Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки і завдання для самостійної роботи

Івано-Франківськ

2015

УКЛАЛИ: к.ф.-м.н., доц. Сороківський В.М.

к.е.н., доц. Сороківська М.В.

к.ф.-м.н., ас. Можировська З.Г.,

к.ф.-м.н., доц. Шарин С.В.

Фінансова математика. Методичні вказівки і завдання для самостійної роботи. Електронне видання.

ПЕРЕДМОВА

В умовах ринкового економічного середовища важливе місце відводиться прийняттю ефективних управлінських рішень у сфері фінансової діяльності. Конкурентноздатність і платоспроможність підприємств визначається раціональною організацією формування та використання фінансових ресурсів, а їх діяльність здійснюється в тісному взаємозв'язку з іншими суб'єктами господарювання в умовах невизначеності та ризику.

Тому від фінансового менеджера вимагається правильно оцінити можливі варіанти фінансових наслідків при здійсненні конкретної угоди чи при реалізації будь-якого проекту, для чого йому необхідні певні знання в області фінансової математики.

В сучасних джерелах з фінансового менеджменту та фінансової математики, поданих у списку літератури, основна увага приділяється викладу теоретичного матеріалу, а в меншій мірі розглядають його практичні аспекти. Тому вважаємо за доцільне видати методичні матеріали, в яких був би знайдений розумний компроміс між теоретичними аспектами та прийомами і методами кількісного фінансового аналізу. У зв'язку з великим обсягом теоретичного і практичного матеріалу вважаємо за доцільне видати їх у двох частинах.

Перша частина включає такі розділи: математичний інструментарій оцінювання вартості грошей у часі, управління грошовими потоками, управління капіталом, а такі розділи як управління інвестиціями, управління активами, управління фінансовими ризиками - в другій частині.

В свою чергу, розділ I включає такі теми, як предмет і задачі фінансової математики, прості та складні проценти, еквівалентність платежів і процентних ставок, інфляція, дисконтування; розділ II – фінансові ренти; розділ III - кредитні розрахунки, аналіз лізингових та форфейтингових операцій.

Основний текст супроводжується наведеними в кінці кожної теми контрольними прикладами, які, без сумніву, сприятимуть кращому розумінню та засвоєнню основних теоретичних положень і активізуватимуть самостійну роботу студента над курсом.

РОЗДІЛ І. МАТЕМАТИЧНИЙ ІНСТРУМЕНТАРІЙ ВИЗНАЧЕННЯ ВАРТОСТІ ГРОШЕЙ У ЧАСІ

1.1. Невизначеність і ризик як фактори вартості грошей

Розвиток ринкової економіки вносить додаткові елементи невизначеності у фінансові відносини суб'єктів господарювання.

Невизначеність – це характеристика недостатньої забезпеченості процесу прийняття рішень знаннями стосовно певної проблемної ситуації. ***Ризик*** у фінансовій діяльності характеризується невизначеністю, яку доводиться враховувати при здійсненні певної фінансової операції і є один із способів її детермінації.

Фінансова діяльність вимагає постійного здійснення різного роду фінансово-економічних розрахунків, пов'язаних з потоками грошових засобів в різні періоди часу. Чільне місце в цих розрахунках відіграє *концепція вартості грошей в часі*, яка полягає в тому, що одна й та ж сума грошей в різні періоди часу має різну вартість. Необхідність врахування часу випливає з сутності фінансових, кредитних та інвестиційних операцій і виражається у ***принципі нерівноцінності грошей***, які відносяться до різних моментів чи проміжків часу.

Не менш важливим є ***принцип фінансової еквівалентності***, під яким розуміють рівність фінансових зобов'язань сторін, що беруть участь у фінансових операціях. Відповідно до нього можна змінювати рівень процентних ставок, їх вид, терміни виконання зобов'язань, розподіл платежів у часі в рамках однієї фінансової операції, не порушуючи взаємної відповідальності.

Таким чином, кількісну оцінку вартості грошей у часі доцільно проводити як з позицій теперішньої вартості майбутніх грошових потоків, так і майбутньої вартості грошей, якими володіє суб'єкт господарювання в даний момент часу, використовуючи для цього методи нарощення та дисконтування.

1.2. Нарощення простих і складних процентів

Під *нарощенням* розуміють процес збільшення грошової суми P в результаті нарахування процентів за ставкою i (простий або складний процент).

При нарощуванні простих процентів за ставкою i наступна сума P_1 більша попередньої на iP, *тобто* $P_1=P+iP=P(1+i)$, на кінець другого проміжку сума P_1 зросте ще на iP та стане $P_2=P(1+i)+iP=P(1+2i)$. До кінця n-ого проміжку

$$P_n=P(1+ni) \qquad (1.1)$$

Величина $(1+ni)$ називається *множником нарощення*, а величина Pni – *нарощеною вартістю* (процентними грішми), тобто:

$$I=Pni \qquad (1.2)$$

Приклад 1.1. Якою стане початкова сума депозиту P=1000 грн. через n=10 років, якщо проста процентна ставка за депозитом i=10%?

Розв'язок. За формулою (1.1) $P_{10}=1000(1+10\cdot 0{,}1)=2000$ (грн.).

Приклад 1.2. Прості проценти за позику на суму P=600 грн. на n=3 місяці становлять I=30 грн. Знайти річну просту процентну ставку.

Розв'язок. За формулою (1.2) $i=\dfrac{I}{Pn}=\dfrac{30}{600\cdot 0{,}25}=0{,}2$. Отже, i=20%.

Ми врахували при підстановці n, що 3 місяці $=\dfrac{3}{12}=0{,}25$ року.

Приклад 1.3. Банк виплачує I=75,35 долара кожних три місяці за валютним депозитом, виходячи з i=8% річних. Знайти його розмір.

