.2.25) називається *формулою обчислення процентів "в 100"*.

Якщо $p = 20\%$ і $S = 80000$ (грн.), то $S^1 = \frac{800000 \cdot 0{,}02}{0{,}8} = 20000$ (грн.).

Для того, щоб належним чином зрозуміти принципи і методи обчислень, які використовуються в фінансовій математиці, необхідно знання таких понять, як *арифметична* та *геометрична* прогресії.

Арифметичною прогресією називається послідовність чисел, в якій кожне наступне більше за попереднє на одне і те саме число d, яке називають *різницею арифметичної прогресії*.

Формула n–го числа $a_n = a_1 + (n-1)d$, а суми перших n членів $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} n$.

Приклад 1.2.30. Особі, яка збирається на пенсію, пропонується схема, за якою вона платить певну суму фірмі, а та гарантує їй щомісячний дохід в сумі 300 грн. Крім того, кожен місяць дохід буде збільшуватися на 40 грн. Якою буде ситуація через 5 років?

Розв'язок. За умовою прикладу $a_1 = 300$, $d = 40$, $n = 5 \cdot 12 = 60$. Дохід, який отримає особа за місяць через 5 років, $a_{60} = 300 + 59 \cdot 40 = 2660$ (грн.), а загальний дохід $S_{60} = \frac{(300 + 2660) \cdot 60}{2} = 88800$ (грн.).

Геометричною прогресією називається послідовність чисел, в якій кожний наступний член більший за попередній в деяке число q разів, яке називається *знаменником геометричної прогресії*.

Формула n–го члена $a_n = a_1 q^{n-1}$, а суми перших n членів $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Приклад 1.2.31. За умови прикладу 1.2.30 щомісяця дохід буде збільшуватись на 4%. Якою буде ситуація через 5 років?

Розв'язок. За умовою прикладу $a_1 = 300$, $d = 1{,}04$, $n = 60$. Дохід, який отримає особа за місяць через 5 років, $a_{60} = 300 \cdot (1{,}04)^{59} = 3035$ (грн.), $S_{60} = 300 \cdot \frac{(1{,}04)^{60} - 1}{1{,}04 - 1} = 71397$ (грн.).

На перший погляд схема з прикладу 1.2.30 є кращою. Проте, вже через 7 років загальний дохід за схемою прикладу 1.2.31 $S_{84} = 194738$ грн., а прикладу 1.2.30 – 164640 грн. І чим далі, тим більше буде відчуватися різниця в доходах.

Наведені формули широко застосовуються в фінансовій математиці, актуарних розрахунках і фінансовому менеджменті, зокрема, при оцінці акцій, облігацій, пенсійних контрактів і т.д.

1.2.11. Конверсія валюти і нарощення процентів

В операції нарощення з конверсією валюти існує два джерела доходу – зміна курсу та нарощення процентів, причому, якщо другий з них безумовний (оскільки ставка процентів фіксована), то цього не можна сказати про перше джерело. Більше того, подвійна конвертація (на початку та в кінці операції) може бути при несприятливих умовах збитковою. Розв’яжемо в зв’язку з цим дві задачі. Визначимо суму в кінці операції та її дохідність для двох варіантів операцій з конверсією.

Варіант 1. ВКВ-грн.-грн.-ВКВ. Операція включає три кроки: обмін валюти на гривні, нарощення процентів на цю суму і конвертування в вихідну валюту. Нарощена сума P_n в валюті обчислюється за формулою $P_n = K_0(1+ni)\cdot 1/K_1$, де P – сума депозиту в ВКВ, P_n – нарощена сума в ВКВ, n – термін депозиту, i – ставка нарощення для гривневих сум, K_0 – курс обміну на початку операції, K_1 – курс обміну в кінці операції.

Множник нарощення m з врахуванням подвійного конвертування має вигляд $m = (K_0/K_1)(1+ni)$.

Зі збільшенням ставки i множник нарощення лінійно збільшується, в свою чергу, ріст кінцевого курсу обміну зменшує його.

Приклад 1.2.32. Пропонується покласти 1000 доларів на гривневий депозит. Курс продажу долара на початок терміну депозиту – 5,25 грн., курс купівлі в кінці операції – 5,28 грн. за один долар. Гривнева процентна ставка $i = 15\%$, а доларова $j = 9\%$. Термін депозиту – 3 місяці. Визначити суму в кінці операції для двох варіантів нарощення.

Розв'язок. Нарощена сума в валюті

$$P_n = P\cdot(K_0/K_1)(1+ni) = 1000\cdot(5{,}25/5{,}28)(1+3/12\cdot 0{,}15) = 1031{,}6 \text{ (дол.)}.$$

В свою чергу, пряме нарощення вихідної нарощеної суми за доларовою ставкою $j = 9\%$ дає $P_n = 1000(1+0{,}25\cdot 0{,}09) = 1022{,}5$ (дол.).

Варіант 2. Грн.-ВКВ-ВКВ-грн. Операція включає три кроки: обмін гривні на валюту, нарощення процентів на цю суму і конвертація в гривні. Нарощена сума S_n обчислюється за формулою $S_n = S \cdot (K_1/K_0)(1+nj)$, де S – сума депозиту в грн., n – термін депозиту, j – ставка нарощення для валютних сум, K_0 і K_1 як і в варіанті 1.

Приклад 1.2.33. Пропонується покласти 1000 грн. на доларовий депозит за умовами попереднього прикладу.

Розв'язок. Нарощена сума в гривнях

$S_n = S \cdot (K_1/K_0)(1+nj) = 1000 \cdot (5{,}28/5{,}25) \cdot (1+0{,}25 \cdot 0{,}09) = 1028{,}34$ (грн.).

Пряме нарощення на гривневому депозиті $S_n = 1000(1+0{,}25 \cdot 0{,}15) = 1037{,}5$ (грн.) є дещо більшим.

Контрольні запитання та задачі

1. Які функції виконує процентна ставка?

2. За якою формулою проводиться нарощення простих процентів?

3. Які величини називають множником нарощення та процентними грішми при нарощенні простих процентів?

4. За якою формулою проводиться нарощення складних процентів?

5. За який термін відбудеться подвоєння капіталу при нарощенні складних процентів за ставкою i?

6. Який зв’язок між нарощеннями простих і складних процентів за однією і тією ж ставкою?

7. Які проценти називаються звичайними, комерційними, точними?

8. Дайте визначення німецькому, французькому, англійському методам обчислення процентів?

9. Що називають дисконтуванням, борговим зобов’язанням, дисконтом, обліковою ставкою за певний період, банківським дисконтом, простою обліковою ставкою, дисконтним множником?

10. Який вигляд має формула банківського дисконтування?

11. В чому різниця між процентною та дисконтною ставками?

12. Який зв'язок між процентною та обліковою ставками?

13. Які процентні ставки називають еквівалентними?

14. Які формули називають формулами математичного дисконтування ?

15. За якою формулою проводиться банківське дисконтування за складною обліковою ставкою d_c ?

16. Яка річна процентна ставка називається номінальною?

17. За якою формулою знаходиться величина нарощеного капіталу за n років при m- кратному нарахуванні процентів в рік?

18. Дайте визначення ефективної річної процентної ставки і вкажіть за якою формулою її обчислюють?

19. Як виражається номінальна ставка через річну ефективну ставку?

20. Які дві номінальні річні процентні ставки називаються еквівалентними?

21. Що називають неперервним нарощенням, неперервним дисконтуванням?

22. За якою формулою шукають нарощену суму за n років при неперервному нарахуванні процентів?

23. Яку величину називають силою росту і що вона собою являє?

24. Що таке інфляція?

25. В якому випадку кажуть, що інфляція складає частку α в рік?

26. За якою формулою знаходиться нарощена за рік сума P_n при річному темпі інфляції α?

27. Як визначається процентна ставка при річному темпі інфляції α?

28. За якими формулами знаходяться: річна проста процентна ставка; проста процентна ставка для довільного періоду t ?

29. За якими формулами знаходяться: річна облікова ставка; облікова ставка для періоду $t = \partial/k$?

30. Якою стане початкова сума а) $P = 2000$ грн.; б) $P = 1500$ грн., якщо через а) $n = 8$ р.; б) $n = 12$ р., процентна ставка становить а) $i = 11\%$; б) $i = 15\%$?

31. Прості проценти за позику на суму а) 900 грн.; б) 1200 грн. на а) 6 місяців; б) 9 місяців становлять а) 60 грн.; б) 90 грн. Знайти річну процентну ставку.

32. Банк виплачує а) 85 доларів; б) 90 доларів кожних а) 4 місяці; б) 6 місяців за валютним рахунком, виходячи з а) 8,5 %; б) 9% річних (простих). Знайти розмір валютного рахунку.

33. За який термін вклад в а) 1000 грн.; б) 2000 грн. збільшиться в а) 4 рази; б) 6 разів при ставці а) 9%; б) 10% (простих)?

34. Річна ставка складних процентів дорівнює а) 7%; б) 9%. Через скільки років сума а) подвоється; б) потроється?

35. Власник векселя на а) 2000 грн.; б) 3000 грн. з терміном погашення 6 місяців через 2 місяці з моменту отримання продає його банку. Банк обліковує вексель уже не за повну вартість, а за а) 1800 грн.; б) 2500 грн. Визначити дисконт.

36. В умовах прикладу 35 знайти річну облікову ставку та теперішню вартість векселя за 2 місяці до погашення.

37. Нехай вексель на а) 2000 грн.; б) 3000 грн. виписано а) 25.03.2005 року з датою погашення 25.08.2005 року; б) 21.04.2005 року з датою погашення 21.10.2005 року. На вексель нараховується а) 12% б) 15% річних (простих). Вексель обліковано в банку а) 25.06.2005 року; б) 21.08.2005 року за обліковою ставкою а) 9%; б) 12%. Якою буде викупівельна вартість векселя цього дня?

38. Знайти теперішню вартість а) 1000 грн.; б) 1500 грн., отриманих через а) 3 роки; б) 4 роки при простій ставці процентів а) 15%; б) 16%.

39. Відповісти на запитання прикладу 38 при обліковій ставці а) 15%; б) 16%.

40. Нехай проста річна процентна ставка $i = 18\%$. Знайти еквівалентні річні облікові ставки для термінів а) 4 місяці; б) 6 місяців.

41. Нехай проста річна процентна ставка $i = 16\%$. Знайти еквівалентні річні облікові ставки для термінів а) 5 місяців; б) 8 місяців.

42. Обчислити суму дисконту при проведенні банківського дисконтування суми а) 12000 грн.; б) 16000 грн.; за а) 2 роки; б) 3 роки за складною обліковою ставкою а) 9%; б) 10%.

43. В банк вкладена сума а) 4000 грн.; б) 6000 грн. на 2 роки з нарахуванням процентів кожних а) 3 місяці; б) 4 місяці. Яка сума буде отримана через 2 роки?

44. На вклад щомісячно нараховуються складні проценти за номінальною річною ставкою а) 12%; б) 10%. За який період початковий капітал стане більшим а) в 3 рази; б) в 4 рази? Як змінюється результат, якщо складні проценти нараховуються щорічно ?

45. Вкладник хотів би за а) 10 років; б) 2,5 років збільшити а) в 4 рази; б) в 2 рази суму депозиту. Яку річну номінальну процентну ставку повинен запропонувати банк при нарахуванні складних процентів а) 4 рази в рік; б) 2 рази в рік?

46. Підприємець може одержувати кредит: а) або на умовах нарахування процентів кожних 2 місяці з розрахунку 22% річних; б) або нарахування процентів кожних 4 місяці з розрахунку 23% річних. Який варіант вибрати?

47. Підприємець може одержати кредит: а) або на умовах нарахування процентів кожних 3 місяці з розрахунку 21% річних; б) або на умовах піврічного нарахування процентів з розрахунку 22% річних. Який варіант вибрати?

48. Визначити номінальну ставку, якщо ефективна ставка дорівнює а) 16%; б) 20%, а складні проценти нараховуються а) кожних 3 місяці; б) щопівроку.

49. Якими будуть еквівалентні номінальні річні процентні ставки з нарахуванням процентів а) щомісяця; б) кожних 4 місяці, якщо ефективна річна процентна ставка $i = 18\%$?

50. Якими будуть еквівалентні номінальні річні процентні ставки з нарахуванням процентів а) кожних 3 місяці; б) щопівроку, якщо ефективна річна процентна ставка – 21%?

51. Знайти нарощене значення а) 150000 грн.; б) 200000 грн., вкладених в банк на а) 4 роки; б) 5 років за номінальною ставкою а) 10%; б) 11% річних з нарахуванням процентів неперервно.

52. Знайти грошовий виграш, який отримує інвестор за а) 4 роки; б) 5 років від інвестування а) 30000 грн.; б) 40000 грн. за процентною річною ставкою а) 7%; б) 8%, якщо замість щомісячного нарахування процентів проводитиметься нарахування неперервних процентів.

53. В проект інвестовано а) 10000 грн.; б) 11000 грн. під а) 11%; б) 12% річних. Визначити просту процентну ставку, яка враховує інфляцію (річний темп інфляції) а) 8%; б) 9%, та суму погашення з врахуванням інфляції.

54. Як зміниться облікова ставка, сума процентів (дисконту) після врахування інфляції а) $\alpha = 9\%$; б) $\alpha = 11\%$ при проведенні обліку а) 120-денного векселя; б) 150-денного векселя на а) 1000 грн.; б) 2000 грн., якщо банківська облікова ставка а) 16%; б) 17%?

55. Вкладник поклав в банк а) 10000 грн.; б) 20000 грн. за наступних умов: в перший рік процентна ставка дорівнює а) 15%; б) 18% річних, кожних наступних а) 3 місяці; б) 4 місяці ставка підвищується на а) 2%; б) 4%. Знайти процентну суму за 2 роки, якщо проценти нараховуються тільки на початкову суму вкладу.

56. За умовами прикладу 55 знайти нарощену за 2 роки суму, якщо одночасно зі зміною ставки відбувається і капіталізація процентного доходу.

57. Фірма реалізувала партію продукції на а) 10000 грн.; б) 20000 грн., отримавши при цьому а) 10%; б) 15% прибутку (збитку). Знайти величину прибутку (збитку).

58. Особі, яка збирається на пенсію, пропонується схема, за якою вона платить фірмі певну суму, а та гарантує їй щомісячний дохід в сумі а) 200 грн.; б) 250 грн. Крім того, кожен місяць дохід буде збільшуватися на а) 20 грн.; б) 30 грн. Якою буде ситуація через а) 3 роки; б) 4 роки?

59. За умовами прикладу 58 кожен місяць дохід буде збільшуватись на а) 2%; б) 3%. Якою буде ситуація через а) 3 роки; б) 4 роки?

60. Потрібно покласти а) 2000 євро; б) 3000 євро на гривневий депозит. Курс продажу на початку терміну депозиту а) 6,3 грн.; б) 6,4 грн. за одне євро, курс купівлі в кінці операції а) 6,4; б) 6,5 грн. Процентні ставки а) $i = 16\%$; $j = 9\%$; б) $i = 15\%$; $j = 8\%$ $(360/360)$. Термін депозиту а) 4 місяці; б) 6 місяців. Визначити суму в кінці операції для двох варіантів нарощення.

1.3. Потоки платежів, ренти

1.3.1. Потоки платежів

Потік платежів – це множина розподілених в часі виплат і надходжень.

Врахуємо *направленість платежу*, використовуючи додатні величини для надходжень і відповідно від’ємні для виплат.

Потоки платежів є невід’ємною частиною найрізноманітніших угод на фінансовому ринку: кредитному, з цінними паперами, а також при управлінні фінансами підприємств, здійсненні інвестиційних проектів і в ряді інших задач економічної теорії.

Прикладами потоків платежів є: внески, які надходять в пенсійний фонд; купонні виплати власникам облігацій; розтягнуті в часі інвестиції в проект і доходи від його реалізації та інші.

Потік називається *скінченним* або *нескінченним* залежно від кількості платежів в ньому.

Нехай $R = \{R_k, t_k\}$ – потік платежів. t_k - моменти часу, R_k - платежі. Крім того, вважається, що відома ставка процента i, зазвичай, незмінна протягом всього потоку.

Величиною потоку в момент T називається сума платежів потоку, дисконтованих на даний момент

$$R(T) = \sum_k R_k (1+i)^{T-t_k} . \qquad (1.3.1)$$

Величина $R(0)$ називається *сучасною величиною потоку*; якщо є останній платіж, то величина потоку в момент цього платежу називається *скінченною величиною потоку*.

Знаючи *сучасну (теперішню, поточну)* величину потоку, *кінцеву величину потоку* шукають за формулою

$$R(T) = R(0)(1+i)^T . \qquad (1.3.2)$$

Приклад 1.3.1. Нехай задано потік $R = \{(-2000{,}1);\quad (1000{,}2);\quad (2000{,}3)\}$. Знайти характеристики потоку за процентною ставкою $i = 10\%$.

Розв'язок. За формулою (1.3.1) при $T = 0$, $t_k = 1{,}2{,}3$ отримаємо:

$$R(0) = -2000(1+0{,}1)^{-1} + 1000(1+0{,}1)^{-2} + 2000(1+0{,}1)^{-3} \approx 510{,}8 .$$

Тоді з формули (1.3.2) $R(3) = R(0)(1+i)^3 = 679{,}8$.

В якості ще одної характеристики зупинимося на *показнику внутрішньої норми дохідності* q.

За змістом цій характеристиці відповідає таке значення процентної ставки, при якій *нарощена сума потоку затрат* збігається з *нарощеною сумою від потоку надходжень*. Інакше кажучи, ця ставка характеризується ефективністю, з якою використовуються кошти, які витрачаються. Звідси, зокрема, випливає, що, дисконтуючи або нараховуючи проценти за даною ставкою, ми дійдемо до нульових значень як зведеної, так і нарощеної характеристик.

Дані умови одночасно служать і рівнянням для відшукання q. Наприклад, потік складається з двох членів: виплати, яка дорівнює $(-S_0)$, і надходження $(+S_T)$. Тоді рівняння відносно внутрішньої дохідності q матиме вигляд: $-S_0(1+q)^T + S_T = 0$, звідки $q = \left(\dfrac{S_T}{S_0}\right)^{1/T} - 1$.

Легко бачити, що в цьому частинному випадку внутрішня дохідність q збігається з ефективною процентною ставкою.