Розв'язок. За формулою (1.2) $P=\dfrac{I}{in}=\dfrac{75{,}35}{0{,}08\cdot 0{,}25}=3767{,}5$ (дол.)

Приклад 1.4. За який термін вклад величиною P збільшиться втричі при ставці i=8% річних?

Розв'язок. З формули (1.1) $n=\dfrac{P_n-P}{Pi}=\dfrac{3P-P}{P\cdot 0{,}08}=25$ (років)

При нарощенні складних процентів за ставкою i кожна наступна сума зростає на частку i від попередньої, тобто, на кінець першого проміжку сума P зростає на частку i: $P_1=P+iP=P(1+i)$; на кінець другого - $P_2=P_1+iP_1=$ $=P(1+i)+iP(1+i)=P(1+i)^2$. На кінець n-ого проміжку

$$P_n=P(1+i)^n. \qquad (1.3)$$

Приклад 1.5. Річна ставка складних процентів i=8%. Через скільки років сума подвоється?

Розв'язок. Для цього потрібно розв'язати нерівність $(1+0,08)^n \geq 2$, або $n \geq (1/\ln(1,08) > 9$. Сума подвоюється через 10 років.

При роботі зі складними процентами для наближеного оцінювання корисне наступне правило: *якщо процентна ставка і, то подвоєння капіталу за такою ставкою відбувається приблизно за 72/і років* .

Якщо термін платежу $n>1$ є дробовим числом, то інколи застосовується комбінована схема: складні проценти за ціле число років (періодів) a, а прості - за решта років b. Тоді нарощена сума P_n з використанням комбінованої схеми нарахування процентів обчислюється за формулою $P_n = P(1+i)^a(1+bi)$.

Зокрема, якщо P=10000 грн., n=2,5 роки (a=2, b=0,5), i=20% річних, то

$$P_n = 10000(1+0,2)^2(1+0,5 \cdot 0,2) = 15840 \text{ (грн.)}.$$

При одній і тій же ставці i нарощення складних процентів відбувається скоріше, ніж простих, при довжині періоду нарощення більшого за одиницю і повільніше, якщо період нарощення менший за одиницю.

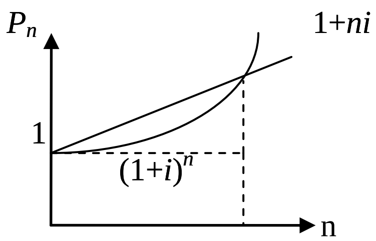


Рис. 1.1. Графіки нарощення за простими та складними процентами

Іноді термін інвестування задають календарними датами першого та останнього днів інвестування. Якщо ∂_n – день початку терміну інвестування, $\partial_з$ – його закінчення, то $\partial = \partial_з - \partial_n$ – для звичайного року та $\partial = \partial_з - \partial_n + 1$ для високосного, за умови, що 29 лютого входить у термін інвестування. Тоді для обчислення простих процентів справедлива формула: $I = Pi\frac{\partial}{k}$, в якій, як правило, k =360, k =365 (366).

1.3. *Дисконтування*

Дисконтування – це процес знаходження вартісної величини в певний момент часу за її відомим або передбачуваним значенням у майбутньому.

У банківській діяльності при кредитуванні авансове отримання (вирахування) банком з позичальника, який бере кредит, процентів в момент його видачі, називають *дисконтуванням*.

Дисконтування відображає *облік* (викуповування) векселя в банку, коли банк, приймаючи вексель від пред'явника, видає йому позначену на векселі суму до терміну його погашення.

Вексель - це документ, який є засвідченням однієї особи сплатити іншій визначену суму грошових коштів у встановлений термін.

При нарощенні за простими процентами величину *дисконту* (сума зниження вартості погашення боргового зобов'язаня) знаходять за формулою: $D_t = P_n - P = P_n - \dfrac{P_n}{1+ni} = \dfrac{P_n ni}{1+ni}$.

Приклад 1.6. З якої суми можна отримати P_n=3400 грн. через три роки нарощенням за простими процентами при ставці i=12%? Якою буде при цьому величина дисконту D_t?

Розв'язок. Оскільки P_n=3400 грн., n=3, i=0,12, то отримаємо, що $P = \dfrac{3400}{1+3\cdot 0{,}12} = 2500$ грн., а $D_t = P_n - P = 3400 - 2500 = 900$ (грн.)

Приклад 1.7. Через півроку після надання кредиту позичальник повинен заплатити суму P_n=2140 грн. Чому дорівнює початкова величина кредиту P, якщо він виданий під i=14% річних, а кількість днів у році k=360? Якою буде величина дисконту D_t?

Розв'язок. Оскільки P_n=2140 грн., i=0,14, ∂=180, k=360, то початкова величина кредиту $P = \dfrac{2140}{1+\dfrac{180}{360}\cdot 0{,}14} = 2000$. грн., а величина дисконту D_t= = 2140 – 2000 = 140 (грн.).

За певний період *обліковою ставкою* d називають відношення різниці D між повною P_n та викупівельною ціною P векселя до його повної вартості:

$$d = \frac{D}{P_n} = \frac{P_n - P}{P_n}. \tag{1.4}$$

Очевидно, що розмір дисконту, облікова ставка та теперішня ціна за період, який залишився до погашення, є величинами, залежними від тривалості цього періоду t ($t \le n$). Облікову ставку у формулах вказують здебільшого за один рік, і називають її *річною обліковою ставкою*.

Ставку за період t обчислюють за формулою $d_t = dt$, де t- залишок терміну в роках, що залишився до погашення боргу, d - річна облікова ставка. Тоді з формули (1.4) отримаємо

$$D_t = P_n dt \tag{1.5}$$

$$P_t = P_n(1 - dt) \tag{1.6}$$

Величини D_t і d_t називають *банківським дисконтом* та *простою обліковою ставкою*, а формула (1.6) є *формулою банківського дисконтування суми P_n*.