Базуючись на введених означеннях, легко зрозуміти, що з позицій одержувача доходів потокова ситуація є тим кращою, чим вище значення її узагальнених характеристик: *чистого зведеного доходу, нарощеної суми, внутрішньої норми дохідності.*

1.3.2. Фінансові ренти

Фінансова рента, або ануїтет, – це частинний випадок потоку платежів, всі члени якого додатні величини, а часові інтервали між двома послідовними платежами однакові.

Інакше кажучи, фінансова рента – це послідовність періодичних виплат, які проводяться у вигляді грошової суми через рівні проміжки часу, незалежно від їх походження, мети та використання.

Прикладами фінансових рент є створення амортизаційного та пенсійного фондів, страхові премії, виплата кредитів, сплата дивідендів від акцій і процентних сум від облігацій та інших цінних паперів з твердим процентним доходом та ін.

Розрахунки за борг у вигляді ануїтету є вигідними для боржника, оскільки термін сплати може бути досить великий і платежі вносяться у вигляді нової суми грошей, що частково знецінює борг.

Кожна рента описується або задається такими параметрами:

- *член ренти* – величина кожної окремої виплати R;
- *період ренти* – проміжок часу між двома платежами (p – кількість платежів в рік);
- *термін ренти* – час від початку ренти до кінця останнього періоду n;
- *процентна ставка* – ставка, яка використовується при нарощенні або дисконтуванні платежів, із яких складається рента: i, d.

Для характеристики ануїтету у фінансовому аналізі, крім наведеної класифікації, використовують:

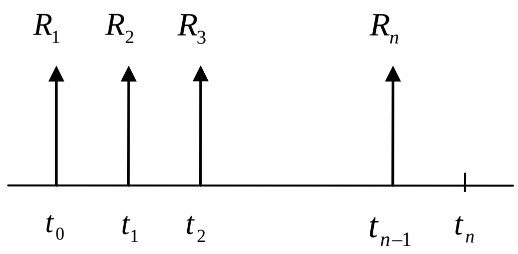
- *нарощену суму* – це сума всіх членів ренти з нарахованими на них процентами на кінець її терміну;

- *теперішню (поточну, сучасну) величину ренти* - це сума всіх її членів, дисконтованих на початок її терміну. Іноді цю ціну називають *зведеною,* або *капіталізованою ціною ренти*.

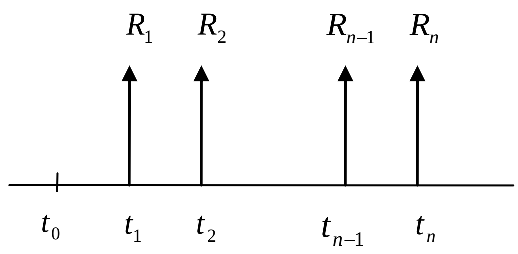
На основі нарощеної та теперішньої величини ренти розробляються плани погашення боргів, порівнюються або не збитково замінюються умови контрактів, оцінюється ступінь ефективності інвестицій, обчислюється ринкова вартість облігацій, акцій.

Якщо платежі надходять в кінці чергового проміжку часу, то рента називається *постнумерандо*, на початку – *пренумерандо*.

Якщо перший часовий період триває від моменту часу t_0 до t_1, другий від t_1 до $t_2,\dots,n$-ий – від t_{n-1} до t_n, то грошові потоки пренумерандо та постнумерандо можна зобразити на рисунку:



Потік пренумерандо



Потік постнумерандо

1.3.2.1. Скінченна річна рента (постнумерандо)

Це найпростіша рента, в якій протягом n років в кінці кожного вноситься тільки один платіж величиною R, а на внески нараховуватимуться складні проценти за ставкою $i\%$ річних. Всі члени ренти, крім останнього, приносять проценти. Нарощені суми утворюють послідовність

$$R(1+i)^{n-1},\ R(1+i)^{n-2}, \dots, R(1+i), R,$$

переписавши яку в оберненому порядку, бачимо, що вона є геометричною прогресією з першим членом R і знаменником $(1+i)$, а її сума

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = R\,s(n,i)\,.$$

Множник $s(n,i) = [(1+i)^n - 1]/i$ називають *коефіцієнтом нарощення ренти.*

Якщо проценти нараховуються m раз в році, то остання формула запишеться у вигляді

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^m - 1}\,.$$

Знайдемо тепер сучасну величину даної ренти. Для неї дисконтовані величини платежів утворюють послідовність $\frac{R}{1+i}$, $\frac{R}{(1+i)^2}, \ldots, \frac{R}{(1+i)^n}$, яка є геометричною прогресією з першим членом $R/(1+i)$ і знаменником $1/(1+i)$, а її сума

$$A = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n} = R[(1+i)^{-1} + \cdots + (1+i)^{-n}] = R(1+(1+i)^{-n})/i\,.$$

Величина $[1-(1+i)^{-n}]/i = a(n,i)$ називається *коефіцієнтом зведення ренти, або дисконтним, зведеним множником звичайної ренти*.

Сучасна величина ренти A і нарощена величина ренти S пов'язані рівністю $S = A(1+i)^n$.

Величини $a(n,i)$ і $s(n,i)$ пов'язані співвідношенням $s(n,i) = a(n,i)(1+i)^n$.

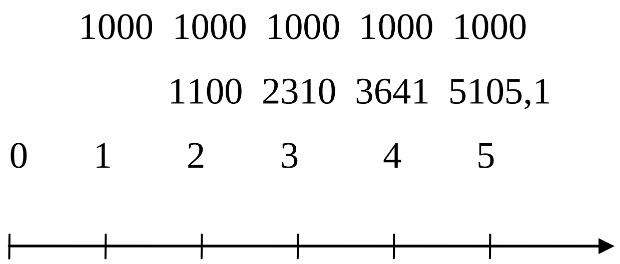
Коефіцієнт нарощення $s(n,i)$ показує в скільки раз нарощена величина ренти більша її річного платежу. Аналогічний смисл має коефіцієнт зведення ренти: він показує в скільки раз сучасна (теперішня) величина ренти більша її річного платежу.

Теперішня величина ренти: якщо в момент 0 покласти в банк теперішню величину ренти під i процентів річних, то на кінець n-го року вона збільшиться до нарощеної величини ренти.

Приклад 1.3.2. Розглянемо 5-річну ренту з річним платежем 1000 грн., процентна ставка $i = 10\%$. Знайти нарощену та теперішню суму ренти.

Розв'язок. Розв'язок представимо у вигляді рисунка.

Річні платежі



Всього на рахунку 1000 2100 3310 4641 6105,1

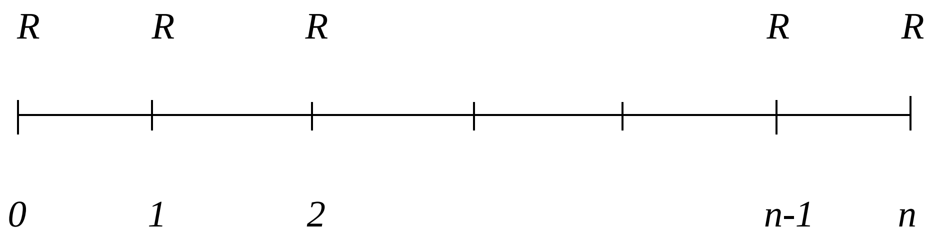
Отже, на кінець першого року в банк вноситься 1000 грн. На кінець другого року ця сума зросла до 1100 грн. за рахунок нарахованих 10%. Разом з наступними внесеними 1000 грн. на рахунку вже 2100 грн. На кінець третього року ця сума зросла до 2310 грн. за рахунок нарахованих 10%. Разом з черговими внесеними 1000 грн. на рахунку тепер вже 3310 грн. і т. д. Нарощена сума ренти рівна 6105,1 грн. Теперішню (поточну) величину ренти знайдемо, дисконтуючи на момент 0 нарощену суму 6105,1. Одержуємо 6105,1грн./$(1,1)^5$=3791 грн.

1.3.2.2. Зведені прості ренти (пренумерандо)

На відміну від звичайних рент, виплата у *зведених рентах* відбувається на один період раніше, а саме на початку кожного періоду.

Прикладами зведеної ренти є земельна рента, рахунок в банку, премії в страхуванні.

Часова схема виплат зведеної ренти має вигляд:



Нехай як і раніше A – поточна сума грошей, S – нарощена сума грошей зведеної ренти, i – процентна ставка за період ренти, R – грошова сума разових виплат.

Є два методи обчислення теперішньої (поточної) та нарощеної сум грошей.

Метод 1. Поряд із зведеною рентою розглянемо звичайну ренту з тією ж самою множиною платежів, що й у зведеної, яка починається на період раніше. Оскільки множини виплат обох рент однакові, то відповідні їм поточні значення еквівалентні. Тоді ми можемо записати $A \cdot (1+i)^{-1} = R \cdot a(n,i)$. Звідси теперішня сума грошей зведеної ренти $A = (1+i) \cdot R \cdot a(n,i)$.

Нарощені суми грошей розглянутих рент також еквівалентні. Тоді $S = (1+i) \cdot R \cdot s(n,i)$.

Метод 2. В цьому методі теперішня сума зведеної ренти розглядається як сума платежу R у початковий момент часу та поточного значення звичайної ренти з платежами розміром R, терміном $(n-1)$ періодів.

Тоді $A = R + R \cdot a((n-1),i) = R(1 + a(n-1,i))$.

Тепер розглянемо ренту, яка складається з $(n+1)$ виплат розміром R, і початок якої є на один період швидше, ніж наведеної ренти. Оскільки розглянута рента має n спільних виплат з нашою наведеною рентою, то $S + R = R \cdot s((n+1),i)$. Звідси отримуємо, що $S = R \cdot s((n+1),i) - R = R(s(n+1,i) - 1)$.

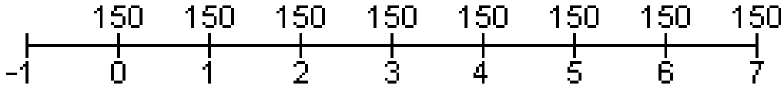
Приклад 1.3.3. Знайти теперішню та нарощену суми грошей звичайної ренти, яка складається з чотирьох виплат по 200 гривень кожна, при ставці капіталізації 8% річних.

Розв'язок. Нарощена сума грошей

$S = 200(1{,}08)^3 + 200 \cdot (1{,}08)^2 + 200 \cdot 1{,}08 + 200 = 901{,}22$ (грн.), а теперішня сума $A = 200 \cdot (1{,}08)^{-1} + 200 \cdot (1{,}08)^{-2} + 200 \cdot (1{,}08)^{-3} + 200 \cdot (1{,}08)^{-4} = 662{,}44$ (грн.).

Приклад 1.3.4. Знайти теперішню суму грошей зведеної ренти з виплатами розміром 150 гривень на початок кожного півріччя при нарахуванні процентів за ставкою 10%. Термін ренти – 4 роки.

Розв'язок. Часова схема виплат:



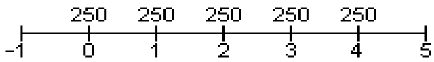
За формулою

$$A = (1+i)R \cdot a(n,i) = (1+i)R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

маємо $A = 1{,}1 \cdot 150 \cdot \frac{1-(1{,}1)^{-8}}{0{,}1} = 880{,}26$ (грн.). З іншого боку, за формулою $A = R(1 + a(n-1),1) = R(\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} + 1)$, отримаємо $A = 880{,}26$ (грн).

Приклад 1.3.5. Обчислити нарощену суму грошей зведеної ренти, яка містить 5 виплат розміром 2650 грн. кожна, при нарахуванні процентів за ставкою 6% річних.

Розв'язок. Часова схема виплаті



За формулою

$$S = (1+i)Rs(n,i) = (1+i)R \cdot \frac{(1+i)^{n} - 1}{i}$$

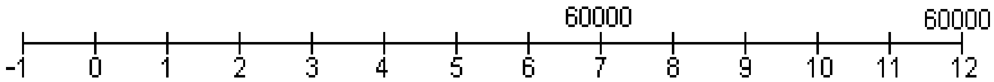
маємо $S = 1{,}06 \cdot 250 \cdot \frac{1{,}06^{5} - 1}{0{,}06} = 1493{,}83$ (грн). З іншого боку, $S = R(S((n+1),i) - 1) = 250 \cdot \left(\frac{1{,}06^{6} - 1}{0{,}06} - 1\right) = 1493{,}83$ (грн).

1.3.2.3. Відкладені прості ренти

Якщо рента починається не в початковий момент часу, а в деякий інший момент у майбутньому, то вона називається *відкладеною рентою*. Відкладену ренту завжди вважають звичайною (платежі проводяться в кінці періодів). Час, який минув від теперішнього моменту до початку ренти, називається *періодом відтермінування*. Так період відтермінування ренти з виплатами щопівроку і першою виплатою через 6 років дорівнює 5,5 років.

Приклад 1.3.6. Обчислити теперішню вартість відкладеної ренти з виплатами 60000 гривень у кінці кожного півріччя, якщо перша виплата здійснюється за 3,5 роки, остаточна – за 6 років. Проценти нараховуються за ставкою 14% річних.

Розв'язок. Часова схема виплат:



Всього в нашій ренті проведемо 6 виплат. Тоді рівняння еквівалентності

$$A\cdot(1{,}14)^{6}=60000\cdot\frac{1-(0{,}14)^{-6}}{0{,}14}=23332{,}04\ \text{(грн.)},$$

звідки $A=(1{,}14)^{-6}\cdot 23332{,}04=106297{,}04$ (грн.).

Теперішню вартість відкладеної ренти можна знайти також з таких міркувань. Додамо до вихідної ренти шість виплат розміром 60000 гривень. Теперішня вартість отриманої ренти є сумою теперішніх вартостей вихідної та додаткової ренти. При цьому додаткова рента має шість виплат. Рівняння еквівалентності щодо A: $A+60000\cdot a(6{,}14\%)=60000\cdot a(12{,}14\%)$, або

$$A=60000\cdot\frac{1-(1{,}14)}{0{,}14}-60000\cdot\frac{1-(1{,}14)^{-6}}{0{,}14}=106297{,}2\ \text{(грн.)}.$$

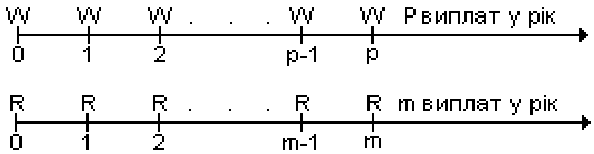
Застосовуючи перший метод до відкладеної на k періодів ренти отримаємо, що теперішня вартість задовільняє рівність $A=\left(1+i\right)^{-k}\cdot R\cdot a(n,i)$. За другим методом $A=R(a(n+k,i)-a(n,i))$. Порівнявши праві частини отриманих рівностей, матимемо $a(n+k,i)-a(k,i)=(1+i)^{-k}a(n,i)$.

1.3.2.4. Загальні ренти

Особлива увага до *загальних рент* є наслідком того, що вони мають необмежену сферу застосувань у фінансовій діяльності банків, інвестиційних компаній, фінансово-промислових груп, акціонерних товариств і т.д. Для того, щоб обчислити параметри будь-якого потоку платежів, треба навчитись складати рівняння еквівалентності для певного фінансового моменту часу. Рента називається загальною, *якщо період (інтервал між послідовними виплатами) не збігається з періодом нарахувань процентів*.

Основне завдання теорії загальних рент – навчитись зводити загальну ренту до еквівалентної їй простої ренти.

Побудуємо дві схеми виплати загальної та простої ренти.



де W – розмір грошових виплат загальної ренти; p – кількість грошових виплат у рік загальної ренти; j – процентна ставка, яка відповідає періоду нарахувань загальної ренти, i – процентна ставка за період нарахувань простої ренти; m – кількість періодів нарахувань у році; R – величина виплат простої ренти, еквівалентної загальній.

Нагадаємо, що періоди виплати і нарахувань для простої ренти збігаються. *Проста і загальна ренти вважаються еквівалентними, якщо виконуються такі умови*:

а) процентні ставки за періоди для них повинні бути еквівалентними;

б) еквівалентні даним рентам значення, які відповідають одному й тому ж моменту часу, повинні бути однаковими.

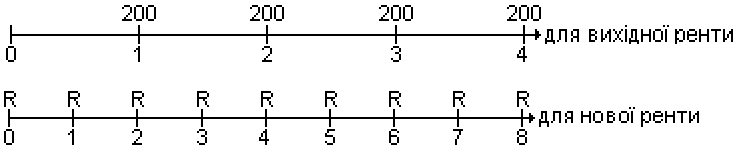
Виходячи з умови а) еквівалентності процентних ставок, отримуємо $(1+j)^p = (1+i)^m$ або $j = (1+i)^{m/p} - 1$.

Використовуючи умову б), і прирівнявши нарощені суми грошей за рік, отримаємо $Rs(m,i) = Ws(P,j)$,

або $R \cdot \dfrac{(1+i)^m - 1}{i} = W \cdot \dfrac{(1+j)^p - 1}{j} \;\Rightarrow\; \dfrac{R}{i} = \dfrac{W}{j} \;\Rightarrow\; R = W\dfrac{i}{j} = W\dfrac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}$.

Приклад 1.3.7. Замінити звичайну ренту терміном на 2 роки з виплатами 200 грн. у кінці кожного півріччя і нарахуванням процентів щокварталу за ставкою 20% річних на просту ренту з щоквартальними виплатами.

Розв'язок. Діаграми виплат для вихідної та нової ренти:



Тоді $R = W\dfrac{i}{(1+i)^{m/p}-1} = \dfrac{0.05}{(1{,}05)^{4/2}-1}\cdot 200 = 97{,}6$ (грн.).

Для обчислення поточної та нарощеної сум загальної ренти ми спочатку перетворюємо її в еквівалентну просту ренту. Потім знаходимо поточне значення нової простої ренти за формулою $A = R\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Підставивши $R = W\dfrac{i}{(1+i)^{m/p}-1}$, отримаємо $A = W\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{m/p}-1}$, де n – термін ренти в періодах нарахування процентів; p – кількість виплат загальної ренти в рік; i – процентна ставка за період нарахування; m – кількість періодів нарахування в році.

Аналогічно $S = R\dfrac{(1+i)^n-1}{i} = R\dfrac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{m/p}-1}$.