Приклад 1.8. Власник векселя на суму P_n=50000 грн. обліковує його 13.09.2011р. з терміном погашення 28.09.2011р. Знайти суму, яку він отримає, якщо банк обліковує його за ставкою d=30%, а k=360, і річну дохідність операції за простою процентною ставкою.

Розв'язок. Оскільки P_n=50000, $\frac{\partial}{k} = 15/360$, d=0,3, то власник векселя отримає $P = P_n\left(1 - \frac{\partial d}{k}\right) = 50000\left(1 - \frac{15}{360} \cdot 0{,}3\right) = 49375$ (грн.). Річна дохідність банку за простою процентною ставкою $i = \frac{50000 - 49375}{49375} = 0{,}0126$, або 1,26%.

Приклад 1.9. Банк 12.04.11р. облікував два векселі з термінами погашення відповідно 20.05.11р. і 11.06.11р. За ставкою d=18% річних і утримав комісійні в розмірі 885 грн. Знайти номінальну вартість другого векселя, якщо перший пред'явлений на суму P^1=15000 грн., k=360 днів.

Розв'язок. Оскільки перший вексеь облікований за 38 днів до терміну погашення, P^1=15000(грн.), d=0,18, то $D_d^1 = 15000 \cdot \frac{38}{360} \cdot 0{,}18 = 285$. Другий облікований за 60 днів і дисконт $D_d^2 = 885 - 225 = 600$ (грн.). Далі $P^2 = (600 / \frac{60}{360} \cdot 0{,}18) = 20000$ (грн.).

Відповідно, номінальна вартість другого векселя дорівнює 20000 грн.

Приклад 1.10. На вексель вартістю P=10000 грн., який виданий на 150 днів, нараховуються прості проценти за ставкою i=16% (k_1=365). Визначити величину дисконту, якщо він був облікований за ставкою d=12% (k_2=360) за 80 днів до терміну погашення.

Розв'язок. Спочатку знаходимо суму P_n, яку потрібно виплатити пред'явнику векселя при його погашенні, а потім величину дисконту D_d:

$P_n = 10000 \cdot \left(1 + \frac{150}{365} \cdot 0{,}16\right) = 10658$ (грн.), $D_d = 10658 \cdot \frac{80}{360} \cdot 0{,}12 = 284$ (грн.).

Приклад 1.11. Вексель на суму P_n=1000 грн. з терміном погашення n=6 місяців, продається через n_1=2 місяці. Знайти річну облікову ставку d і теперішню вартість векселя P за n_2=2 місяці до погашення, якщо величина дисконту – D=80 грн.

Розв'язок. Оскільки за 4 місяці до погашення величина дисконту дорівнює 80 грн., а облікова ставка за цей період – 80/1000=8%. Тоді річна ставка $d = \frac{d_t}{t} = \frac{8}{1/3} = 24\%$. Тут t=4 місяці =1/3 року. Теперішню вартість векселя за 2 місяці до його погашення (t=2/12=1/6) знаходимо за формулою (1.6) $P = 1000(1 - 0{,}24 \cdot \frac{1}{6}) = 960$ (грн.).

Приклад 1.12. Вексель на суму P=1000 грн., виписаний 20.02.2011р. з датою погашення 20.11.2011р., і на нього нараховується i=15% річних. Його обліковано в банку 20.06.2011р. за обліковою ставкою d=11%. Якою буде викупівельна вартість векселя цього дня?

Розв'язок. Точна кількість днів між 20.02 та 20.11 – 273 (дні), або в роках n=273/360. Тоді за формулою (1.1) $P_n = 1000(1 + 0{,}15 \cdot \frac{273}{360}) = 1112{,}5$ (грн.). Якщо вексель обліковується 20.06, то термін до погашення n=324-171=153 (дні), або

n=153/360. При дисконтуванні за обліковою ставкою d=11% річних, його вартість 20.06 згідно формули (1.6): $P_t = 1112,5(1+0,11 \cdot \frac{153}{360}) = 1061,1$ грн.

1.4. Еквівалентні процентні ставки

Дисконт та дисконтна ставка є такими ж характеристиками *кредитної угоди*, як процент і процентна ставка, а відрізняються, лише напрямом схеми розрахунку: в першому випадку основною величиною є початкова вартість P, а в другому – майбутня вартість грошей P_n.

За період t процентна ставка $i_t = \frac{P_n - P}{P}$, дисконт за цей період $D_t = P_n - P$, а облікова ставка – $d_t = \frac{D_t}{P_n} = \frac{P_n - P}{P_n}$, тобто процентну i_t та облікову d_t ставки пов'язують між собою суми P_n і P, які відносяться до кінця та початку періоду t, а саме $P = P_n(1-d_t)$, а $P_n = P\,(1+i_t)$. Тоді $P = P(1+i_t)(1-d_t)$ і $(1+i_t)(1-d_t) = 1$, звідки для терміну t=1 рік: $d = \frac{i}{1+i}$, $i = \frac{d}{1-d}$.

Процентна та облікова ставки характеризують фінансову операцію порізному, а різниця полягає лише у виборі моменту часу: для процентної ставки – це початок терміну угоди, а для облікової – її кінець. Вищезазначені формули дають змогу для однієї з заданих величин знайти другу для одного і того ж періоду часу і задають умови *еквівалентності облікової та процентної ставки* стосовно заданого періоду часу.

Різні за видом процентні ставки називаються *еквівалентними*, якщо в однотипних фінансових операціях вони дають однакові результати.

Формули $P = \frac{P_n}{1+ni}$ і $P = \frac{P_n}{(1+i)^n}$ називаються *формулами математичного дисконтування.*

Банківське дисконтування за складною обліковою ставкою d_c проводиться за формулою

$$P = P_n(1-d_c)^n . \qquad (1.7)$$

звідки $d_c = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{P_n}}$.

Приклад 1.13. Знайти теперішню вартість P_n=200 грн., отриманих через n=2 роки: а) за простою i=10,5%; б) за обліковою ставкою d=10,5%.

Розв'язок. а) за простою ставкою - $P = \frac{P_n}{1+in} = \frac{200}{1+2\cdot 0{,}105} = 165{,}29$ (грн.);

б) для облікової ставки - $P = P_n(1-dn) = 200(1-2\cdot 0{,}105) = 158$ (грн.).

Приклад 1.14. Нехай проста річна процентна ставка i=20%. Знайти еквівалентні річні облікові ставки для термінів: а) три місяці; б) шість місяців.

Розв'язок. Якщо d - річна облікова ставка, то з рівняння $d_t = \frac{i_t}{1+i_t}$ для трьох місяців отримаємо, $d = \frac{i}{1+it} = \frac{0{,}2}{1+0{,}2\cdot 0{,}25} = 0{,}19048; d \approx 19\%$.

Аналогічно, для шести місяців $d = \frac{0{,}2}{1+0{,}2\cdot 0{,}5} = \frac{0{,}2}{1{,}1} = 0{,}1818; d \approx 18\%$.

Приклад 1.15. Обчислити величину дисконту D при проведенні банківського дисконтування суми P=18 тис. грн. за n=4 роки за складною обліковою ставкою d=12% річних.

Розв'язок. Згідно (1.7) теперішня вартість P=18000(1-0,12)^4=10794,52 (грн.). Тоді сума дисконту D=P_n-P=18000-10794,52=7205,48 (грн.).

1.5. Номінальна та ефективна процентні ставки

Хоча капіталізація процентів досить часто відбувається декілька разів на рік, проте в фінансових угодах, як правило, вказується річна процентна ставка i та визначається кількість періодів нарахування m в рік.

Річна процентна ставка i називається *номінальною*, якщо відповідна процентна ставка j за період 1/m знаходиться з рівності $j = i/m$.

Тоді формула (1.3) для знаходження нарощеного капіталу за n років при m - кратному нарахуванні процентів в рік набуде вигляду

$$P_n = P(1+\frac{i}{m})^{mn} = P(1+j)^{mn} \tag{1.8}$$

Приклад 1.16. В банк покладена сума P=5000 грн. на два роки з піврічним нарахуванням складних процентів за ставкою i=20% річних. Знайти величину отриманої через два роки суми.

Розв'язок. За формулою (1.8) $P_2=5000(1+0{,}2/2)^{2\cdot 2}=7320{,}5$ (грн.).

Якщо в умовах прикладу 1.16 проценти нараховувалися б щоквартально, то $P_2=5000(1+0{,}05)^{4\cdot 2}=7387{,}5$ (грн.).

З формули (1.8) знаходять період n, за який сума P при m-кратному нарахуванні процентів в рік за ставкою i зросте до P_n, а також у ставку i, якщо відомо, що за n - періодів при m-кратному нарахуванні сума P зросла до P_n**:**

$$n=\frac{\ln\frac{P_n}{P}}{m\ln\left(1+\frac{i}{m}\right)}\ , \tag{1.9}$$

$$i=m\left(\left(\frac{P_n}{P}\right)^{\frac{1}{mn}}-1\right). \tag{1.10}$$

Приклад 1.17. На вклад щомісячно нараховуються складні проценти за номінальною річною ставкою i=16%. За який період початковий капітал потроїться? Як зміниться результат, якщо складні проценти нараховуються щорічно?

Розв'язок. а) поклавши $P_n=3P$, m=12, i=0,16, за формулою (1.9) знаходимо $n=\frac{\ln 3}{(1+\frac{0{,}16}{12})}=6{,}912$ року. При щорічному нарахуванні процентів $(m=1)$

скористаємося формулою: $n=\frac{\ln\frac{P_n}{P}}{\ln(1+i)}\Rightarrow n=\frac{\ln 3}{\ln\left(1+0{,}16\right)}=7{,}402$ років.

Приклад 1.18. Вкладник хотів би за п'ять років подвоїти суму депозиту. Яку річну номінальну процентну ставку повинен запропонувати банк при нарахуванні складних процентів кожних півроку?

Розв'язок. Оскільки n=5, P_5=2P, m=2, то згідно (1.10) $i=2\cdot(2^{\frac{1}{2\cdot 5}}-1)=0{,}1435$, тобто ставка повинна бути не меншою 14,35%.

Універсальним показником для будь-якої схеми нарахування є *ефективна річна процентна ставка* $i_{еф}$, яка забезпечує перехід від P до P_n при нарахуванні процентів один раз в рік, та дає можливість побачити, яка складна річна процентна ставка дозволяє досягти такого ж фінансового результату, як і при m-кратному нарахуванні складних процентів в рік за ставкою i/m.

З формули (1.8) при n=1 маємо $P_1 = P(1+\frac{i}{m})^m$, а з означення ефективної ставки $P_1=P+P\cdot i_{еф}=P(1+i_{еф})$. Прирівнявши праві частини отримаємо:

$$i_{еф} = (1+\frac{i}{m})^m - 1. \tag{1.11}$$

Приклад 1.19. Кредит можна отримати: а) або на умовах щомісячного нарахування процентів з розрахунку i=26% річних; б) або на умовах піврічного нарахування процентів з розрахунку i=27% річних. Який з варіантів вигідніший?

Розв'язок. Для кожного з варіантів ефективні ставки: (1.11)

а) $i_{еф} = (1+\frac{0,26}{12})^{12} - 1 = 0,2933;$ б) $i_{еф} = (1+\frac{0,27}{2})^2 - 1 = 0,2882.$

Таким чином, варіант б) є вигіднішим, оскільки рівень витрат є меншим.