Приклад 1.3.8. Обчислити поточне та нарощене значення звичайної ренти з виплатами по 80 грн у кінці кожного півріччя при щомісячному нарахуванні процентів за процентною ставкою 12% річних. Термін ренти – 2 роки.

Розв'язок. $A = W\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{m/p}-1} = 80\dfrac{1-(1+0{,}01)^{-24}}{(1{,}01)^6-1} = 276{,}25$ (грн.),

$S = W\dfrac{(1+i)^n-1}{(1+i)^{m/p}-1} = 80\dfrac{(0{,}01)^{24}-1}{(1{,}01)^6-1} = 350{,}76$ (грн.).

Дуже часто виникає необхідність знаходити величину грошових виплат загальної ренти за відомим поточним або нарощеним значенням.

Приклад 1.3.9. Кредит розміром 1500 грн. видано під 14% річних при нарахуванні процентів щороку. Обчислити розмір щоквартальних платежів, за допомогою яких борг погашається за 2 роки.

Розв'язок. Величина грошових виплат простої звичайної ренти $R = A \cdot \dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 1500 \cdot \dfrac{0{,}07}{1-(1{,}07)^{-4}} = 442{,}84$ (грн.). Тоді

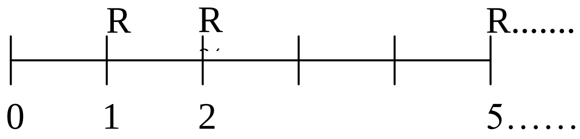
$$W = R \cdot \frac{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}{i} = 442{,}84 \cdot \frac{(1+0{,}07)^{\frac{2}{8}}}{0{,}07} = 107{,}9 \text{ (грн.)}.$$

1.3.2.5. Вічні (нескінченні) ренти

Рента, грошові виплати якої не обмежені терміном, називається *нескінченною (вічною)*.

Прикладом вічної ренти може бути послідовність періодичних виплат процентів на інвестований капітал. Класифікація вічних рент є аналогічною класифікації простих рент (звичайні, зведені, відкладені). Наприклад, *проста нескінченна рента* – це нескінченна послідовність платежів з нарахуванням процентів в кінці кожного періоду.

Часова схема для простої нескінченної ренти така:



Нехай як і раніше A – поточна сума грошей звичайної простої нескінченної ренти, i – процентна ставка, яка відповідає періоду виплат, а R – грошова сума виплат за ставкою i. Оскільки сума грошей A в початковий момент часу забезпечує виплати процентів у кінці кожного періоду доти, доки сума грошей залишиться інвестованою, то $R = A \cdot i \;\Rightarrow\; A = R / i$.

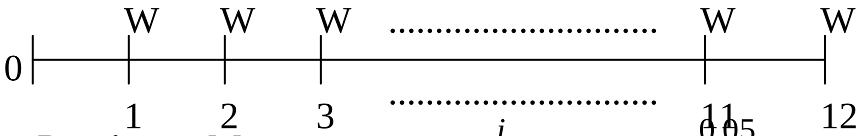
Приклад 1.3.10. Знайти суму грошей, яку потрібно для заснування фонду допомоги розвитку малого бізнесу, який би забезпечував 150 тис.грн. у кінці кожного року, якщо гроші можуть бути інвестовані за ефективною ставкою – 4% річних.

Розв'язок. Ми маємо справу зі звичайною нескінченною рентою з виплатами $R = 150$ тис.грн. та $i = 0{,}04$. Тоді $A = \frac{R}{i} = \frac{150}{0{,}04} = 3750$ (тис.грн.).

У багатьох ситуаціях період виплати не збігається з періодом нарахування процентів. В цьому випадку нескінченна рента називається *загальною нескінченною рентою*. Зв'язок між виплатами загальної та простої нескінченної рент описується формулою $R = W \cdot \frac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}$.

Поточне значення такої ренти можна обчислити за допомогою перетворення її в просту ренту та використанням формули $A = \frac{R}{i}$.

Приклад 1.3.11. Знайти поточну суму грошей нескінченної ренти з виплатами по 60 тис.грн. у кінці кожного місяця при ефективній ставці на інвестиції 5% річних. Часова діаграма виплат:



Розв'язок. Маємо $R = W \cdot \frac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1} = 60 \cdot \frac{0{,}05}{(1{,}05)^{\frac{1}{12}} - 1} = 736{,}35$ (тис.грн.). Тоді

$A = R / i = 736{,}36 / 0{,}05 = 14727{,}09$ (тис.грн.).

Вічна зведена рента визначається як послідовність періодичних виплат, які здійснюються на початку кожного періоду.

Зведені нескінченні ренти поділяються на:

- прості нескінченні (період нарахувань процентів збігається з періодом виплат);
- загальні нескінченні (період нарахувань процентів не збігається з періодом виплат).

Оскільки зведена нескінченна рента в даному випадку відрізняється від звичайної тільки однією виплатою в початковий момент часу, то її теперішня вартість дорівнюватиме $A=R+\frac{R}{i}$. Аналогічно поточне значення нескінченної загальної ренти дорівнюватиме $A=W+\frac{R}{i}$. Підставляючи в останню формулу $R=W\cdot\frac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}}-1}$, отримаємо $A=W\cdot\left(1+\frac{1}{(1+i)^{\frac{m}{p}}-1}\right)=W\cdot\frac{(1+i)^{\frac{m}{p}}}{(1+i)^{\frac{m}{p}}-1}$. Звідси $A\cdot i=W\cdot\frac{i}{1-(1+i)^{-\frac{m}{p}}}=R$.

Отримана формула встановлює співвідношення між виплатами двох еквівалентних вічних рент (простої звичайної ренти та загальної зведеної ренти).

Приклад 1.3.12. Знайти поточне значення зведеної нескінченної ренти з виплатами по 150 грн. на початку кожного кварталу та ефективною ставкою 8% річних.

Розв'язок. Спочатку знайдемо величину виплат еквівалентної простої ренти за формулою $R=W\cdot\frac{i}{1-(1+i)^{-\frac{m}{p}}}$; $R=150\cdot\frac{0{,}08}{1-(1{,}08)^{\frac{1}{4}}}=629{,}7$ (грн.). Тоді $A=\frac{629{,}71}{0{,}08}=7871{,}39$ (грн.).

1.3.2.6 Зростаючі ренти

Якщо періодичні виплати ренти утворюють зростаючу арифметичну прогресію, то така рента називається *зростаючою*.

Послідовність виплат такої ренти терміном n років має вигляд: $a; a+b; a+2b; \ldots; a+(n-1)b$.

Найпростішим прикладом є ренти з одиничною першою виплатою, та кожною наступною на одиницю більшою за попередню.

Поточне значення звичайної ренти набуде такого вигляду

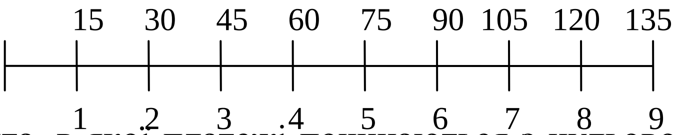
$$(Ia)_{\overline{n}|i} = \frac{1}{i}\left[\frac{1-V^n}{1-V} - nV^n\right], \quad V = \frac{1}{1+i}.$$

Приклад 1.3.13. Знайти поточне значення зростаючої ренти з першою виплатою 15 гривень, та кожною наступною на 15 гривень більшою за попередню. Проценти нараховуються за ставкою 4% на місяць, термін ренти – 9 місяців.

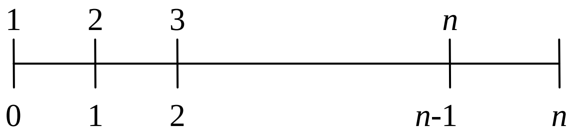
Розв'язок. Нехай A – поточне значення ренти. Тоді

$$A = 15 \cdot (Ia)_{\overline{n}|i} = \frac{15}{0{,}04}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^9}{1-\frac{1}{1{,}04}} - 9 \cdot \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^9\right] = 528{,}95(\text{грн.}).$$

Часова схема виплат



Зростаюча рента, в якої платежі починаються з нульового моменту часу, називається *зведеною зростаючою рентою*. Її часова схема виплат має вигляд:



Поточне значення такої ренти позначимо через $(I\ddot{a})_{\overline{n}|i}$. Зв'язок між поточними значеннями зведеної та звичайної зростаючих рент наступний $(I\ddot{a})_{\overline{n}|i} = (1+i)(Ia)_{\overline{n}|i}$.

Нарощені значення зростаючих рент, що відносяться до моменту n, виражаються формулами $(Is)_{\overline{n}|i} = (1+i)^n (Ia)_{\overline{n}|i}$, $(I\ddot{s})_{\overline{n}|i} = (1+i)^n (I\ddot{a})_{\overline{n}|i}$. Крім того, $(I\ddot{s})_{\overline{n}|i} = (1+i)(Is)_{\overline{n}|i}$.

Контрольні запитання та завдання

1. Що таке потік платежів?

2. Що називається величиною потоку в момент T, сучасною величиною потоку і який зв'язок між ними?

3. Що розуміють під внутрішньою нормою дохідності і як її обчислюють?

4. Що таке фінансова рента (ануїтет)?

5. Коротко охарактеризуйте наступні параметри ренти: член ренти; період ренти; термін ренти; процентна ставка; нарощена сума; теперішня (поточна) величина ренти

6. Яку ренту називають скінченною річною рентою?

7. Яка рента називається постнумерандо, а яка пренумерандо?

8. Як знаходиться сучасна величина A скінченної річної ренти?

9. Що називають коефіцієнтом зведення ренти (дисконтним зведеним множником) $a(n,i)$, нарощеною величиною ренти S, коефіцієнтом нарощення ренти $s(n,i)$?

10. Який зв'язок між сучасною величиною A і нарощеною величиною S, між коефіцієнтом зведення $a(n,i)$ та коефіцієнтом нарощення $s(n,i)$?

11. Що показують коефіцієнти зведення $a(n,i)$ та нарощення $s(n,i)$?

12. Яка рента називається зведеною простою?

13. Як знаходять теперішню (поточну) та нарощену суму грошей для зведеної простої ренти?

14. Яку просту ренту називають відкладеною?

15. Яка рента називається загальною?

16. В чому полягає основне завдання теорії загальних рент?

17. Який зв'язок між процентною ставкою j загальної ренти та процентною ставкою i простої ренти, між величиною виплат R простої та величиною виплат W загальної?

18. Як обчислюються поточна A та нарощена S суми загальної ренти?

19. Яка рента називається вічною (нескінченною)?

20. Який зв'язок між виплатами загальної та простої нескінченної ренти?

21. Як визначається вічна зведена рента і на які типи вона поділяється?

22. Яка рента називається зростаючою?

23. Нехай задано потік а) $R=\{(-1000;1),(500;2),(1000;3)\}$;

б) $R=\{(-1500;1),(-500;2),(1000;3)\}$. Знайти поточну та кінцеву величину потоку за процентною ставкою а) $i=15\%$; б) $i=20\%$.

24. Розглянемо а) 3– річну; б) 4– річну ренти з річним платежем а)1500грн.; б) 2000грн., і процентною ставкою а) $i=8\%$; б) $i=9\%$. Знайти нарощену та теперішню суму ренти.

25. Знайти теперішню суму грошей зведеної ренти з виплатами а) 100 грн.; б) 200 грн. на початок кожного півріччя при нарахуванні процентів за ставкою а) $i=8\%$; б) $i=9\%$. Термін ренти: а) 3 роки; б) 5 років.

26. Обчислити нарощену суму грошей зведеної ренти, яка містить а) 4 виплати; б) 6 виплат розміром а) 150 грн.; б) 200 грн. кожна при нарахуванні процентів за ставкою а) 7%; б) 8% річних.

27. Обчислити теперішню вартість відкладеної ренти з виплатами а) 4000 грн., б) 5000 грн. у кінці кожного півроку, якщо а) перша виплата здійснюється за три роки, а остання за 5 років; б) перша виплата здійснюється за 2,5 роки, а остання за 5 років. Проценти нараховуються за ставкою а) $i=10\%$; б) $i=12\%$ річних.

28. Обчислити поточне та нарощене значення звичайної ренти з виплатами а) 60 грн.; б) 70 грн. у кінці кожного півріччя при нарахуванні процентів а) кожних два місяці; б) кожних три місяці за процентною ставкою а) 9%; б) 18% річних. Термін ренти – 3 роки.

29. Кредит розміром а) 1000 грн.; б) 2000 грн. видано під а) 20%; б) 22% річних при нарахуванні процентів щопівроку. Обчислити величину платежів, що погашаються кожних чотири місяці, щоб борг погасився за а) 3 роки; б) 2 роки і чотири місяці.

30. Знайти теперішню та нарощену суму грошей звичайної ренти, яка складається з: а) трьох; б) п'яти виплат по а) 150 грн.; б) 250 грн. кожна, при ставці капіталізації а) 9%; б) 10% річних.

31. Замінити звичайну ренту терміном на: а) 3 роки; б) 4 роки з виплатами по а) 150 грн.; б) 250 грн. у кінці кожного півріччя і нарахуванням процентів

щокварталу за ставкою а) 16%; б) 24% річних на просту ренту з щоквартальними виплатами.

32. Знайти суму грошей для заснування фонду допомоги розвитку малого бізнесу, який би забезпечував: а) 100000 грн.; б) 210000 грн. у кінці кожного року, якщо гроші можуть бути інвестовані за ставкою а) $i = 5\%$; б) $i = 6\%$ річних.

33. Знайти поточну суму грошей нескінченної ренти з виплатами по а) 40000 грн.; б) 50000 грн. у кінці кожного місяця при ефективній ставці на інвестиції: а) 4%; б) 5% річних.

34. Знайти поточне значення зведеної нескінченної ренти з виплатами по а) 100 грн.; б) 200 грн. на початку кожного кварталу та ефективною ставкою а) 6%; б) 7% річних.

35. Знайти поточне значення зростаючої ренти з першою виплатою а) 10грн.; б) 20 грн. та кожною наступною на а) 10 грн.; б) 20 грн. більшою за попередню. Проценти нараховуються за ставкою а) 3%; б) 5% на місяць, а термін ренти а) 6 місяців; б) 12 місяців.

1.4. Кредитні розрахунки

1.4.1. Основні методи погашення займу

Жодне підприємство, якщо воно прагне розвиватись, не обходиться без довготермінових *позик*, які воно бере в банку або в інших підприємств. Якщо позика взята в банку, то її слід погашувати тільки грошовими безготівковими виплатами.

Слова “займ”, “кредит”, “позика” означають одне і те ж – надання грошей або товарів в борг на умовах повернення і, як правило, з виплатою процентів. Той, хто видає гроші або товари в кредит, називається *кредитором*, хто бере – *займачем* або *дебітором*. Умови видачі та погашення кредитів (займів, позик) доволі різноманітні. Розглянемо найпростіші та найбільш вживані способи погашення займів.

Погашення займів одним платежем в кінці. Нехай займ (позика, кредит) в сумі D виданий на n років під i складних річних процентів. На кінець n-го року його нарощена величина буде рівною $D(1+i)^n$. Якщо займ потрібно віддати одним платежем, то величина $D(1+i)^n$ буде розміром даного платежу.

Погашення основного боргу одним платежем в кінці. Сам займ називається *основним боргом*, а нарощений додаток – *процентними грішми*. Нехай займ D виданий на n років під i складних річних процентів. За 1-ий рік процентні гроші будуть рівними iD. Якщо ж їх виплатити, то залишиться основний борг D і виплати в кількості iD проводять в кінці кожного року: на кінець n-го останнього року виплати складають величину $D+iD$.

Погашення основного боргу рівними річними виплатами. Займ D виданий на n років під i складних річних процентів. При розглядуваному способі виплати в кінці кожного року виплачується n-на частка основного боргу, тобто величина $\frac{D}{n}$. В кінці 1-го року, крім того, платяться проценти з суми, тобто ще iD. Весь платіж в кінці 1-го року $R_1=\frac{D}{n}+iD$. В кінці 2-го року виплата складе $R_2=\frac{D}{n}+i\left(D-\frac{D}{n}\right)$і т.д., в кінці n -го року $R_n=\frac{D}{n}+\frac{iD}{n}$. Таким чином, платежі $R_1,R_2,...$ утворюють спадну арифметичну прогресію з різницею $\frac{iD}{n}$, першим членом $R_1=\frac{D}{n}+iD$ і останнім $R_n=\frac{D}{n}+\frac{iD}{n}$.

Погашення займу рівними річними виплатами. Нехай займ D виданий на n років під i складних річних процентів. В кінці кожного року виплачується однакова сума R. Такі виплати можна розглядати, як річну ренту тривалістю n років і річним платежем R. Прирівнявши поточну величину цієї ренти величині займа D, одержимо рівняння $D=R\cdot a(n,i)=R\cdot\frac{1-(1+i)^n}{i}$, звідки $R=\frac{iD}{1-(1+i)^{-n}}$.

Погашення займу рівними виплатами декілька раз в рік. Нехай виплати розміром R проводяться m раз рік, а їх кількість $n \cdot m$. На ці виплати нараховуються проценти також m раз в рік за ставкою $j = \frac{i}{m}$ (можна вважати, що виплати здійснюються в той же банк, який дав займ, і там нараховують на них проценти). Ці виплати утворюють відповідну ренту, нарощена величина якої $S = R \cdot \left(\frac{(1+j)^{nm} - 1}{j} \right)$. Нарощена величина займу $S = D(1+j)^{nm}$. Тоді $R \cdot \frac{(1+j)^{nm} - 1}{j} = D(1+j)^{nm}$, звідки $R = \frac{D(1+j)^{nm} \cdot j}{((1+j)^{nm} - 1)} = \frac{iD}{1-(1+j)^{-nm}} = \frac{D}{a(nm; j)}$.

Загальний метод погашення займу. Нехай займ величиною D виданий на n років під i складних річних процентів. Загалом погашувальні платежі – це сума платежів D_k, які йдуть на виплату основного боргу D, і платежів I_k, які йдуть на виплату процентних грошей, нарахованих на залишок основного боргу після попереднього платежу.