З (1.11) випливає формула для визначення номінальної ставки, якщо вказана ефективна річна ставка $i_{еф}$ та число нарахувань складних процентів m:

$$i = m\left((1+i_{еф})^{\frac{1}{m}} - 1\right). \tag{1.12}$$

Приклад 1.20. Визначити номінальну ставку i, якщо ефективна ставка $i_{еф}$=18%, а складні проценти нараховуються щомісячно.

Розв'язок. Оскільки $i_{еф}$=0,18 і m=12, то за формулою (1.12)

$$i = 12[(1+0,18)^{\frac{1}{12}} - 1] = 0,1667 \Rightarrow 16,67\%.$$

Якщо дві номінальні річні ставки визначають одну і ту ж ефективну, то вони називаються *еквівалентними*. З цього означення випливає: еквівалентні номінальні процентні ставки $i^{(m)}$ та $i^{(e)}$, де m і l – число нарахувань складних процентів задовольняють рівностям: $i_{еф} = (1+\frac{i^{(m)}}{m})^m - 1 = (1+\frac{i^{(l)}}{l})^l - 1$.

Приклад 1.21. Знайти еквівалентні номінальні річні ставки з а) піврічним, б) щоквартальним нарахуванням складних процентів, якщо $i_{еф} = 20\%$.

Розв'зок. За формулою (1.12) отримаємо:

$$\text{а)}\, i^{(2)} = 2((1+0{,}2)^{\frac{1}{2}} - 1) = 0{,}1909; \qquad \text{б)}\, i^{(4)} = 4[(1+0{,}2)^{\frac{1}{4}} - 1] = 0{,}1865.$$

Таким чином, номінальні ставки $i^{(2)}$=19,09% і $i^{(4)}$=18,65% є еквівалентними, причому видно, що $i^{(4)} < i^{(2)}$.

1.6. Неперервне нарощення і дисконтування

Нехай номінальна річна процентна ставка i. При нарахуванні процентів m разів в рік за ставкою $\frac{i}{m}$ ефективна річна ставка $i_{еф} = (1+\frac{i}{m})^m - 1$. При частішому нарахуванні процентів $(m \to \infty)$ матимемо $\lim\limits_{m\to\infty}(1+\frac{i}{m})^m = e^i$ $(e \approx 2{,}17)$.

Неперервним нарощенням за ставкою i називається збільшення суми в e^i разів за одиничний проміжок нарахування і в загальному вигляді – збільшення суми в e^{it} разів за t проміжків нарахування.

Неперервним дисконтуванням називається операція зменшення суми в e^{it} разів за t проміжків.

Таким чином, формула для знаходження нарощеної суми за n років при неперервному нарахуванні відсотків $P_n = \lim\limits_{m\to\infty} P \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{n \cdot m} = P \cdot e^{i_{неп} \cdot n}$

Приклад 1.22. Знайти нарощене значення P=250 тис. грн., покладених в банк на n=6 років за номінальною ставкою i=12% річних з нарахуванням відсотків: а) n=1 раз на рік; б) n=2 рази на рік; в) неперервно.

Розв'язок. а) $P_n = P \cdot (1+i)^n = 250000 \cdot (1+0{,}12)^6 = 493455{,}67$ (грн.);

$$б)\ P_n = 250000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{2}\right)^{12} = 503049 (\text{грн.});$$

$$в)\ P_n = 250000 \cdot e^{0{,}12 \cdot 6} = 513608{,}3 (\text{грн.})$$

Приклад 1.23. Знайти грошовий виграш інвестора за n=3 роки від інвестування P=50 тис. грн. за процентною річною ставкою i=6%, якщо замість щомісячного проводитиметься неперервне нарахування відсотків.

Розв'язок.

$$P_{n1} = 50000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}06}{12}\right)^{12 \cdot 3} = 59834{,}02,$$

$$P_{n2} = 50000 \cdot e^{3 \cdot 0{,}6} = 59860{,}86.$$

Грошовий виграш дорівнює 59860,86-59834,02=26,84 (грн.).

1.7. Врахування інфляції в короткострокових і довгострокових фінансових операціях

Інфляція спричиняє падіння купівельної спроможності грошей, тобто знецінює їх вартість. Розрізняють номінальну процентну ставку i - ставку, яка встановлюється без врахування зміни купівельної вартості грошей у зв'язку з інфляцією, і реальну процентну ставку i_p - ставку, яка встановлюється з врахуванням в поточному періоді у зв'язку з інфляцією.

Кажуть, що темп інфляції складає частку α в рік, якщо один і той же набір товарів коштує в кінці року в $(1+\alpha)$ разів більше, ніж на початку. Дійсно, одна грошова одиниця зростає за рік в $(1+i)$ разів за рахунок нарощення процентів, але її купівельна спроможність зменшується в $(1+\alpha)$ разів через інфляцію. Таким чином, її купівельна спроможність дорівнюватиме $(1+i)/(1+\alpha)$. Тому *реальним еквівалентом* нарощеної за рік суми $P_n = P \cdot (1+i)$ є сума $P_{n \cdot \alpha} = P \cdot \dfrac{1+i}{1+\alpha}$.

Тоді реальна процентна ставка $i_p = \dfrac{P_{n \cdot \alpha} - P}{P} = \dfrac{i - \alpha}{1+\alpha}$. Звідки

$$\boldsymbol{i = \alpha + i_p + i_p \cdot \alpha} \qquad (1.13)$$

Приклад 1.24. В проект інвестовано P=12000 грн. під i=10% річних. Визначити просту процентну ставку i, яка враховує інфляцію α=6%, та суму погашення з врахуванням інфляції.

Розв'язок. Оскільки згідно (1.13) $i = 0{,}06 + 0{,}1 + 0{,}1 \cdot 0{,}06 = 0{,}166$, то $P_{n1} = 12000 \cdot (1 + 0{,}166) = 13992$ (грн.).