Розглянемо частинний випадок. Нехай займ виданий терміном на два роки. В кінці першого року було виплачено в перший рахунок оплати основного боргу D_1 і на весь борг нараховано проценти $I_1 = iD.$ Тоді на кінець першого року сумарний платіж склав $D_1 + iD$. В кінці другого року був виплачений залишок основного боргу $D_2 = D - D_1$ і проценти за цей рік iD_2, а сумарний платіж склав $D - D_1 + i(D - D_1)$. Гроші $D_1 + iD$, виплачені в кінці першого року, за другий рік зросли до $(D_1 + iD)\cdot(1+i)$. Таким чином, за два роки було виплачено, з врахуванням процентів, нарахованих за платіж в кінці року, $(D + iD)(1+i) + (D - iD)(1+i) = (1+i)(D_1 + iD + D - D_1) = D(1+i)^2$, що збігається з нарощеною сумою займу за два роки.

Аналогічно можна показати, що за n років відповідна сума збігається з нарощеною величиною займу $D(1+i)^{n}$.

1.4.2. Формування фонду погашення

При погашенні (амортизації) займу (боргу) кредитор повертає свій капітал невеликими частинами, які він завжди може інвестувати. Дуже вірогідно, що одержані гроші деякий час не даватимуть прибуток. З цієї причини кредитор може одержувати основну суму повністю в кінці строку, але проценти на неї повинні виплачуватись періодично. Наприклад, якщо 200 гривень нараховано в кредит на два роки за процентною ставкою 8% річних, то борг можна погасити двома щорічними виплатами по 16 гривень кожна, та однією в розмірі 200 гривень у кінці року. Коли кредит видано на таких умовах, тоді боржник здебільшого створює *фонд погашення* цього боргу і накопичує на ньому засоби, щоб погасити займ єдиним платежем в кінці терміну займу. Зрозуміло, що це має сенс, якщо в займача є можливість одержувати на гроші погашувального фонду більші проценти, ніж ті, під які він взяв займ.

Нехай займ в розмірі D взятий на початку року на n років за ставкою i складних процентів в рік. Тоді на кінець n-го року він виросте до $D(1+i)^n$. Платежі в погашувальний фонд утворюють ренту з річним платежем Ri, річною ставкою складних процентів $q > i$. Тоді в фонді на кінець n-го року буде сума $S = \frac{R\left[(1+q)^n - 1\right]}{d}$.

Приклад 1.4.1. 750 гривень надано в кредит терміном на 5 років за процентною ставкою 18% річних, причому проценти за кредит повинні виплачуватись в кінці кожного півріччя. Обчислити необхідну величину виплат у фонд погашення боргу, якщо проценти нараховуються за процентною ставкою 10% річних. Якою буде сума цього фонду до кінця другого року.

Розв'язок. Проценти на виплату фонду нараховуються за процентною ставкою 10% річних, тому, аби на кінець п'ятого року фонд містив 750 гривень, потрібно, щоб розмір виплат $R = 750 \cdot \frac{0{,}05}{(1{,}05)^{10} - 1} = 59{,}62$ (грн.). Проценти на борг в кінці кожного півріччя становлять 4% від 750 грн., тобто 30 грн. Повний видаток за півріччя рівний 59,62+30=89,62 (грн.). На кінець другого року $S_2 = 59{,}62 \cdot \frac{(1{,}05)^4 - 1}{0{,}05} = 329{,}1$ (грн.).

1.4.3. Розрахунок процентних платежів

В світовій фінансовій практиці при розрахунку процентів за кредит використовують наступні величини. В формулі (1.2.3) поділимо чисельник і знаменник дробу на i: $I = \frac{Pd}{k/i} = \frac{Pd}{D'}$, де добуток Pd називається *процентним числом*, а $D' = k/i$ – *процентним ключем* або *дивізором*. Очевидно, що при однаковій процентній ставці i, але при різних $k\,(k = 360, k = 365)$ буде різним дивізор.

Дивізор k/i чисельно дорівнює такій кількості грошових одиниць (гривні, долари, євро і т.д.), з яких при процентній ставці i отримується одна одиниця доходу (1 гривня, 1 долар, 1 євро) в день. Це можна пояснити так: i грошових одиниць (i гривень) одержуються з одної грошової одиниці (1 гривні) за k днів. Тому одна грошова одиниця за той же час (1 гривня) одержується з капіталу $1/i$, а щоб мати 1 грошову одиницю доходу кожен день, необхідно взяти в k раз більше, тобто k/i.

Приклад 1.4.2. Обчислити величину процентних грошей з суми 2400 грн, яку надають в борг під 20% річних на термін з 5 березня по 21 вересня того ж року, а кількість днів $k = 365$.

Розв'язок. Число днів $d = 200$, $P = 2400$ грн, $k = 365$. Тоді $D' = 365/0{,}2 = 1825$ і $I = Pd/D' = 2400 \cdot 200/1825 = 263$(грн.). Аналогічний результат можемо отримати за формулою (1.2.3).

Якщо ставка i виражається в процентах, то, очевидно, дивізор $D' = 100k/i$.

При обчисленні процентного платежу не завжди відома величина капіталу P. Можливі такі ситуації (наприклад, в заставних операціях), що відома або тільки величина капіталу, збільшеного на процентний платіж $(P+I)$, або зменшеного на процентний платіж $(P-I)$.

Нехай відома величина $F=P+I$, річна ставка i (у вигляді десяткового дробу) і тривалість ℓ (виражена в роках, не обов'язково натуральним числом) фінансової операції. Тоді $i_\ell=\ell i$ буде процентною ставкою за час ℓ, а для знаходження процентного платежу скористаємося формулою $I=\frac{Fi_\ell}{1+i_\ell}=\frac{F\ell i}{1+\ell i}$.

Якщо ж відома величина $K=P-I$, то для знаходження процентного платежу I скористаємося формулою $I=\frac{Ki_\ell}{1+i_\ell}=\frac{K\ell i}{1+\ell i}$.

Приклад 1.4.3. Знайти величину доходу кредитора, якщо за надання в борг деякої суми на півроку він отримав від займача 6300 грн. При цьому застосовувалась проста процентна ставка в 10% річних.

Розв'язок. Оскільки $F=6300$ грн., $\ell=0{,}5$ року, $i=0{,}1$, то

$$I=\frac{F\ell i}{1+\ell i}=\frac{6300\cdot 0{,}5\cdot 0{,}1}{1+0{,}5\cdot 0{,}1}=300(\text{грн.}).$$

У випадку, коли термін фінансової операції виражений в днях і позначений через ∂, то процентні платежі виражаються формулами

$$I=\frac{F\frac{\partial}{k}i}{1+\frac{\partial}{k}i}=\frac{F\partial}{D'+\partial}, \qquad I=\frac{K\frac{\partial}{k}i}{1+\frac{\partial}{k}i}=\frac{K\partial}{D'+\partial}.$$

Приклад 1.4.4. Банк надав кредит в сумі 10000 грн. 6 липня. Знайти суму, яку потрібно повернути, якщо борг потрібно віддати 14 вересня цього ж року, а нараховані за ставкою 12% річних проценти були утримані банком в момент надання кредиту. Число днів в році $k=360$.

Розв'язок. Оскільки $\partial=70$ днів, $k=360$ днів, $i=0{,}12$, $D'=360/0{,}12=3000$, $K=10000$ грн., то $I=\frac{10000\cdot 70}{3000-70}=239$ (грн.). Таким чином, потрібно повернути борг в сумі $P=K+I=10000+239=10239$ (грн.).

В банках при обслуговуванні поточних рахунків для нарахування процентів часто використовують величини $P\partial/100$, які як і $P\partial$ називаються процентними числами. В цьому випадку формула для обчислення дивізора залишається тією ж $D'' = k/i$, але процентна ставка i в них виражена в процентах.

Зазвичай сума на рахунку змінюється в результаті надходжень або зняття грошових сум. Для того, щоб знайти загальну величину нарахованих процентів за деякий термін, спочатку визначають процентні числа за кожний термін часу, коли сума на рахунку не змінювалась. Потім всі процентні числа додаються і одержане значення ділиться на D''.

Приклад 1.4.5. Рахунок відкрито 15 лютого і на нього була покладена сума 5000 грн. В наступному кварталі 10 квітня на рахунок надійшло 300 грн. Потім 20 травня з рахунку було знято 2000 грн., а 1 вересня покладена сума 1000 грн. і 4 грудня рахунок закрили. Операції здійснюються в невисокосному році. Визначити суму, отриману власником рахунку, якщо процентна ставка дорівнює 12% річних і $k = 360$.

Розв'язок. Спочатку визначаємо суми, які послідовно фіксувалися на рахунку: 5000грн.; 5000+3000=8000грн.; 8000-2000=6000грн.; 6000+1000=7000 грн. Потім знаходимо терміни зберігання цих сум: 54, 40, 104, 94 дні. Сума процентних чисел складе $1000 \cdot \frac{5 \cdot 54 + 8 \cdot 40 + 6 \cdot 104 + 7 \cdot 94}{100} = 18720$. Дивізор в даному випадку $D'' = \frac{360}{12} = 30$. Відповідно загальна величина нарахованих процентів складе $18720/30 = 624$(грн.), а власник рахунку отримає 7000+624=7624 (грн.).

1.4.4. Споживчі кредити

Споживчим (або особливим) кредитом називається кредит, який надає банк, фінансова установа, підприємство роздрібної торгівлі окремому індивідууму на споживчі цілі (наприклад, для купівлі предметів особливого споживання).

Найчастіше зустрічається така форма споживчого кредиту-продаж в кредит таких товарів, які населення не може купити тільки на зарплату (автомобілі, побутова техніка, меблі і т.д.), що природно стимулює попит на ці товари.

Існують різні способи погашення споживчого кредиту. Розглянемо деякі з них:

Один із способів передбачає *нарахування відсотків на всю суму кредиту та приєднання їх до основного боргу в момент відкриття кредиту*, причому погашення боргу з процентами (нарощеною сумою) відбувається рівними сумами протягом всього терміну кредиту. Таким чином, якщо розмір кредиту рівний P, процента ставка i, термін кредиту n (в роках не обов'язково цілих), то нарощена сума боргу F визначається за формулою нарощення за простими процентами $F = P(1+ni)$, а величина R разового погашувального платежу за формулою $R = F/nm$.

При рівномірній виплаті процентів у борговому забов`язанні переважно вказується дійсна вартість кредиту, яка визначається реальною річною процентною ставкою j_k, проценти за якою завжди нараховуються на не виплачений залишок основного боргу, $j_k = 2mI/P(n+1)$, де m - число виплат у році, I - сума процентів на кінець терміну, n - загальна кількість виплат, P - основна сума кредиту.

Приклад 1.4.6. Товар ціною 3000 грн. продається в кредит на 2 роки під 12% річних з щоквартальними рівними платежами, причому нараховуються прості проценти. Визначити борг з процентами, проценти і величину разового погашувального платежу.

Розв'язок. Оскільки $P = 3000$, $n = 2$, $i = 12\%$, то за формулою нарощення за простими процентами $F = 3000(1+2\cdot 0{,}12) = 3720$(грн), $I = 3720 - 3000 = 720$ (грн). При $m = 4$ (число кварталів в році) величина разового платежу $R = 3720/2\cdot 4 = 465$ (грн.).

При погашенні споживчого кредиту рівними платежами може виникнути задача визначення частки корисної виплати, яка іде на погашення нарахованих процентів. Для складання такого детального плану виплати можна скористатися “*правилом 78*”, яке полягає в наступному.

Знаходимо суму порядкових номерів всіх платежів. Наприклад, якщо таких платежів буде дванадцять, то 1+2+3...11+12=78 (що і визначило назву правила, оскільки в році 12 місяців і платежі часто здійснюються щомісячно). Згідно з “правилом 78” частина першого погашувального платежу піде на виплату 12/78 від загальної нарахованої величини процентів (тобто $(12/78)\cdot I$), а решта $R-12I/78$ піде в рахунок виплати основного боргу.

Для другого платежу потрібно взяти дріб 11/78, третього – 10/78 і т.д.

Якщо загалом буде k запланованих платежів, то $N=1+2+\cdots+k=((1+k)/2)k$ і при використанні “правила 78” необхідно послідовно брати дроби $\frac{k}{N}$, $\frac{k-1}{N},\cdots,$ $\frac{1}{N}$. Очевидно, що $\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{N}=1$.

Схема зі спадною величиною процентного платежу відіграє двояку роль. По-перше, вона відповідає логіці кредитних операцій: оскільки протягом часу відбувається погашення основної суми боргу, то стільки і сума процентів, нарахованих на залишок непогашеного боргу, повинна знижуватися. По-друге, вона певною мірою страхує кредитора на випадок дострокового погашення боргу, якщо це передбачено кредитною угодою. При достроковому погашенні займач зазнає певнго збитку, оскільки більшу частину процентів він заплатить на погашення терміну кредитування.

Для прикладу 1.4.6 план погашення наступний: оскільки заплановано $k=2\cdot 4=8$ платежів, то $N=((1+8)/2)\cdot 8=36$. Тому з першого погашувального платежу в рахунок процентів піде 8/36 від загальної суми нарахованих процентів: $720\cdot 8/36=160$ (грн.). Відповідно частина основного боргу 465-160=305 (грн.). На початку наступного кварталу залишок основного боргу 3000-305=2695 (грн.).

В другому кварталі в рахунок виплати процентів піде 7/36 від загальної суми нарахованих процентів: $720\cdot 7/36=140$ (грн.), частина основного боргу 465-140=325 (грн.), а залишок основного боргу 2695-325=2370 (грн.) і т.д.

З допомогою “правила 78” займач також може обчислити суму, яку йому не доведеться сплачувати в рахунок оплати процентів у випадку повернення кредиту раніше терміну (якщо така ситуація передбачена договором).

Нехай в прикладі 1.4.6 прийняте рішення повернути кредит після трьох погашувальних платежів. Пронумеруємо, починаючи з одиниці, п’ять платежів, що залишилися, і знайдемо суму їх нових порядкових номерів:
1+2+3+4+5=15. Тоді 15/36 загальної величини нарахованих процентів не доведеться виплачувати: $720 \cdot 15/36 = 300$ (грн.).

Загалом, якщо було заплановано k платежів, а після m-ого платежу було прийнято рішення повернути кредит, то не доведеться виплачувати суму MI/N, де $M = 1 + 2 + \cdots + k - m$.

При іншому способі погашення враховується, що борг не є сталою величиною, а протягом часу зменшується, а проценти нараховуються щоразу на залишок боргу. Сам борг виплачується рівними сумами.

Нехай погашувальні платежі вносяться кожні ℓ місяців, або $12/\ell$ раз в році і всього повинно бути внесено $k = (12/\ell) \cdot n$ платежів за час кредитування. Тоді за перші ℓ місяців нараховуються проценти в розмірі $I_1 = \dfrac{P\ell i}{12} = \dfrac{Pni}{k}$. За наступні ℓ місяців нараховуються проценти на залишок боргу $I_2 = \left(P - \dfrac{P}{k}\right) \cdot \dfrac{\ell i}{12} = I_1 \dfrac{k-1}{k}$. Аналогічно: $I_3 = I_1 \dfrac{k-2}{k}$, ... , $S_s = I_1 \dfrac{k-s+1}{k}$, $\quad s = 1, 2, \ldots, k$.

Звідси випливає, що останній раз проценти нараховуватимуться в розмірі $I_k = I_1/k$, а загальна величина процентних виплат за користування кредитом дорівнює сумі цих процентних платежів:

$$I = \sum_{s=1}^{k} I_s = I_1\left(1 + \frac{k-1}{k} + \frac{k-2}{k} + \cdots + \frac{1}{k}\right) = I_1 \frac{k+1}{2} = \frac{Pni}{2k}(k+1).$$

Ми врахували, що сума в дужках є арифметичною прогресією з першим членом 1 і різницею $(-1/k)$.

Величина $\dfrac{ni}{2k}(k+1)$ називається *процентним коефіцієнтом* і відображає співвідношення величини процентного платежу і кредиту.

1.4.5. Пільгові кредити

Довготермінові *пільгові кредити* надають юридичним особам в окремих випадках. Так Міжнародний валютний банк надає такі кредити державам, які перебувають у складних економічних ситуаціях, пов'язаних з інфляцією, перебудовою виробничих відносин, воєнними та стихійними подіями. Його особливістю є те, що надають цей кредит під низьку процентну ставку на досить великий термін з можливістю виділення *пільгового терміну*, тобто терміну, протягом якого будуть сплачуватись лише проценти. Пільговий кредит дуже вигідний боржнику, а кредитор за таких умов кредитування зазнає певних збитків, оскільки він міг би інвестувати цю суму грошей на більш вигідних умовах.

Нехай кредит розміром D, виданий на n років за пільговою ставкою g, меншою за звичайну ставку i, буде погашатися рівними виплатами. Ці виплати утворюють річну ренту. Позначимо розмір одної виплати y. Тоді теперішня величина ренти дорівнює: $D = ya(n,g) = y[1-(1+g)^{-n}]/g$. Звідси $y = Dg/[1-(1+g)^{-n}]$.

Якщо б виплати йшли за звичайною ставкою i, то розмір кожної виплати був би $z = Di/[1-(1+g)^{-n}]$. Різниця $z - y = \dfrac{Di}{1-(1+i)^{-n}} - \dfrac{Dg}{1-(1+g)^{-n}}$ – це щорічні *втрати кредитора*, а сучасна величина ренти цих втрат за діючою ставкою i:

$$(z-y)\cdot a(n,i) = [D/a(n,i) - D/a(n,g)] = D[1 - a(n,i)/a(n,g)] = D[1 - \frac{g}{i}\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+g)^{-n}}]$$ –

це *субсидія* кредитора займачу.

Для вимірювання втрат кредитора при видачі пільгового кредиту використовують показник, який називається *грант-елементом*.

Грант-елемент – це умовні втрати кредитора, які пов'язані з нижчою ставкою процентів, від прийнятих на ринку, та дорівнюють різниці між вартістю заданої суми боргу й теперішньою вартістю погашених сум і процентів.

Для оцінки втрат кредитора необхідно провести дисконтування суми боргу за двома процентними ставками і пільговою ставкою g та ставкою i. Грант-елемент може бути обчислений у вигляді *абсолютної* та *відносної величини*.

Субсидія кредитора-займачу $(z-y)\cdot a(n,i)=W$ називається *абсолютним грант-елементом*, а величина $\omega=1-\dfrac{a(n,i)}{a(n,g)}$ – *відносним грант-елементом*.

Приклад 1.4.7. Надано пільговий кредит 16 млн.грн. на 6 років під 12% річних. Звичайна ставка для довготермінових кредитів – 24%. Знайти абсолютну та відносну величини грант-елемента (втрати кредитора), якщо планується погашати кредит рівними терміновими виплатами.

Розв'язок. За таблицями складних процентів для знаходження коефіцієнтів теперішньої вартості ануїтету знаходимо $a(i,n)=a(12\%,\,6)=\dfrac{1-(1{,}12)^{-6}}{0{,}12}=4{,}1114$; $a(24\%,\,6)=3{,}02$.

Тоді відносний грант-елемент $\omega=1-\dfrac{a(n,i)}{a(n,g)}=1-\dfrac{3{,}02}{4{,}1114}=0{,}2655$, або $\omega=26{,}55\%$, а абсолютний грант-елемент

$$W=D\cdot\omega=16000000\cdot 0{,}2655=4247312{,}35 \text{ (грн.)}.$$

Отже, втрати кредитора – 4247312,35 (грн.), що становить 26,55% від наданої в кредит суми.

Якщо пільговий кредит надається з умовою існування пільгового періоду (L), то це ще більше зменшить втрати боржника і збільшить втрати кредитора. При цьому проценти за кредит можуть або виплачуватись у пільговому періоді, або приєднуватись до основної суми боргу, що буде погашатись $(n-L)$ років.

Коли проценти сплачуються під час пільгового періоду, то відносний грант-елемент дорівнює:

$$\omega=1-\left(\frac{a(i,n-L)}{a(g,n-L)}\cdot(1+i)^{-L}+g\cdot a(i,L)\right).$$

Коли проценти в пільговому періоді не сплачуються, а додаються до основної суми боргу, тоді відносний грант-елемент обчислюється за формулою:

$$\omega = 1 - \frac{a(i, n-L)}{a(g, n-L)} \cdot \left(\frac{1+g}{1+i}\right)^L .$$

Наприклад, втрати кредитора від надання пільгового кредиту в прикладі 1.4.7 за умови відтермінування на два роки зі сплатою процентів в пільговий період дорівнюють:

$$\omega = 1 - \left(\frac{a(24\%,4)}{a(12\%,4)} \cdot (1+0{,}24)^{-2} + 0{,}12 \cdot 1{,}457\right) = 0{,}3107, \text{ або } \omega = 31{,}07\% .$$

1.4.6. Позика

Окремим випадком пільгового кредиту є *позика*, яка не передбачає процентних сплат (безпроцентна позика). Видача такої позики призводить до ще більших втрат кредитора, розмір яких можна визначити, припустивши, що сума позики розміщена під проценти за ставкою i. Якщо безпроцентний кредит не передбачає пільгового періоду (відтермінування платежів погашення), тоді відносна величина втрат кредитора визначається за формулою $\omega = 1 - \frac{a(i,n)}{n}$.

Так для безпроцентного кредиту на три роки за ринковою процентною ставкою на довготермінові кредити 20% відносна величина втрат кредитора:

$$\omega = 1 - \frac{a(20\%,\, 3)}{3} = 0{,}2978, \text{ або } \omega = 29{,}78\% .$$

Якщо безпроцентний кредит передбачає існування пільгового періоду L, то відносні втрати кредитора становлять $\omega = 1 - \frac{a(i, n-L)}{n}(1+L)^L$.

Наприклад, якщо позику надано на 3 роки, враховуючи пільговий період 1 рік, то для $i = 20\%$, $\omega = 1 - \frac{a(20\%,\, 2)}{3} \cdot 1{,}2 = 0{,}5889$, або $\omega = 58{,}89\%$.

Існування річного пільгового кредиту збільшило відносні втрати кредитора майже на 30%.

1.4.7. Ломбардний кредит

Ломбардний кредит є однією з форм заставних операцій і є короткотерміновим кредитом під заставу цінних паперів, товарів та іншого майна. Як правило, термін ломбардного кредиту не перевищує три місяці.

За заставним договором закладене майно зі згоди кредитора та займача передається кредитору, хоча займач залишається власником закладеного майна. Проте, якщо кредит з певних причин не буде погашений, право власності переходить до кредитора, який постарається реалізувати майно, щоб принаймні вернути суму боргу разом з нарахованими процентами.

На практиці величина виданого ломбардного кредиту, як правило, не перевищує 75-80% номінальної вартості застави. Часто в якості застави фігурують цінні папери, зазвичай депоновані в банку, і які володіють досить високим ступенем ліквідності. При визначенні величини кредиту виходять з поточної курсової вартості цінних паперів.

Існують різні варіанти виплати боргу, обумовлені контрактом. Наприклад, в разі невиплати займачем вчасно всього боргу, може бути передбачена можливість часткового погашення та продовження строку кредиту. Якщо термін погашення кредиту перевищується, то встановлюється так звана штрафна (більш висока) процентна ставка, за якою займач і розраховується з кредитором за весь період перетермінування.

При розрахунках використовують спосіб 365/360, тобто враховують точну кількість днів, які складають термін ломбардного кредиту, і покладають, що в році 360 днів.

Приклад 1.4.8. Клієнт звернувся в банк 12 квітня з метою одержання кредиту під заставу 300 цінних паперів, причому курсова вартість кожного цінного паперу на цей день складає 100 грн. Банк надає кредит під 10% річних на 3 місяці в розмірі 80% курсової вартості цінних паперів. В контракті з клієнтом обумовлюється, що затрати банку на обслуговування боргу складають 1% від номінальної суми кредиту і утримуються разом з процентним платежем в момент надання кредиту. У випадку перетермінування виплати боргу клієнт розраховується з банком за кожний зайвий день за ставкою 12% річних. Знайти величину кредиту, який одержить клієнт.

Розв'язок. Курсова вартість всіх цінних паперів: $100 \cdot 300 = 30000$ грн., а номінальна величина кредиту $30000 \cdot 0{,}8 = 24000$ грн. Оскільки з 12 квітня по 12 липня – 91 день, то процентний платіж за кредит $I = 24000 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{91}{360} = 607$ (грн.). Затрати банку на обслуговування боргу $24000 \cdot 0{,}01 = 240$ (грн.). Банк наперед утримує процентний платіж і оплату за обслуговування боргу, а тому клієнт отримує кредит в розмірі $24000 - 607 - 240 = 23153$ (грн.).

Припустимо, що клієнт не зумів повернути борг вчасно і збирається розрахуватися з банком 1 серпня, тоді процентний платіж за 20 протермінованих днів за штрафною ставкою складе $24000 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{20}{360} = 160$ (грн.).

Таким чином, без врахування затрат на обслуговування боргу, які були утримані на початку операцій, клієнт повинен віддати банку $2400 + 160 = 24160$(грн.).

З прикладу видно, що клієнт отримує „на руки" меншу суму, ніж номінальна величина кредиту. Природно виникає і задача такого типу: при заданій сумі кредиту визначити, якою повинна бути застава.

Приклад 1.4.9. Підприємцю необхідна сума в 40000 грн. на 3 місяці. Банк надає йому кредит в розмірі 75% від вартості застави під 12% річних, а за обслуговування боргу утримує 400 грн. Визначити величину застави, якщо кредит взято 15 травня.

Розв'язок. Номінальна величина кредиту P з врахуванням процентного платежу і плати за обслуговування боргу дорівнює 40000 грн. Відповідно, K дорівнює $40000 + 400 = 40400$ (грн.). Кредит видається на 92 дні.

Оскільки термін фінансової операції виражений в днях, то величина процентного платежу $I = \frac{K\partial}{D' - \partial} = \frac{40400 \cdot 92}{(360/0{,}12) - 92} = 1278$(грн.). Відповідно

$P = 40400 + 1278 = 41678$(грн.). Тому вартість матеріальних цінностей, які віддаються під заставу, дорівнює $\frac{P}{0{,}75} = 55571$(грн.).

1.4.8. Іпотечні позики

Позики під заставу нерухомості або *іпотеки* дістали широке розповсюдження в країнах з розвинутою ринковою економікою, як одне із важливих джерел фінансування. В такій угоді власник майна отримує позику в того, кому віддав майно під заставу, і в якості забезпечення повернення боргу передає останньому на першочергове задоволення своєї вимоги з вартості закладеного майна в випадку відмови від погашення або неповного погашення заборгованості. Сума позики зазвичай є меншою за оціночну вартість майна, яке закладається. Найбільш розповсюдженими об'єктами застави є житлові будинки, земля, інші види нерухомості. Характерною особливістю позик є тривалий термін погашення. Існує декілька видів іпотечних позик, які розрізняються, в основному, методами погашення заборгованості. Більшість видів є варіантами стандартної або типової іпотечної позики. Суть її в наступному. Займач отримує від кредитора деяку суму під заставу нерухомості. Потім він погашає борг разом з процентами рівними, зазвичай, щомісячним внескам.

Коротко охарактеризуємо деякі схеми іпотеки:

Позики з ростом платежів. Варіантом такої іпотеки є позика, погашення якої відбувається за узгодженим графіком: кожні 3-5 років збільшується сума внесків.

Позики з пільговим періодом. В умовах іпотеки припускається наявність пільгового періоду, протягом якого виплачуються тільки проценти за борг.

Позики з періодичною зміною процентної ставки. Сторони кожні 3-5 років переглядають рівень процентної ставки. Таким чином, відбувається періодичне оновлене середньотермінове кредитування при довготерміновому погашенні всієї заборгованості.

Іпотека зі змінною процентною ставкою. Рівень ставки прив’язується до певного фінансового показника. Щоб зміни ставок не були різкими, передбачається нижня та верхня границі разових коректив.

Найбільш розповсюдженою є *іпотечна позика*, умови якої допускають рівні внески боржника. В договорі зазвичай встановлюється місячна процентна ставка, рідше – річна номінальна.

В здійсненні іпотеки при купівлі об'єкту застави беруть участь три агенти: продавець, покупець (боржник), кредитор.

Наприклад, продавець одержує від покупця за деяке майно повну його вартість – 120000 грн. Для цього покупець одержує позику під заставу цього майна – 100000 грн. і додає власні засоби – 20000 грн. Задача полягає в визначенні розміру щомісячних погашувальних платежів R і заборгованості на момент його чергового погашення аж до повної оплати боргу.

Оскільки погашувальні платежі являють собою постійну ренту постнумерандо, то, прирівнявши теперішню величину термінових виплат сумі позики, для місячних внесків знаходимо: $D = Ra(n,i) = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, де D – сума позики, n – загальне число платежів, $n = 12k$ (k – термін погашення в роках), i – місячна процентна ставка, R – місячна сума внеску, $a(n,i)$ – коефіцієнт зведення постійної ренти.

Шукана величина внеску $R = D/a(n,i)$, а для рент пренумерандо $R = (1+i)D/a(n,i)$. Знайдена за даними формулами величина R є базою для вироблення плану погашення боргу. Згідно із загальноприйнятим правилом з цієї суми перш за все виплачуються проценти, а залишок йде на погашення боргу.

Приклад 1.4.10. Під заставу нерухомості видана на 10 років позика в розмірі 100000 грн. Погашення щомісячне, на борг нараховуються проценти за номінальною річною ставкою 12%. Знайти місячну суму внеску.

Розв'язок. Загальне число платежів $n = 12 \cdot 10 = 120$, $i = 0{,}01$,

$a(120,1) = 69{,}70052$. Для цих умов місячна сума внеску R повинна дорівнювати $R = 100000000/69{,}70052 = 1434709$(грн.), з яких $100000000 \cdot 0{,}01 = 1000000$(грн.) – проценти, а $1434709 - 1000000 = 434709$ (грн.) піде на погашення боргу.

Розглянемо іншу задачу. При видачі позики під заставу для обох сторін важливо знати суму погашеного боргу і його залишок на будь-який момент часу.

Стосовно умов стандартної іпотеки знаходимо наступні співвідношення $d_t = d_{t-1}(1+i) = d_1(1+i)^{t-1}$, де d_t – сума погашення боргу, t – порядковий номер, i – місячна процентна ставка.

Залишок боргу на початку місяця $D_{t+1} = D_t - d_t$, $t = 1, 2, \ldots, 12k$.

Послідовні суми погашення боргу є геометричною прогресією з першим членом d_1 і знаменником $(1+i)$, причому $d_1 = R - Di$. Суму членів цієї прогресії від початку погашення до t включно знаходимо за формулою: $\omega t = ds(t,i)$, де $s(t,i)$ – коефіцієнт нарощення постійної ренти постнумерандо.

Залишок боргу на початок місяця $D_{t+1} = D_t - \omega_t$.

Приклад 1.4.11. За умовами попереднього прикладу знайти залишок боргу на початок 118 місяця.

Розв'язок. $D_{118} = D_1 - \omega_{117}$; $\omega_{117} = d_1 s(117,1) = 424709 \cdot 220{,}3329 = 95780694$ (грн.), звідки $D_{118} = 100000000 - 95780694 = 4219406$ (грн.).

Контрольні запитання та задачі

1. Що означають слова “займ”, “кредит”, “позика”?

2. Кого називають кредитором, а кого дебітором?

3. Що називають основним боргом, а що процентними грішми?

4. Які ви знаєте способи погашення займу та дайте коротку характеристику кожного?

5. Для чого і в якому випадку створюється фонд погашення?

6. Дайте коротку характеристику споживчим кредитам.

7. В яких випадках надаються пільгові кредити?

8. Що таке грант-елемент і для чого він призначається?

9. Що називається абсолютним грант-елементом, відносним грант-елементом, та за якими формулами вони обчислюються?

10. За якими формулами обчислюється відносний грант-елемент у випадку, коли: а) проценти сплачуються під час пільгового періоду; б) проценти в пільговому періоді не сплачуються, а додаються до основної суми боргу?

11. Що таке позика?

12. Чому дорівнює відносна величина втрат кредитора, якщо безпроцентний кредит а) передбачає; б) не передбачає пільгового періоду?

13. Гроші в сумі а) 1000 грн.; б) 1500 грн. надано в кредит терміном на а) 4 роки; б) 6 років за процентною ставкою а) 6%; б) 12% річних, причому проценти за кредит повинні виплачуватись в кінці кожного півріччя. Обчислити необхідну величину виплат у фонд погашення боргу, якщо проценти нараховуються за процентною ставкою а) 12%; б) 14% річних. Якою буде сума цього фонду до кінця а) другого; б) четвертого року?

14. Кредит розміром а) 1000 грн.; б) 2000 грн. отримали під а) 12%; б) 14% річних. Борг повинен бути погашений виплатами кожних чотири місяці протягом а) двох років; б) трьох років. Знайти розмір платежів, що погашаються за умови рівномірної виплати процентів, реальну процентну ставку j_k.

15. Надано пільговий кредит а) 12 млн.грн.; б) 14 млн.грн. на а) 5 років; б) 8 років під а) 10%; б) 11% річних. Звичайна ставка для довготермінових кредитів а) 20%; б) 22% річних. Знайти абсолютну та відносну величину грант-елемента, якщо планується погашати кредит рівними терміновими виплатами.

16. В умовах прикладу 15 знайти втрати кредитора за умови відтермінування на а) 3 роки; б) 5 років зі сплатою процентів в пільговий період, а також втрати з додаванням процентів до основної суми боргу.

17. Чому дорівнює відносна величина втрат кредитора для безпроцентного кредиту на а) 4 роки; б) 6 років за ринковою процентною ставкою на довготермінові кредити а) 22%; б) 24%?

18. В умовах прикладу 17 вважати пільговий період рівним а) 2 роки; б) 3 роки.

19. Обчислити величину процентних грошей з суми а) 3000 грн.; б) 4000 грн., наданої в кредит під а) 10%; б) 15% річних на термін а) 180 днів; б) 150 днів, а кількість днів в році $k = 360$.

20. Знайти величину доходу кредитора, якщо за надання в кредит деякої суми а) на 3 місяці; б) на 4 місяці він отримав від займача а) 5800 грн.; б) 6800 грн. При цьому застосовувалась проста процентна ставка а) $i = 15\%$; б) $i = 20\%$ річних.

21. Банк надав кредит в сумі а) 6000 грн.; б) 8000 грн. терміном на а) 60 днів; б) 80 днів, а нараховані за ставкою а) $i = 18\%$; б) $i = 15\%$ річних були утримані банком в момент надання кредиту. Кількість днів у році $k = 360$. Знайти суму, яку потрібно повернути.

22. Рахунок відкрито в банку 10 березня і на нього покладена сума 4000 грн. 13 травня на рахунок надійшло 2000 грн., а 18 травня з рахунку було знято 1500 грн. Потім 17 вересня на рахунок поклали 800 грн. і 25 листопада рахунок закрили. Визначити суму, отриману власником рахунку, якщо процентна ставка $i = 14\%$ річних, а $k = 360$.

23. Рахунок відкрито в банку 18 січня і на нього покладена сума 5000 грн. 22 березня на рахунок надійшло 1500 грн., а 15 травня з рахунку було знято 2000 грн. Потім 5 липня на рахунок поклали 1200 грн. і 14 жовтня рахунок закрили. Операції здійснювалися в невисокосному році. Визначити суму, отриману власником рахунку, якщо процентна ставка $i = 15\%$ річних, а $k = 360$.

24. Клієнт звернувся в банк а) 7 травня; б) 4 березня з метою одержання кредиту під заставу а) 200; б) 400 цінних паперів, причому курсова вартість кожного цінного паперу на цей день складає а) 200 грн.; б) 300 грн. Банк надає кредит під а) 12%; б) 14% річних на а) 4 місяці; б) 6 місяців в розмірі а) 75%;

б) 85% курсової вартості цінних паперів. В контракті з клієнтом обумовлюється, що затрати банку на обслуговування складають а) 0,8%; б) 1,5% від номінальної суми кредиту і утримуються разом з процентним платежем в момент надання кредиту. Знайти величину кредиту, який одержить клієнт.

25. Підприємцю потрібна сума в а) 30000 грн.; б) 50000 грн. на а) 4 місяці; б) 6 місяців. Банк надає йому кредит в розмірі а) 80%; б) 85% від вартості застави під а) 13%; б) 14% річних, а за обслуговування боргу утримує а) 300 грн.; б) 350 грн. Визначити величину застави, якщо кредит взято а) 4 березня; б) 15 квітня.

26. Під заставу нерухомості видана на а) 15 років; б) 20 років позика в розмірі а) 150000 грн.; б) 200000 грн. Погашення щомісячне, на борг нараховуються проценти за номінальною річною ставкою а) 13%; б) 14%. Знайти місячну суму внеску, залишок боргу на початок а) 120 місяця; б) 140 місяця.