Для довільного терміну t процентна ставка $i = \alpha + i_p + i_p \cdot \alpha \cdot t$. Для короткострокових операцій (t<1) $t = \frac{\partial}{k}$ матимемо $i = \alpha + i_p + i_p \cdot \alpha \cdot \frac{\partial}{k}$.

У розрахунках в облікових операціях замінюють облікову ставку d обліковою ставкою – брутто d_α, яка враховує інфляцію α.

За формулою банківського дисконтування $P_n = P \cdot (1 - d_t)$ отримуємо

$$P_n = \frac{P}{1 - d_t}, \; P_{n \cdot \alpha} = \frac{P_i}{1 - d_\alpha \cdot t}, \; d_\alpha = d \cdot \alpha .$$

З іншої сторони, $P_{n \cdot \alpha} = P_n \cdot (1 + \alpha \cdot t)$. Оскільки $P_n = \frac{P}{1 - d \cdot t}$, то $P_{n \cdot \alpha} = \frac{P \cdot (1 + \alpha \cdot t)}{1 - d \cdot t}$. Тоді $\frac{P}{1 - d_\alpha \cdot t} = \frac{P \cdot (1 + \alpha \cdot t)}{1 - d \cdot t}$, або $1 - t \cdot d_\alpha = \frac{1 - t \cdot d}{1 + t \cdot \alpha}$, звідки $d_\alpha = \frac{\alpha + d}{1 + \alpha \cdot t}$. Зокрема, для t =1 $d_\alpha = \frac{\alpha + d}{1 + \alpha}$, для t < 1 $d_\alpha = \frac{\alpha + d}{1 + \alpha \cdot \frac{\partial}{k}}$.

Приклад 1.25. Як зміниться облікова ставка і сума процентів (дисконту) після врахування інфляції $\alpha = 10\%$ при проведенні обліку n=90-денного векселя на суму P_n=300 гривень, якщо банківська облікова ставка d=18%.

Розв'язок. За формулою $d_\alpha = \frac{\alpha + d}{1 + \alpha \cdot \frac{\partial}{k}}$ знайдемо ставку – брутто $d_\alpha = \frac{0{,}18 + 0{,}1}{1 + 0{,}1 \cdot \frac{90}{360}} = \frac{0{,}28}{1{,}025} = 0{,}273$; $d_\alpha = 27{,}3\%$. Оскільки дисконт: $D = P_n \cdot d \cdot \frac{\partial}{k}$, то $D_\alpha = P_n \cdot d_\alpha \cdot \frac{\partial}{k} = 300 \cdot 0{,}273 \cdot \frac{90}{360} = 20{,}48$ (грн.), $D = 300 \cdot 0{,}18 \cdot \frac{90}{360} = 13{,}5$ (грн.).

Отже, якщо врахувати інфляцію $\alpha = 10\%$, то облікова ставка збільшиться з 18% до 23,7%, а сума дисконту – з 13,5 грн. до 20,48 грн.

1.8. Змінні ставки і реінвестування

Нехай на період n_k встановлена річна процентна ставка i_k, а приріст капіталу - $Pn_k i_k$. Процентна сума за час $n=\sum_{k=1}^{m} n_k$ визначається за формулою

$$F = P + Pn_1 i_1 + Pn_2 i_2 + \cdots Pn_m i_m = P(1+\sum_{k=1}^{m} n_k i_k) \qquad (1.14)$$

Зауважимо, що всі періоди і процентні ставки вимірюються в одних і тих же одиницях.

Позначимо $\bar{i} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k i_k$. Тоді (1.14) набуде вигляду $F=P(1+n\bar{i})$, тобто на весь період тривалістю n можна встановити процентну ставку $\bar{i}$, яка дає такий же результат, як і дані змінні ставки.

Формулою (1.14) можна користуватися і в тих випадках, коли періоди виражені в різних одиницях часу, проте розмірності n_k та i_k узгоджуються.

Приклад 1.26. В банк покладено P=15000 грн. за таких умов: в перший рік процентна ставка i_1=20% річних, яка щопівроку підвищується на 3%. Знайти процентну суму за n=2 роки, при нарахуванні процентів на початкову суму.

Розв'язок. Оскільки P=15000 грн., $n_1=1$, $n_2=n_3={}^1/_2$, $i_1=0{,}2$, $i_2=0{,}23$, $i_3=0{,}26$, то за формулою (1.14) $F=15000\cdot(1+1\cdot 0{,}2+{}^1/_2\cdot 0{,}23+{}^1/_2\cdot 0{,}26)=21675$ грн.

Таку ж суму можна отримати, якщо прості проценти нараховуються за два роки за ставкою $i={}^1/_2(1\cdot 0{,}2+{}^1/_2\cdot 0{,}23+{}^1/_2\cdot 0{,}26)=0{,}2225$, або i=22,25% річних.

Нехай знову на період n_k встановлена процентна ставка i_k, але при зміні (або без зміни) ставки нарощення на даний момент сума вкладається знову під простий процент. Така фінансова операція називається *реінвестуванням* або *капіталізацією* отриманих на кожному етапі нарощення засобів.

Припустимо для визначеності, що період n_1 передує періоду n_2, який передує періоду n_3 і т. д. Тоді через час n_1 нарощена сума $F_1=P(1+n_1 i_1)$, а через час n_2 – $F_2=F_1(1+n_2 i_2)=P(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2)$ і т. д., за час $n=\sum_{k=1}^{m} n_k$;

$$F=F_m=F_{m-1}(1+n_mi_m)=P(1+n_1i_1)(1+n_2i_2)\ldots(1+n_mi_m)=P\prod_{k=1}^{m}(1+n_ki_k). \qquad (1.15)$$

При однакових періодах нарахування $n_k=n,\ k=1,\ \ldots,\ m$ - та однакових процентних ставках $F=P(1+ni)^m$. Якщо i_r – ставка складних процентів у k-ому періоді, $k=1,\ \ldots,\ m$, а n_k – тривалість k-ого періоду, то нарощена на кінець терміну сума $F=P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\ldots(1+i_m)^{n_m}$.

Приклад 1.27. За умовами прикладу 1.26 знайти нарощену суму за n=2 роки, якщо одночасно зі зміною ставки відбувається і капіталізація.

Роз'язок. Згідно (1.15) $F=15000\cdot(1+0{,}2)\cdot(1+{}^1/_2\cdot0{,}23)\cdot(1+{}^1/_2\cdot0{,}26)=22679{,}1$ (грн.), що є більше нарощеної суми, із попереднього прикладу, завдяки операції реінвестування.

Завдання до самостійної роботи

1. Якою стане початкова сума а) P=2000 грн.; б) P=1500 грн. через а)n=8; б) n=12 років, якщо проста процентна ставка а) i=11%; б) i=15%?

2. Прості проценти на суму а) D=900 грн.; б) D=1200 грн. на а) n=6; б) n=9 місяців становлять а) I=60 грн.; б) I=90 грн. Знайти річну процентну ставку.

3. Банк виплачує а) I=85 доларів; б) I=90 доларів через кожні а) n=4; б)n=6 місяців за валютним рахунком, виходячи з а) i=8,5%; б) i=9% річних (простих). Знайти розмір валютного рахунку.

4. За який термін вклад величиною P збільшиться в а) n=4; б) n=6 разів при ставці а) i=9%; б) i=10% (простих).

5. За умов прикладу 1 провести нарощення за складними процентами.

6. Річна ставка складних процентів дорівнює а) i=7%; б) i=9%. Через скільки років початкова сума стане більшою в а) n=2; б) n=4 рази?

7. Для суми а) P=20000 грн.; б) P=30000 грн., покладеної на а) n=3,5; б)n=4,5 роки під а) i=19%; б) i=21% річних, знайти нарощену за комбінованою схемою суму P_n.

8. Знайти теперішню вартість а) P_n=1000 грн.; б) P_n=1500 грн., отриманих через а) n=5; б) n=4 роки при простій ставці процентів а) i=15%; б) i=16%. Якою буде величина дисконту?

9. Через а) n=4; б) n=9 місяців після надання кредиту P потрібно заплатити а) P_n=30000 грн.; б) P_n=40000 грн. Знайти величину дисконту та кредиту, якщо він виданий під а) i=18%; б) i=21% річних. Вважати, що k=360.

10. Вексель на суму а) P_n=2000 грн.; б) P_n=3000 грн. з терміном погашення 6 місяців через 2 місяці продають банку, який обліковує його уже не за повну вартість, а за а) P=1800 грн.; б) P=2500 грн. Визначити величину дисконту.

11. Вексель на суму а) P_n=2000 грн.; б) P_n=3000 грн. з терміном його погашення а) n=3; б) n=9 місяців через а) n_1=1; б) n_1=6 місяців продають банку. Знайти річну облікову ставку та теперішню вартість векселя за два місяці до погашення, якщо величина дисконту а) D=200 грн.; б) D=300 грн.

12.Вексель на суму а) P_n=4000 грн.; б) P_n=6000 грн., обліковується а) 12.04.2011 р. з терміном погашення 22.04.2011 р.; б) 03.06.2011 р. з терміном погашення 23.06.2011 р. за ставкою а)d=15%; б) d=20%, а кількість днів у році k=360. Знайти суму, яку отримає власник векселя і річну дохідність операції банку за простою процентною ставкою.

13.Банк а) 03.05.2011 р.; б) 10.06.2011 р. облікував два векселі з термінами погашення а) 29.05.2011 р. і 07.06.2011 р.; б) 22.07.2011 р. і 25.07.2011 р. за обліковою ставкою а) d=16%; б) d=19% річних і отримав комісійні в розмірі 1000 грн. Знайти номінальну вартість другого векселя, якщо перший пред'явлений на суму а) P=10000 грн.; б) P=20000 грн.

14. На вексель вартістю а) P_n=2000 грн.; б) P_n=3000 грн., виписаний а) 25.03.2011р. з датою погашення 25.08.2011р.; б) 21.04.2011р. з датою погашення 21.10.2011р. нараховується а) i=12% б) i=15% річних (простих). Його обліковано в банку а) 25.06.2011р.; б)21.08.2011р. за ставкою а) d=9%; б) d=12%. Знайти викупівельну вартість векселя цього дня і величину дисконту?

15.Нехай проста річна процентна ставка а) i=18%; б) i=16%. Знайти еквівалентні річні облікові ставки для термінів а) n=4; б) n=6 місяців.

16.Обчислити суму дисконту при проведенні банківського дисконтування суми а) P_n=12000 грн.; б) P_n=16000 грн. за а) n=2; б) n=3 роки за складною обліковою ставкою а) d=9%; б) d=10%.

17. За який період початковий капітал стане більшим в а) n=3 рази; б) n=4 рази, якщо на нього а) щомісячно; б) щорічно нараховуються складні проценти за номінальною річною ставкою а) i=12%; б) i=10%.?

18. Знайти річну номінальну процентну ставку при нарахуванні складних процентів а) k=4 рази в рік; б) k=2 рази в рік, щоб за а) n=10 років; б) n=6 років збільшити вклад в а) m=4 рази; б) m=2 рази?

19. Підприємець може отримати кредит або на умовах нарахування процентів кожних n=2 місяці з розрахунку i=22% річних, або – кожних n=4 місяці з розрахунку i=23% річних. Який варіант вибрати?

20. Можна отримати кредит на умовах нарахування процентів кожних n=3 місяці з розрахунку i=21% річних, або - піврічного нарахування процентів з розрахунку i=22% річних. Який варіант вибрати?