Додатки

Додаток 1

Порядкові номери днів у році

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	-	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	-	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	-	90	-	151	-	212	243	-	304	-	365

Додаток 2

Таблиця теперішньої вартості PVIF (i; n)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	24
1	0.9901	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259	0.9174	0.9091	0.8929	0.8772	0.8696	0.8621	0.8475	0.8333	0.8065
2	0.9803	0.9612	0.9426	0.9246	0.9070	0.8900	0.8734	0.8573	0.8417	0.8264	0.7972	0.7695	0.7561	0.7432	0.7182	0.6944	0.6504
3	0.9706	0.9423	0.9151	0.8890	0.8638	0.8396	0.8163	0.7938	0.7722	0.7513	0.7118	0.6750	0.6575	0.6407	0.6086	0.5787	0.5245
4	0.9610	0.9238	0.8885	0.8548	0.8227	0.7921	0.7629	0.7350	0.7084	0.6830	0.6355	0.5921	0.5718	0.5523	0.5158	0.4823	0.4230
5	0.9515	0.9057	0.8626	0.8219	0.7835	0.7473	0.7130	0.6806	0.6499	0.6209	0.5674	0.5194	0.4972	0.4761	0.4371	0.4019	0.3411
6	0.9420	0.8880	0.8375	0.7903	0.7462	0.7050	0.6663	0.6302	0.5963	0.5645	0.5066	0.4556	0.4323	0.4104	0.3704	0.3349	0.2751
7	0.9327	0.8706	0.8131	0.7599	0.7107	0.6651	0.6227	0.5835	0.5470	0.5132	0.4523	0.3996	0.3759	0.3538	0.3139	0.2791	0.2218
8	0.9235	0.8535	0.7894	0.7307	0.6768	0.6274	0.5820	0.5403	0.5019	0.4665	0.4039	0.3506	0.3269	0.3050	0.2660	0.2326	0.1789
9	0.9143	0.8368	0.7664	0.7026	0.6446	0.5919	0.5439	0.5002	0.4604	0.4241	0.3606	0.3075	0.2843	0.2630	0.2255	0.1938	0.1443
10	0.9053	0.8203	0.7441	0.6756	0.6139	0.5584	0.5083	0.4632	0.4224	0.3855	0.3220	0.2697	0.2472	0.2267	0.1911	0.1615	0.1164
11	0.8963	0.8043	0.7224	0.6496	0.5847	0.5268	0.4751	0.4289	0.3875	0.3505	0.2875	0.2366	0.2149	0.1954	0.1619	0.1346	0.0938
12	0.8874	0.7885	0.7014	0.6246	0.5568	0.4970	0.4440	0.3971	0.3555	0.3186	0.2567	0.2076	0.1869	0.1685	0.1372	0.1122	0.0757
13	0.8787	0.7730	0.6810	0.6006	0.5303	0.4688	0.4150	0.3677	0.3262	0.2897	0.2292	0.1821	0.1625	0.1452	0.1163	0.0935	0.0610
14	0.8700	0.7579	0.6611	0.5775	0.5051	0.4423	0.3878	0.3405	0.2992	0.2633	0.2046	0.1597	0.1413	0.1252	0.0985	0.0779	0.0492
15	0.8613	0.7430	0.6419	0.5553	0.4810	0.4173	0.3624	0.3152	0.2745	0.2394	0.1827	0.1401	0.1229	0.1079	0.0835	0.0649	0.0397
16	0.8528	0.7284	0.6232	0.5339	0.4581	0.3936	0.3387	0.2919	0.2519	0.2176	0.1631	0.1229	0.1069	0.0930	0.0708	0.0541	0.0320
17	0.8444	0.7142	0.6050	0.5134	0.4363	0.3714	0.3166	0.2703	0.2311	0.1978	0.1456	0.1078	0.0929	0.0802	0.0600	0.0451	0.0258
18	0.8360	0.7002	0.5874	0.4936	0.4155	0.3503	0.2959	0.2502	0.2120	0.1799	0.1300	0.0946	0.0808	0.0691	0.0508	0.0376	0.0208
19	0.8277	0.6864	0.5703	0.4746	0.3957	0.3305	0.2765	0.2317	0.1945	0.1635	0.1161	0.0829	0.0703	0.0596	0.0431	0.0313	0.0168
20	0.8195	0.6730	0.5537	0.4564	0.3769	0.3118	0.2584	0.2145	0.1784	0.1486	0.1037	0.0728	0.0611	0.0514	0.0365	0.0261	0.0135
21	0.8114	0.6598	0.5375	0.4388	0.3589	0.2942	0.2415	0.1987	0.1637	0.1351	0.0926	0.0638	0.0531	0.0443	0.0309	0.0217	0.0109
22	0.8034	0.6468	0.5219	0.4220	0.3418	0.2775	0.2257	0.1839	0.1502	0.1228	0.0826	0.0560	0.0462	0.0382	0.0262	0.0181	0.0088
23	0.7954	0.6342	0.5067	0.4057	0.3256	0.2618	0.2109	0.1703	0.1378	0.1117	0.0738	0.0491	0.0402	0.0329	0.0222	0.0151	0.0071
24	0.7876	0.6217	0.4919	0.3901	0.3101	0.2470	0.1971	0.1577	0.1264	0.1015	0.0659	0.0431	0.0349	0.0284	0.0188	0.0126	0.0057
25	0.7798	0.6095	0.4776	0.3751	0.2953	0.2330	0.1842	0.1460	0.1160	0.0923	0.0588	0.0378	0.0304	0.0245	0.0160	0.0105	0.0046
26	0.7720	0.5976	0.4637	0.3607	0.2812	0.2198	0.1722	0.1352	0.1064	0.0839	0.0525	0.0331	0.0264	0.0211	0.0135	0.0087	0.0037
27	0.7644	0.5859	0.4502	0.3468	0.2678	0.2074	0.1609	0.1252	0.0976	0.0763	0.0469	0.0291	0.0230	0.0182	0.0115	0.0073	0.0030
28	0.7568	0.5744	0.4371	0.3335	0.2551	0.1956	0.1504	0.1159	0.0895	0.0693	0.0419	0.0255	0.0200	0.0157	0.0097	0.0061	0.0024
29	0.7493	0.5631	0.4243	0.3207	0.2429	0.1846	0.1406	0.1073	0.0822	0.0630	0.0374	0.0224	0.0174	0.0135	0.0082	0.0051	0.0020
30	0.7419	0.5521	0.4120	0.3083	0.2314	0.1741	0.1314	0.0994	0.0754	0.0573	0.0334	0.0196	0.0151	0.0116	0.0070	0.0042	0.0016
40	0.6717	0.4529	0.3066	0.2083	0.1420	0.0972	0.0668	0.0460	0.0318	0.0221	0.0107	0.0053	0.0037	0.0026	0.0013	0.0007	0.0002
50	0.6080	0.3715	0.2281	0.1407	0.0872	0.0543	0.0339	0.0213	0.0134	0.0085	0.0035	0.0014	0.0009	0.0006	0.0003	0.0001	0.0000
60	0.5504	0.3048	0.1697	0.0951	0.0535	0.0303	0.0173	0.0099	0.0057	0.0033	0.0011	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000

	25	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	45	46	48	50
1	0.8000	0.7937	0.7813	0.7692	0.7576	0.7463	0.7353	0.7246	0.7143	0.7042	0.6944	0.6897	0.6849	0.6757	0.6667
2	0.6400	0.6299	0.6104	0.5917	0.5739	0.5569	0.5407	0.5251	0.5102	0.4959	0.4823	0.4756	0.4691	0.4565	0.4444
3	0.5120	0.4999	0.4768	0.4552	0.4348	0.4156	0.3975	0.3805	0.3644	0.3492	0.3349	0.3280	0.3213	0.3085	0.2963
4	0.4096	0.3968	0.3725	0.3501	0.3294	0.3102	0.2923	0.2757	0.2603	0.2459	0.2326	0.2262	0.2201	0.2084	0.1975
5	0.3277	0.3149	0.2910	0.2693	0.2495	0.2315	0.2149	0.1998	0.1859	0.1732	0.1615	0.1560	0.1507	0.1408	0.1317
6	0.2621	0.2499	0.2274	0.2072	0.1890	0.1727	0.1580	0.1448	0.1328	0.1220	0.1122	0.1076	0.1032	0.0952	0.0878
7	0.2097	0.1983	0.1776	0.1594	0.1432	0.1289	0.1162	0.1049	0.0949	0.0859	0.0779	0.0742	0.0707	0.0643	0.0585
8	0.1678	0.1574	0.1388	0.1226	0.1085	0.0962	0.0854	0.0760	0.0678	0.0605	0.0541	0.0512	0.0484	0.0434	0.0390
9	0.1342	0.1249	0.1084	0.0943	0.0822	0.0718	0.0628	0.0551	0.0484	0.0426	0.0376	0.0353	0.0332	0.0294	0.0260
10	0.1074	0.0992	0.0847	0.0725	0.0623	0.0536	0.0462	0.0399	0.0346	0.0300	0.0261	0.0243	0.0227	0.0198	0.0173
11	0.0859	0.0787	0.0662	0.0558	0.0472	0.0400	0.0340	0.0289	0.0247	0.0211	0.0181	0.0168	0.0156	0.0134	0.0116
12	0.0687	0.0625	0.0517	0.0429	0.0357	0.0298	0.0250	0.0210	0.0176	0.0149	0.0126	0.0116	0.0107	0.0091	0.0077
13	0.0550	0.0496	0.0404	0.0330	0.0271	0.0223	0.0184	0.0152	0.0126	0.0105	0.0087	0.0080	0.0073	0.0061	0.0051
14	0.0440	0.0393	0.0316	0.0254	0.0205	0.0166	0.0135	0.0110	0.0090	0.0074	0.0061	0.0055	0.0050	0.0041	0.0034
15	0.0352	0.0312	0.0247	0.0195	0.0155	0.0124	0.0099	0.0080	0.0064	0.0052	0.0042	0.0038	0.0034	0.0028	0.0023
16	0.0281	0.0248	0.0193	0.0150	0.0118	0.0093	0.0073	0.0058	0.0046	0.0037	0.0029	0.0026	0.0023	0.0019	0.0015
17	0.0225	0.0197	0.0150	0.0116	0.0089	0.0069	0.0054	0.0042	0.0033	0.0026	0.0020	0.0018	0.0016	0.0013	0.0010
18	0.0180	0.0156	0.0118	0.0089	0.0068	0.0052	0.0039	0.0030	0.0023	0.0018	0.0014	0.0012	0.0011	0.0009	0.0007
19	0.0144	0.0124	0.0092	0.0068	0.0051	0.0038	0.0029	0.0022	0.0017	0.0013	0.0010	0.0009	0.0008	0.0006	0.0005
20	0.0115	0.0098	0.0072	0.0053	0.0039	0.0029	0.0021	0.0016	0.0012	0.0009	0.0007	0.0006	0.0005	0.0004	0.0003
21	0.0092	0.0078	0.0056	0.0040	0.0029	0.0021	0.0016	0.0012	0.0009	0.0006	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003	0.0002
22	0.0074	0.0062	0.0044	0.0031	0.0022	0.0016	0.0012	0.0008	0.0006	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001
23	0.0059	0.0049	0.0034	0.0024	0.0017	0.0012	0.0008	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
24	0.0047	0.0039	0.0027	0.0018	0.0013	0.0009	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
25	0.0038	0.0031	0.0021	0.0014	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
26	0.0030	0.0025	0.0016	0.0011	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000
27	0.0024	0.0019	0.0013	0.0008	0.0006	0.0004	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
28	0.0019	0.0015	0.0010	0.0006	0.0004	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
29	0.0015	0.0012	0.0008	0.0005	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
30	0.0012	0.0010	0.0006	0.0004	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
40	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
60	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Додаток 3

Таблиця теперішньої вартості ануїтету PVIFA (i; n)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	24
1	0.9901	0.9804	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434	0.9346	0.9259	0.9174	0.9091	0.8929	0.8772	0.8696	0.8621	0.8475	0.8333	0.8065
2	1.9704	1.9416	1.9135	1.8861	1.8594	1.8334	1.8080	1.7833	1.7591	1.7355	1.6901	1.6467	1.6257	1.6052	1.5656	1.5278	1.4568
3	2.9410	2.8839	2.8286	2.7751	2.7232	2.6730	2.6243	2.5771	2.5313	2.4869	2.4018	2.3216	2.2832	2.2459	2.1743	2.1065	1.9813
4	3.9020	3.8077	3.7171	3.6299	3.5460	3.4651	3.3872	3.3121	3.2397	3.1699	3.0373	2.9137	2.8550	2.7982	2.6901	2.5887	2.4043
5	4.8534	4.7135	4.5797	4.4518	4.3295	4.2124	4.1002	3.9927	3.8897	3.7908	3.6048	3.4331	3.3522	3.2743	3.1272	2.9906	2.7454
6	5.7955	5.6014	5.4172	5.2421	5.0757	4.9173	4.7665	4.6229	4.4859	4.3553	4.1114	3.8887	3.7845	3.6847	3.4976	3.3255	3.0205
7	6.7282	6.4720	6.2303	6.0021	5.7864	5.5824	5.3893	5.2064	5.0330	4.8684	4.5638	4.2883	4.1604	4.0386	3.8115	3.6046	3.2423
8	7.6517	7.3255	7.0197	6.7327	6.4632	6.2098	5.9713	5.7466	5.5348	5.3349	4.9676	4.6389	4.4873	4.3436	4.0776	3.8372	3.4212
9	8.5660	8.1622	7.7861	7.4353	7.1078	6.8017	6.5152	6.2469	5.9952	5.7590	5.3282	4.9464	4.7716	4.6065	4.3030	4.0310	3.5655
10	9.4713	8.9826	8.5302	8.1109	7.7217	7.3601	7.0236	6.7101	6.4177	6.1446	5.6502	5.2161	5.0188	4.8332	4.4941	4.1925	3.6819
11	10.3676	9.7868	9.2526	8.7605	8.3064	7.8869	7.4987	7.1390	6.8052	6.4951	5.9377	5.4527	5.2337	5.0286	4.6560	4.3271	3.7757
12	11.2551	10.5753	9.9540	9.3851	8.8633	8.3838	7.9427	7.5361	7.1607	6.8137	6.1944	5.6603	5.4206	5.1971	4.7932	4.4392	3.8514
13	12.1337	11.3484	10.6350	9.9856	9.3936	8.8527	8.3577	7.9038	7.4869	7.1034	6.4235	5.8424	5.5831	5.3423	4.9095	4.5327	3.9124
14	13.0037	12.1062	11.2961	10.5631	9.8986	9.2950	8.7455	8.2442	7.7862	7.3667	6.6282	6.0021	5.7245	5.4675	5.0081	4.6106	3.9616
15	13.8651	12.8493	11.9379	11.1184	10.3797	9.7122	9.1079	8.5595	8.0607	7.6061	6.8109	6.1422	5.8474	5.5755	5.0916	4.6755	4.0013
16	14.7179	13.5777	12.5611	11.6523	10.8378	10.1059	9.4466	8.8514	8.3126	7.8237	6.9740	6.2651	5.9542	5.6685	5.1624	4.7296	4.0333
17	15.5623	14.2919	13.1661	12.1657	11.2741	10.4773	9.7632	9.1216	8.5436	8.0216	7.1196	6.3729	6.0472	5.7487	5.2223	4.7746	4.0591
18	16.3983	14.9920	13.7535	12.6593	11.6896	10.8276	10.0591	9.3719	8.7556	8.2014	7.2497	6.4674	6.1280	5.8178	5.2732	4.8122	4.0799
19	17.2260	15.6785	14.3238	13.1339	12.0853	11.1581	10.3356	9.6036	8.9501	8.3649	7.3658	6.5504	6.1982	5.8775	5.3162	4.8435	4.0967
20	18.0456	16.3514	14.8775	13.5903	12.4622	11.4699	10.5940	9.8181	9.1285	8.5136	7.4694	6.6231	6.2593	5.9288	5.3527	4.8696	4.1103
21	18.8570	17.0112	15.4150	14.0292	12.8212	11.7641	10.8355	10.0168	9.2922	8.6487	7.5620	6.6870	6.3125	5.9731	5.3837	4.8913	4.1212
22	19.6604	17.6580	15.9369	14.4511	13.1630	12.0416	11.0612	10.2007	9.4424	8.7715	7.6446	6.7429	6.3587	6.0113	5.4099	4.9094	4.1300
23	20.4558	18.2922	16.4436	14.8568	13.4886	12.3034	11.2722	10.3711	9.5802	8.8832	7.7184	6.7921	6.3988	6.0442	5.4321	4.9245	4.1371
24	21.2434	18.9139	16.9355	15.2470	13.7986	12.5504	11.4693	10.5288	9.7066	8.9847	7.7843	6.8351	6.4338	6.0726	5.4509	4.9371	4.1428
25	22.0232	19.5235	17.4131	15.6221	14.0939	12.7834	11.6536	10.6748	9.8226	9.0770	7.8431	6.8729	6.4641	6.0971	5.4669	4.9476	4.1474
26	22.7952	20.1210	17.8768	15.9828	14.3752	13.0032	11.8258	10.8100	9.9290	9.1609	7.8957	6.9061	6.4906	6.1182	5.4804	4.9563	4.1511
27	23.5596	20.7069	18.3270	16.3296	14.6430	13.2105	11.9867	10.9352	10.0266	9.2372	7.9426	6.9352	6.5135	6.1364	5.4919	4.9636	4.1542
28	24.3164	21.2813	18.7641	16.6631	14.8981	13.4062	12.1371	11.0511	10.1161	9.3066	7.9844	6.9607	6.5335	6.1520	5.5016	4.9697	4.1566
29	25.0658	21.8444	19.1885	16.9837	15.1411	13.5907	12.2777	11.1584	10.1983	9.3696	8.0218	6.9830	6.5509	6.1656	5.5098	4.9747	4.1585
30	25.8077	22.3965	19.6004	17.2920	15.3725	13.7648	12.4090	11.2578	10.2737	9.4269	8.0552	7.0027	6.5660	6.1772	5.5168	4.9789	4.1601
40	32.8347	27.3555	23.1148	19.7928	17.1591	15.0463	13.3317	11.9246	10.7574	9.7791	8.2438	7.1050	6.6418	6.2335	5.5482	4.9966	4.1659
50	39.1961	31.4236	25.7298	21.4822	18.2559	15.7619	13.8007	12.2335	10.9617	9.9148	8.3045	7.1327	6.6605	6.2463	5.5541	4.9995	4.1666
60	44.9550	34.7609	27.6756	22.6235	18.9293	16.1614	14.0392	12.3766	11.0480	9.9672	8.3240	7.1401	6.6651	6.2492	5.5553	4.9999	4.1667

	25	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	45	46	48	50
1	0.8000	0.7937	0.7813	0.7692	0.7576	0.7463	0.7353	0.7246	0.7143	0.7042	0.6944	0.6897	0.6849	0.6757	0.6667
2	1.4400	1.4235	1.3916	1.3609	1.3315	1.3032	1.2760	1.2497	1.2245	1.2002	1.1767	1.1653	1.1541	1.1322	1.1111
3	1.9520	1.9234	1.8684	1.8161	1.7663	1.7188	1.6735	1.6302	1.5889	1.5494	1.5116	1.4933	1.4754	1.4407	1.4074
4	2.3616	2.3202	2.2410	2.1662	2.0957	2.0290	1.9658	1.9060	1.8492	1.7954	1.7442	1.7195	1.6955	1.6491	1.6049
5	2.6893	2.6351	2.5320	2.4356	2.3452	2.2604	2.1807	2.1058	2.0352	1.9686	1.9057	1.8755	1.8462	1.7899	1.7366
6	2.9514	2.8850	2.7594	2.6427	2.5342	2.4331	2.3388	2.2506	2.1680	2.0905	2.0178	1.9831	1.9495	1.8851	1.8244
7	3.1611	3.0833	2.9370	2.8021	2.6775	2.5620	2.4550	2.3555	2.2628	2.1764	2.0957	2.0573	2.0202	1.9494	1.8829
8	3.3289	3.2407	3.0758	2.9247	2.7860	2.6582	2.5404	2.4315	2.3306	2.2369	2.1498	2.1085	2.0686	1.9928	1.9220
9	3.4631	3.3657	3.1842	3.0190	2.8681	2.7300	2.6033	2.4866	2.3790	2.2795	2.1874	2.1438	2.1018	2.0222	1.9480
10	3.5705	3.4648	3.2689	3.0915	2.9304	2.7836	2.6495	2.5265	2.4136	2.3095	2.2134	2.1681	2.1245	2.0420	1.9653
11	3.6564	3.5435	3.3351	3.1473	2.9776	2.8236	2.6834	2.5555	2.4383	2.3307	2.2316	2.1849	2.1401	2.0554	1.9769
12	3.7251	3.6059	3.3868	3.1903	3.0133	2.8534	2.7084	2.5764	2.4559	2.3455	2.2441	2.1965	2.1507	2.0645	1.9846
13	3.7801	3.6555	3.4272	3.2233	3.0404	2.8757	2.7268	2.5916	2.4685	2.3560	2.2529	2.2045	2.1580	2.0706	1.9897
14	3.8241	3.6949	3.4587	3.2487	3.0609	2.8923	2.7403	2.6026	2.4775	2.3634	2.2589	2.2100	2.1630	2.0747	1.9931
15	3.8593	3.7261	3.4834	3.2682	3.0764	2.9047	2.7502	2.6106	2.4839	2.3686	2.2632	2.2138	2.1665	2.0775	1.9954
16	3.8874	3.7509	3.5026	3.2832	3.0882	2.9140	2.7575	2.6164	2.4885	2.3722	2.2661	2.2164	2.1688	2.0794	1.9970
17	3.9099	3.7705	3.5177	3.2948	3.0971	2.9209	2.7629	2.6206	2.4918	2.3748	2.2681	2.2182	2.1704	2.0807	1.9980
18	3.9279	3.7861	3.5294	3.3037	3.1039	2.9260	2.7668	2.6236	2.4941	2.3766	2.2695	2.2195	2.1715	2.0815	1.9986
19	3.9424	3.7985	3.5386	3.3105	3.1090	2.9299	2.7697	2.6258	2.4958	2.3779	2.2705	2.2203	2.1723	2.0821	1.9991
20	3.9539	3.8083	3.5458	3.3158	3.1129	2.9327	2.7718	2.6274	2.4970	2.3788	2.2712	2.2209	2.1728	2.0825	1.9994
21	3.9631	3.8161	3.5514	3.3198	3.1158	2.9349	2.7734	2.6285	2.4979	2.3794	2.2717	2.2213	2.1731	2.0828	1.9996
22	3.9705	3.8223	3.5558	3.3230	3.1180	2.9365	2.7746	2.6294	2.4985	2.3799	2.2720	2.2216	2.1734	2.0830	1.9997
23	3.9764	3.8273	3.5592	3.3254	3.1197	2.9377	2.7754	2.6300	2.4989	2.3802	2.2722	2.2218	2.1736	2.0831	1.9998
24	3.9811	3.8312	3.5619	3.3272	3.1210	2.9386	2.7760	2.6304	2.4992	2.3804	2.2724	2.2219	2.1737	2.0832	1.9999
25	3.9849	3.8342	3.5640	3.3286	3.1220	2.9392	2.7765	2.6307	2.4994	2.3806	2.2725	2.2220	2.1737	2.0832	1.9999
26	3.9879	3.8367	3.5656	3.3297	3.1227	2.9397	2.7768	2.6310	2.4996	2.3807	2.2726	2.2221	2.1738	2.0833	1.9999
27	3.9903	3.8387	3.5669	3.3305	3.1233	2.9401	2.7771	2.6311	2.4997	2.3808	2.2726	2.2221	2.1738	2.0833	2.0000
28	3.9923	3.8402	3.5679	3.3312	3.1237	2.9404	2.7773	2.6313	2.4998	2.3808	2.2726	2.2222	2.1739	2.0833	2.0000
29	3.9938	3.8414	3.5687	3.3317	3.1240	2.9406	2.7774	2.6313	2.4999	2.3809	2.2727	2.2222	2.1739	2.0833	2.0000
30	3.9950	3.8424	3.5693	3.3321	3.1242	2.9407	2.7775	2.6314	2.4999	2.3809	2.2727	2.2222	2.1739	2.0833	2.0000
40	3.9995	3.8458	3.5712	3.3332	3.1250	2.9412	2.7778	2.6316	2.5000	2.3810	2.2727	2.2222	2.1739	2.0833	2.0000
50	3.9999	3.8461	3.5714	3.3333	3.1250	2.9412	2.7778	2.6316	2.5000	2.3810	2.2727	2.2222	2.1739	2.0833	2.0000
60	4.0000	3.8462	3.5714	3.3333	3.1250	2.9412	2.7778	2.6316	2.5000	2.3810	2.2727	2.2222	2.1739	2.0833	2.0000

Додаток 4

Таблиця майбутньої вартості
FVIF (i; n)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	24
1	1.0100	1.0200	1.0300	1.0400	1.0500	1.0600	1.0700	1.0800	1.0900	1.1000	1.1200	1.1400	1.1500	1.1600	1.1800	1.2000	1.2400
2	1.0201	1.0404	1.0609	1.0816	1.1025	1.1236	1.1449	1.1664	1.1881	1.2100	1.2544	1.2996	1.3225	1.3456	1.3924	1.4400	1.5376
3	1.0303	1.0612	1.0927	1.1249	1.1576	1.1910	1.2250	1.2597	1.2950	1.3310	1.4049	1.4815	1.5209	1.5609	1.6430	1.7280	1.9066
4	1.0406	1.0824	1.1255	1.1699	1.2155	1.2625	1.3108	1.3605	1.4116	1.4641	1.5735	1.6890	1.7490	1.8106	1.9388	2.0736	2.3642
5	1.0510	1.1041	1.1593	1.2167	1.2763	1.3382	1.4026	1.4693	1.5386	1.6105	1.7623	1.9254	2.0114	2.1003	2.2878	2.4883	2.9316
6	1.0615	1.1262	1.1941	1.2653	1.3401	1.4185	1.5007	1.5869	1.6771	1.7716	1.9738	2.1950	2.3131	2.4364	2.6996	2.9860	3.6352
7	1.0721	1.1487	1.2299	1.3159	1.4071	1.5036	1.6058	1.7138	1.8280	1.9487	2.2107	2.5023	2.6600	2.8262	3.1855	3.5832	4.5077
8	1.0829	1.1717	1.2668	1.3686	1.4775	1.5938	1.7182	1.8509	1.9926	2.1436	2.4760	2.8526	3.0590	3.2784	3.7589	4.2998	5.5895
9	1.0937	1.1951	1.3048	1.4233	1.5513	1.6895	1.8385	1.9990	2.1719	2.3579	2.7731	3.2519	3.5179	3.8030	4.4355	5.1598	6.9310
10	1.1046	1.2190	1.3439	1.4802	1.6289	1.7908	1.9672	2.1589	2.3674	2.5937	3.1058	3.7072	4.0456	4.4114	5.2338	6.1917	8.5944
11	1.1157	1.2434	1.3842	1.5395	1.7103	1.8983	2.1049	2.3316	2.5804	2.8531	3.4785	4.2262	4.6524	5.1173	6.1759	7.4301	10.6571
12	1.1268	1.2682	1.4258	1.6010	1.7959	2.0122	2.2522	2.5182	2.8127	3.1384	3.8960	4.8179	5.3503	5.9360	7.2876	8.9161	13.2148
13	1.1381	1.2936	1.4685	1.6651	1.8856	2.1329	2.4098	2.7196	3.0658	3.4523	4.3635	5.4924	6.1528	6.8858	8.5994	10.6993	16.3863
14	1.1495	1.3195	1.5126	1.7317	1.9799	2.2609	2.5785	2.9372	3.3417	3.7975	4.8871	6.2613	7.0757	7.9875	10.1472	12.8392	20.3191
15	1.1610	1.3459	1.5580	1.8009	2.0789	2.3966	2.7590	3.1722	3.6425	4.1772	5.4736	7.1379	8.1371	9.2655	11.9737	15.4070	25.1956
16	1.1726	1.3728	1.6047	1.8730	2.1829	2.5404	2.9522	3.4259	3.9703	4.5950	6.1304	8.1372	9.3576	10.7480	14.1290	18.4884	31.2426
17	1.1843	1.4002	1.6528	1.9479	2.2920	2.6928	3.1588	3.7000	4.3276	5.0545	6.8660	9.2765	10.7613	12.4677	16.6722	22.1861	38.7408
18	1.1961	1.4282	1.7024	2.0258	2.4066	2.8543	3.3799	3.9960	4.7171	5.5599	7.6900	10.5752	12.3755	14.4625	19.6733	26.6233	48.0386
19	1.2081	1.4568	1.7535	2.1068	2.5270	3.0256	3.6165	4.3157	5.1417	6.1159	8.6128	12.0557	14.2318	16.7765	23.2144	31.9480	59.5679
20	1.2202	1.4859	1.8061	2.1911	2.6533	3.2071	3.8697	4.6610	5.6044	6.7275	9.6463	13.7435	16.3665	19.4608	27.3930	38.3376	73.8641
21	1.2324	1.5157	1.8603	2.2788	2.7860	3.3996	4.1406	5.0338	6.1088	7.4002	10.8038	15.6676	18.8215	22.5745	32.3238	46.0051	91.5915
22	1.2447	1.5460	1.9161	2.3699	2.9253	3.6035	4.4304	5.4365	6.6586	8.1403	12.1003	17.8610	21.6447	26.1864	38.1421	55.2061	1.1E+02
23	1.2572	1.5769	1.9736	2.4647	3.0715	3.8197	4.7405	5.8715	7.2579	8.9543	13.5523	20.3616	24.8915	30.3762	45.0076	66.2474	1.4E+02
24	1.2697	1.6084	2.0328	2.5633	3.2251	4.0489	5.0724	6.3412	7.9111	9.8497	15.1786	23.2122	28.6252	35.2364	53.1090	79.4968	1.7E+02
25	1.2824	1.6406	2.0938	2.6658	3.3864	4.2919	5.4274	6.8485	8.6231	10.8347	17.0001	26.4619	32.9190	40.8742	62.6686	95.3962	2.2E+02
26	1.2953	1.6734	2.1566	2.7725	3.5557	4.5494	5.8074	7.3964	9.3992	11.9182	19.0401	30.1666	37.8568	47.4141	73.9490	1.1E+02	2.7E+02
27	1.3082	1.7069	2.2213	2.8834	3.7335	4.8223	6.2139	7.9881	10.2451	13.1100	21.3249	34.3899	43.5353	55.0004	87.2598	1.4E+02	3.3E+02
28	1.3213	1.7410	2.2879	2.9987	3.9201	5.1117	6.6488	8.6271	11.1671	14.4210	23.8839	39.2045	50.0656	63.8004	1.0E+02	1.6E+02	4.1E+02
29	1.3345	1.7758	2.3566	3.1187	4.1161	5.4184	7.1143	9.3173	12.1722	15.8631	26.7499	44.6931	57.5755	74.0085	1.2E+02	2.0E+02	5.1E+02
30	1.3478	1.8114	2.4273	3.2434	4.3219	5.7435	7.6123	10.0627	13.2677	17.4494	29.9599	50.9502	66.2118	85.8499	1.4E+02	2.4E+02	6.3E+02
40	1.4889	2.2080	3.2620	4.8010	7.0400	10.2857	14.9745	21.7245	31.4094	45.2593	93.0510	1.9E+02	2.7E+02	3.8E+02	7.5E+02	1.5E+03	5.5E+03
50	1.6446	2.6916	4.3839	7.1067	11.4674	18.4202	29.4570	46.9016	74.3575	1.2E+02	2.9E+02	7.0E+02	1.1E+03	1.7E+03	3.9E+03	9.1E+03	4.7E+04
60	1.8167	3.2810	5.8916	10.5196	18.6792	32.9877	57.9464	1.0E+02	1.8E+02	3.0E+02	9.0E+02	2.6E+03	4.4E+03	7.4E+03	2.1E+04	5.6E+04	4.0E+05

	25	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	45	46	48	50
1	1.2500	1.2600	1.2800	1.3000	1.3200	1.3400	1.3600	1.3800	1.4000	1.4200	1.4400	1.4500	1.4600	1.4800	1.5000
2	1.5625	1.5876	1.6384	1.6900	1.7424	1.7956	1.8496	1.9044	1.9600	2.0164	2.0736	2.1025	2.1316	2.1904	2.2500
3	1.9531	2.0004	2.0972	2.1970	2.3000	2.4061	2.5155	2.6281	2.7440	2.8633	2.9860	3.0486	3.1121	3.2418	3.3750
4	2.4414	2.5205	2.6844	2.8561	3.0360	3.2242	3.4210	3.6267	3.8416	4.0659	4.2998	4.4205	4.5437	4.7979	5.0625
5	3.0518	3.1758	3.4360	3.7129	4.0075	4.3204	4.6526	5.0049	5.3782	5.7735	6.1917	6.4097	6.6338	7.1008	7.5938
6	3.8147	4.0015	4.3980	4.8268	5.2899	5.7893	6.3275	6.9068	7.5295	8.1984	8.9161	9.2941	9.6854	10.5092	11.3906
7	4.7684	5.0419	5.6295	6.2749	6.9826	7.7577	8.6054	9.5313	10.5414	11.6418	12.8392	13.4765	14.1407	15.5536	17.0859
8	5.9605	6.3528	7.2058	8.1573	9.2170	10.3953	11.7034	13.1532	14.7579	16.5313	18.4884	19.5409	20.6454	23.0194	25.6289
9	7.4506	8.0045	9.2234	10.6045	12.1665	13.9297	15.9166	18.1515	20.6610	23.4744	26.6233	28.3343	30.1423	34.0687	38.4434
10	9.3132	10.0857	11.8059	13.7858	16.0598	18.6659	21.6466	25.0490	28.9255	33.3337	38.3376	41.0847	44.0077	50.4217	57.6650
11	11.6415	12.7080	15.1116	17.9216	21.1989	25.0123	29.4393	34.5677	40.4957	47.3338	55.2061	59.5728	64.2512	74.6241	86.4976
12	14.5519	16.0120	19.3428	23.2981	27.9825	33.5164	40.0375	47.7034	56.6939	67.2141	79.4968	86.3806	93.8068	1.1E+02	1.3E+02
13	18.1899	20.1752	24.7588	30.2875	36.9370	44.9120	54.4510	65.8306	79.3715	95.4440	1.1E+02	1.3E+02	1.4E+02	1.6E+02	1.9E+02
14	22.7374	25.4207	31.6913	39.3738	48.7568	60.1821	74.0534	90.8463	1.1E+02	1.4E+02	1.6E+02	1.8E+02	2.0E+02	2.4E+02	2.9E+02
15	28.4217	32.0301	40.5648	51.1859	64.3590	80.6440	1.0E+02	1.3E+02	1.6E+02	1.9E+02	2.4E+02	2.6E+02	2.9E+02	3.6E+02	4.4E+02
16	35.5271	40.3579	51.9230	66.5417	84.9538	1.1E+02	1.4E+02	1.7E+02	2.2E+02	2.7E+02	3.4E+02	3.8E+02	4.3E+02	5.3E+02	6.6E+02
17	44.4089	50.8510	66.4614	86.5042	1.1E+02	1.4E+02	1.9E+02	2.4E+02	3.0E+02	3.9E+02	4.9E+02	5.5E+02	6.2E+02	7.8E+02	9.9E+02
18	55.5112	64.0722	85.0706	1.1E+02	1.5E+02	1.9E+02	2.5E+02	3.3E+02	4.3E+02	5.5E+02	7.1E+02	8.0E+02	9.1E+02	1.2E+03	1.5E+03
19	69.3889	80.7310	1.1E+02	1.5E+02	2.0E+02	2.6E+02	3.4E+02	4.5E+02	6.0E+02	7.8E+02	1.0E+03	1.2E+03	1.3E+03	1.7E+03	2.2E+03
20	86.7362	1.0E+02	1.4E+02	1.9E+02	2.6E+02	3.5E+02	4.7E+02	6.3E+02	8.4E+02	1.1E+03	1.5E+03	1.7E+03	1.9E+03	2.5E+03	3.3E+03
21	1.1E+02	1.3E+02	1.8E+02	2.5E+02	3.4E+02	4.7E+02	6.4E+02	8.7E+02	1.2E+03	1.6E+03	2.1E+03	2.4E+03	2.8E+03	3.8E+03	5.0E+03
22	1.4E+02	1.6E+02	2.3E+02	3.2E+02	4.5E+02	6.3E+02	8.7E+02	1.2E+03	1.6E+03	2.2E+03	3.0E+03	3.5E+03	4.1E+03	5.6E+03	7.5E+03
23	1.7E+02	2.0E+02	2.9E+02	4.2E+02	5.9E+02	8.4E+02	1.2E+03	1.6E+03	2.3E+03	3.2E+03	4.4E+03	5.1E+03	6.0E+03	8.2E+03	1.1E+04
24	2.1E+02	2.6E+02	3.7E+02	5.4E+02	7.8E+02	1.1E+03	1.6E+03	2.3E+03	3.2E+03	4.5E+03	6.3E+03	7.5E+03	8.8E+03	1.2E+04	1.7E+04
25	2.6E+02	3.2E+02	4.8E+02	7.1E+02	1.0E+03	1.5E+03	2.2E+03	3.1E+03	4.5E+03	6.4E+03	9.1E+03	1.1E+04	1.3E+04	1.8E+04	2.5E+04
26	3.3E+02	4.1E+02	6.1E+02	9.2E+02	1.4E+03	2.0E+03	3.0E+03	4.3E+03	6.3E+03	9.1E+03	1.3E+04	1.6E+04	1.9E+04	2.7E+04	3.8E+04
27	4.1E+02	5.1E+02	7.8E+02	1.2E+03	1.8E+03	2.7E+03	4.0E+03	6.0E+03	8.8E+03	1.3E+04	1.9E+04	2.3E+04	2.7E+04	4.0E+04	5.7E+04
28	5.2E+02	6.5E+02	1.0E+03	1.6E+03	2.4E+03	3.6E+03	5.5E+03	8.3E+03	1.2E+04	1.8E+04	2.7E+04	3.3E+04	4.0E+04	5.9E+04	8.5E+04
29	6.5E+02	8.1E+02	1.3E+03	2.0E+03	3.1E+03	4.9E+03	7.5E+03	1.1E+04	1.7E+04	2.6E+04	3.9E+04	4.8E+04	5.8E+04	8.7E+04	1.3E+05
30	8.1E+02	1.0E+03	1.6E+03	2.6E+03	4.1E+03	6.5E+03	1.0E+04	1.6E+04	2.4E+04	3.7E+04	5.6E+04	6.9E+04	8.5E+04	1.3E+05	1.9E+05
40	7.5E+03	1.0E+04	1.9E+04	3.6E+04	6.7E+04	1.2E+05	2.2E+05	3.9E+05	7.0E+05	1.2E+06	2.2E+06	2.8E+06	3.8E+06	6.5E+06	1.1E+07
50	7.0E+04	1.0E+05	2.3E+05	5.0E+05	1.1E+06	2.3E+06	4.8E+06	9.9E+06	2.0E+07	4.1E+07	8.3E+07	1.2E+08	1.7E+08	3.3E+08	6.4E+08
60	6.5E+05	1.1E+06	2.7E+06	6.9E+06	1.7E+07	4.2E+07	1.0E+08	2.5E+08	5.9E+08	1.4E+09	3.2E+09	4.8E+09	7.3E+09	1.6E+10	3.7E+10

Додаток 5

Таблиця майбутньої вартості ануїтету
FVIFA (i; n)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18	20	24
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0100	2.0200	2.0300	2.0400	2.0500	2.0600	2.0700	2.0800	2.0900	2.1000	2.1200	2.1400	2.1500	2.1600	2.1800	2.2000	2.2400
3	3.0301	3.0604	3.0909	3.1216	3.1525	3.1836	3.2149	3.2464	3.2781	3.3100	3.3744	3.4396	3.4725	3.5056	3.5724	3.6400	3.7776
4	4.0604	4.1216	4.1836	4.2465	4.3101	4.3746	4.4399	4.5061	4.5731	4.6410	4.7793	4.9211	4.9934	5.0665	5.2154	5.3680	5.6842
5	5.1010	5.2040	5.3091	5.4163	5.5256	5.6371	5.7507	5.8666	5.9847	6.1051	6.3528	6.6101	6.7424	6.8771	7.1542	7.4416	8.0484
6	6.1520	6.3081	6.4684	6.6330	6.8019	6.9753	7.1533	7.3359	7.5233	7.7156	8.1152	8.5355	8.7537	8.9775	9.4420	9.9299	10.9801
7	7.2135	7.4343	7.6625	7.8983	8.1420	8.3938	8.6540	8.9228	9.2004	9.4872	10.0890	10.7305	11.0668	11.4139	12.1415	12.9159	14.6153
8	8.2857	8.5830	8.8923	9.2142	9.5491	9.8975	10.2598	10.6366	11.0285	11.4359	12.2997	13.2328	13.7268	14.2401	15.3270	16.4991	19.1229
9	9.3685	9.7546	10.1591	10.5828	11.0266	11.4913	11.9780	12.4876	13.0210	13.5795	14.7757	16.0853	16.7858	17.5185	19.0859	20.7989	24.7125
10	10.4622	10.9497	11.4639	12.0061	12.5779	13.1808	13.8164	14.4866	15.1929	15.9374	17.5487	19.3373	20.3037	21.3215	23.5213	25.9587	31.6434
11	11.5668	12.1687	12.8078	13.4864	14.2068	14.9716	15.7836	16.6455	17.5603	18.5312	20.6546	23.0445	24.3493	25.7329	28.7551	32.1504	40.2379
12	12.6825	13.4121	14.1920	15.0258	15.9171	16.8699	17.8885	18.9771	20.1407	21.3843	24.1331	27.2707	29.0017	30.8502	34.9311	39.5805	50.8950
13	13.8093	14.6803	15.6178	16.6268	17.7130	18.8821	20.1406	21.4953	22.9534	24.5227	28.0291	32.0887	34.3519	36.7862	42.2187	48.4966	64.1097
14	14.9474	15.9739	17.0863	18.2919	19.5986	21.0151	22.5505	24.2149	26.0192	27.9750	32.3926	37.5811	40.5047	43.6720	50.8180	59.1959	80.4961
15	16.0969	17.2934	18.5989	20.0236	21.5786	23.2760	25.1290	27.1521	29.3609	31.7725	37.2797	43.8424	47.5804	51.6595	60.9653	72.0351	1.0E+02
16	17.2579	18.6393	20.1569	21.8245	23.6575	25.6725	27.8881	30.3243	33.0034	35.9497	42.7533	50.9804	55.7175	60.9250	72.9390	87.4421	1.3E+02
17	18.4304	20.0121	21.7616	23.6975	25.8404	28.2129	30.8402	33.7502	36.9737	40.5447	48.8837	59.1176	65.0751	71.6730	87.0680	1.1E+02	1.6E+02
18	19.6147	21.4123	23.4144	25.6454	28.1324	30.9057	33.9990	37.4502	41.3013	45.5992	55.7497	68.3941	75.8364	84.1407	1.0E+02	1.3E+02	2.0E+02
19	20.8109	22.8406	25.1169	27.6712	30.5390	33.7600	37.3790	41.4463	46.0185	51.1591	63.4397	78.9692	88.2118	98.6032	1.2E+02	1.5E+02	2.4E+02
20	22.0190	24.2974	26.8704	29.7781	33.0660	36.7856	40.9955	45.7620	51.1601	57.2750	72.0524	91.0249	1.0E+02	1.2E+02	1.5E+02	1.9E+02	3.0E+02
21	23.2392	25.7833	28.6765	31.9692	35.7193	39.9927	44.8652	50.4229	56.7645	64.0025	81.6987	1.0E+02	1.2E+02	1.3E+02	1.7E+02	2.3E+02	3.8E+02
22	24.4716	27.2990	30.5368	34.2480	38.5052	43.3923	49.0057	55.4568	62.8733	71.4027	92.5026	1.2E+02	1.4E+02	1.6E+02	2.1E+02	2.7E+02	4.7E+02
23	25.7163	28.8450	32.4529	36.6179	41.4305	46.9958	53.4361	60.8933	69.5319	79.5430	1.0E+02	1.4E+02	1.6E+02	1.8E+02	2.4E+02	3.3E+02	5.8E+02
24	26.9735	30.4219	34.4265	39.0826	44.5020	50.8156	58.1767	66.7648	76.7898	88.4973	1.2E+02	1.6E+02	1.8E+02	2.1E+02	2.9E+02	3.9E+02	7.2E+02
25	28.2432	32.0303	36.4593	41.6459	47.7271	54.8645	63.2490	73.1059	84.7009	98.3471	1.3E+02	1.8E+02	2.1E+02	2.5E+02	3.4E+02	4.7E+02	9.0E+02
26	29.5256	33.6709	38.5530	44.3117	51.1135	59.1564	68.6765	79.9544	93.3240	1.1E+02	1.5E+02	2.1E+02	2.5E+02	2.9E+02	4.1E+02	5.7E+02	1.1E+03
27	30.8209	35.3443	40.7096	47.0842	54.6691	63.7058	74.4838	87.3508	1.0E+02	1.2E+02	1.7E+02	2.4E+02	2.8E+02	3.4E+02	4.8E+02	6.8E+02	1.4E+03
28	32.1291	37.0512	42.9309	49.9676	58.4026	68.5281	80.6977	95.3388	1.1E+02	1.3E+02	1.9E+02	2.7E+02	3.3E+02	3.9E+02	5.7E+02	8.2E+02	1.7E+03
29	33.4504	38.7922	45.2189	52.9663	62.3227	73.6398	87.3465	1.0E+02	1.2E+02	1.5E+02	2.1E+02	3.1E+02	3.8E+02	4.6E+02	6.7E+02	9.8E+02	2.1E+03
30	34.7849	40.5681	47.5754	56.0849	66.4388	79.0582	94.4608	1.1E+02	1.4E+02	1.6E+02	2.4E+02	3.6E+02	4.3E+02	5.3E+02	7.9E+02	1.2E+03	2.6E+03
40	48.8864	60.4020	75.4013	95.0255	1.2E+02	1.5E+02	2.0E+02	2.6E+02	3.4E+02	4.4E+02	7.7E+02	1.3E+03	1.8E+03	2.4E+03	4.2E+03	7.3E+03	2.3E+04
50	64.4632	84.5794	1.1E+02	1.5E+02	2.1E+02	2.9E+02	4.1E+02	5.7E+02	8.2E+02	1.2E+03	2.4E+03	5.0E+03	7.2E+03	1.0E+04	2.2E+04	4.5E+04	2.0E+05
60	81.6697	1.1E+02	1.6E+02	2.4E+02	3.5E+02	5.3E+02	8.1E+02	1.3E+03	1.9E+03	3.0E+03	7.5E+03	1.9E+04	2.9E+04	4.6E+04	1.1E+05	2.8E+05	1.7E+06

	25	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	45	46	48	50
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.2500	2.2600	2.2800	2.3000	2.3200	2.3400	2.3600	2.3800	2.4000	2.4200	2.4400	2.4500	2.4600	2.4800	2.5000
3	3.8125	3.8476	3.9184	3.9900	4.0624	4.1356	4.2096	4.2844	4.3600	4.4364	4.5136	4.5525	4.5916	4.6704	4.7500
4	5.7656	5.8480	6.0156	6.1870	6.3624	6.5417	6.7251	6.9125	7.1040	7.2997	7.4996	7.6011	7.7037	7.9122	8.1250
5	8.2070	8.3684	8.6999	9.0431	9.3983	9.7659	10.1461	10.5392	10.9456	11.3656	11.7994	12.0216	12.2475	12.7100	13.1875
6	11.2588	11.5442	12.1359	12.7560	13.4058	14.0863	14.7987	15.5441	16.3238	17.1391	17.9911	18.4314	18.8813	19.8109	20.7813
7	15.0735	15.5458	16.5339	17.5828	18.6956	19.8756	21.1262	22.4509	23.8534	25.3375	26.9072	27.7255	28.5667	30.3201	32.1719
8	19.8419	20.5876	22.1634	23.8577	25.6782	27.6333	29.7316	31.9822	34.3947	36.9793	39.7464	41.2019	42.7073	45.8737	49.2578
9	25.8023	26.9404	29.3692	32.0150	34.8953	38.0287	41.4350	45.1354	49.1526	53.5106	58.2348	60.7428	63.3527	68.8931	74.8867
10	33.2529	34.9449	38.5926	42.6195	47.0618	51.9584	57.3516	63.2869	69.8137	76.9850	84.8582	89.0771	93.4950	1.0E+02	1.1E+02
11	42.5661	45.0306	50.3985	56.4053	63.1215	70.6243	78.9982	88.3359	98.7391	1.1E+02	1.2E+02	1.3E+02	1.4E+02	1.5E+02	1.7E+02
12	54.2077	57.7386	65.5100	74.3270	84.3204	95.6365	1.1E+02	1.2E+02	1.4E+02	1.6E+02	1.8E+02	1.9E+02	2.0E+02	2.3E+02	2.6E+02
13	68.7596	73.7506	84.8529	97.6250	1.1E+02	1.3E+02	1.5E+02	1.7E+02	2.0E+02	2.2E+02	2.6E+02	2.8E+02	3.0E+02	3.4E+02	3.9E+02
14	86.9495	93.9258	1.1E+02	1.3E+02	1.5E+02	1.7E+02	2.0E+02	2.4E+02	2.8E+02	3.2E+02	3.7E+02	4.0E+02	4.3E+02	5.0E+02	5.8E+02
15	1.1E+02	1.2E+02	1.4E+02	1.7E+02	2.0E+02	2.3E+02	2.8E+02	3.3E+02	3.9E+02	4.6E+02	5.4E+02	5.8E+02	6.3E+02	7.4E+02	8.7E+02
16	1.4E+02	1.5E+02	1.8E+02	2.2E+02	2.6E+02	3.1E+02	3.8E+02	4.5E+02	5.4E+02	6.5E+02	7.7E+02	8.5E+02	9.2E+02	1.1E+03	1.3E+03
17	1.7E+02	1.9E+02	2.3E+02	2.9E+02	3.5E+02	4.2E+02	5.1E+02	6.3E+02	7.6E+02	9.2E+02	1.1E+03	1.2E+03	1.4E+03	1.6E+03	2.0E+03
18	2.2E+02	2.4E+02	3.0E+02	3.7E+02	4.6E+02	5.7E+02	7.0E+02	8.6E+02	1.1E+03	1.3E+03	1.6E+03	1.8E+03	2.0E+03	2.4E+03	3.0E+03
19	2.7E+02	3.1E+02	3.9E+02	4.8E+02	6.1E+02	7.6E+02	9.5E+02	1.2E+03	1.5E+03	1.9E+03	2.3E+03	2.6E+03	2.9E+03	3.6E+03	4.4E+03
20	3.4E+02	3.9E+02	4.9E+02	6.3E+02	8.0E+02	1.0E+03	1.3E+03	1.6E+03	2.1E+03	2.6E+03	3.3E+03	3.7E+03	4.2E+03	5.3E+03	6.6E+03
21	4.3E+02	4.9E+02	6.3E+02	8.2E+02	1.1E+03	1.4E+03	1.8E+03	2.3E+03	2.9E+03	3.8E+03	4.8E+03	5.4E+03	6.1E+03	7.8E+03	1.0E+04
22	5.4E+02	6.2E+02	8.1E+02	1.1E+03	1.4E+03	1.8E+03	2.4E+03	3.1E+03	4.1E+03	5.3E+03	6.9E+03	7.9E+03	9.0E+03	1.2E+04	1.5E+04
23	6.7E+02	7.8E+02	1.0E+03	1.4E+03	1.9E+03	2.5E+03	3.3E+03	4.3E+03	5.7E+03	7.6E+03	1.0E+04	1.1E+04	1.3E+04	1.7E+04	2.2E+04
24	8.4E+02	9.8E+02	1.3E+03	1.8E+03	2.4E+03	3.3E+03	4.5E+03	6.0E+03	8.0E+03	1.1E+04	1.4E+04	1.7E+04	1.9E+04	2.5E+04	3.4E+04
25	1.1E+03	1.2E+03	1.7E+03	2.3E+03	3.2E+03	4.4E+03	6.1E+03	8.3E+03	1.1E+04	1.5E+04	2.1E+04	2.4E+04	2.8E+04	3.8E+04	5.1E+04
26	1.3E+03	1.6E+03	2.2E+03	3.1E+03	4.3E+03	5.9E+03	8.2E+03	1.1E+04	1.6E+04	2.2E+04	3.0E+04	3.5E+04	4.1E+04	5.6E+04	7.6E+04
27	1.7E+03	2.0E+03	2.8E+03	4.0E+03	5.6E+03	7.9E+03	1.1E+04	1.6E+04	2.2E+04	3.1E+04	4.3E+04	5.1E+04	6.0E+04	8.2E+04	1.1E+05
28	2.1E+03	2.5E+03	3.6E+03	5.2E+03	7.4E+03	1.1E+04	1.5E+04	2.2E+04	3.1E+04	4.4E+04	6.2E+04	7.3E+04	8.7E+04	1.2E+05	1.7E+05
29	2.6E+03	3.1E+03	4.6E+03	6.7E+03	9.8E+03	1.4E+04	2.1E+04	3.0E+04	4.3E+04	6.2E+04	8.9E+04	1.1E+05	1.3E+05	1.8E+05	2.6E+05
30	3.2E+03	3.9E+03	5.9E+03	8.7E+03	1.3E+04	1.9E+04	2.8E+04	4.1E+04	6.1E+04	8.8E+04	1.3E+05	1.5E+05	1.9E+05	2.7E+05	3.8E+05
40	3.0E+04	4.0E+04	6.9E+04	1.2E+05	2.1E+05	3.6E+05	6.1E+05	1.0E+06	1.8E+06	2.9E+06	4.9E+06	6.3E+06	8.2E+06	1.3E+07	2.2E+07
50	2.8E+05	4.0E+05	8.2E+05	1.7E+06	3.3E+06	6.7E+06	1.3E+07	2.6E+07	5.1E+07	9.8E+07	1.9E+08	2.6E+08	3.6E+08	6.8E+08	1.3E+09
60	2.6E+06	4.0E+06	9.7E+06	2.3E+07	5.4E+07	1.2E+08	2.9E+08	6.5E+08	1.5E+09	3.3E+09	7.2E+09	1.1E+10	1.6E+10	3.4E+10	7.4E+10