21.Визначити номінальну ставку, якщо ефективна ставка дорівнює а) $i_{еф}$=16%; б) $i_{еф}$=20%, а складні проценти нараховуються а) кожних n=3 місяці; б) щопівроку.

22. Якими будуть еквівалентні номінальні річні процентні ставки з нарахуванням процентів а) щомісяця; б) кожних 4 місяці, якщо ефективна $i_{еф}$=18%?

23. Якими будуть еквіваленті номінальні річні процентні ставки з нарахуванням процентів а) кожних 3 місяці; б) щопівроку, якщо ефективна $i_{еф}$=21%?

24. Знайти нарощене значення суми а) P=150000 грн.; б) P=200000 грн., покладеної в банк на а) n=4; б) n=5 років, за номінальною ставкою а)i=10%; б)i=11% річних з нарахуванням процентів неперервно.

25. Знайти виграш, який отримується інвестором за а) n=4 роки; б) n=5 років від інвестування а) P=30000 грн.; б) P=40000 грн. за процентною річною

ставкою а) i=7%; б) i=8%, якщо замість щомісячного проводитиметься нарахування неперервних процентів.

26.В проект інвестовано а) P=10000 грн.; б) P=11000 грн. під а) i=11%; б) i=12% річних. Визначити просту процентну ставку, яка враховує інфляцію а)α=8%; б) α=9%, та суму погашення з врахуванням інфляції.

27. Як зміниться облікова ставка після врахування інфляції а) α=9%; б)α=11% при проведенні обліку а) n=120; б) n=150 денного векселя на суму а) P=1000 грн.; б) P=2000 грн., за обліковою ставкою а) d=16%; б) d=17%?

28.Вкладник поклав а) P=10000 грн.; б) P=20000 грн. за умов: перший рік процентна ставка а) i=18%; б) i=21% річних, а кожні півроку підвищується на а) Δ=1%; б) Δ=2%. Знайти процентну суму за а) n=3; б) n=4 роки.

29.За умовами прикладу 28 знайти нарощену суму за n=2 роки, якщо зі зміною процентної ставки відбувається капіталізація процентного доходу.

Наведемо примірний варіант підсумкової контрольної роботи, яку, доцільно провести після вивчення матеріалу, наведеного в розділі 1.

1. На вклад щомісячно нараховуються складні проценти за номінальною ставкою i=24% річних. За який період початковий вклад потроїться?

2. Для суми P=1000 грн., покладеної на n=2,5 роки під i=18%, знайти нарощену за комбінованою схемою суму P_n.

3. Якою буде еквівалентна номінальна річна процентна ставка при піврічному нарахуванні процентів, якщо ефективна ставка $i_{еф}$=28%?

4. Як зміниться облікова ставка після врахування інфляції $\alpha = 8\%$ при проведенні обліку 100 денного векселя на суму P=1500 грн., якщо банківська облікова ставка d = 18%?

5. Вкладник поклав суму P=5000 грн. на n=3 роки. Перший рік нараховуються проценти за ставкою i_1=19%, а потім 2 роки за ставкою i_2=20%. Знайти нарощену за n=3 роки суму при інвестуванні за складними процентами.

РОЗДІЛ 2. УПРАВЛІННЯ ГРОШОВИМИ ПОТОКАМИ

2.1. Сутність управління грошовими потоками підприємства

Грошовий потік підприємства – це сукупність розподілених в часі надходжень і виплат грошових коштів. Окремий елемент такого ряду платежів називають *членом грошового потоку*. *Позитивний грошовий потік* характеризує сукупність поступлень, а *негативний* - сукупність виплат грошових коштів.

Розглянемо рух грошових коштів як числовий ряд, що складається із послідовності розподілених у часі платежів $R_1, R_2, \ldots, R_n$, окремий елемент R_t , якого є різницею між усіма поступленнями грошових коштів і їх виплатами на конкретному часовому відрізку. Тому величини R_t можуть мати від'ємний і додатній знаки, а їх послідовність утворює *чистий грошовий потік*.

Нехай $R=\{R_k, t_k\}$ – потік платежів, t_k - моменти часу, R_k – величина k-ого платежу.

Слід звернути увагу на нерівноцінність двох однакових за величиною ($R_i=R_j$), але різних в часі ($t_i \neq t_j$) грошових потоків.

Кількісний аналіз грошових потоків в загальному випадку зводиться до обчислення таких характеристик: $R(T)$ – майбутня величина потоку за T періодів; $R(0)$ – теперішня величина потоку; R_t – величина потоку у періоді t; i – процентна ставка; T – термін (кількість періодів проведення операції).

Майбутньою величиною потоку за Т періодів називається сума платежів потоку, дисконтованих на даний момент $R(T)=\sum_k R_k(1+i)^{T-t_k}$, а величина $R(0)=$ $=\sum_k R_k(1+i)^{-t_k}$ - *теперішньою* (*сучасною*) *величиною потоку.*

Якщо є останній платіж, то величина потоку в момент цього платежу називається *скінченною (нарощеною)* величиною потоку. Знаючи *сучасну* величину потоку, нарощену шукають за формулою $R(T)=R(0)(1+i)^T$

Приклад 2.1. Нехай задано потік $R=\{(-200,1); (1000,2); (2000,3)\}$. Знайти характеристики потоку за процентною ставкою i=10%.

Розв'язок. При T=0, $t_k=1,2,3$ за наведеними формулами отримаємо:

$$R(0)=-2000(1+0{,}1)^{-1}+1000(1+0{,}1)^{-2}+2000(1+0{,}1)^{-3}\approx 510{,}8,$$

$$R(3)=R(0)(1+i)^3=679{,}8.$$

Найпростішим (елементарним) грошовим потоком називається потік, який складається з однієї виплати та наступних поступлень, або разового поступлення з наступними виплатами, розділеними на T періодів. Прикладами фінансових операцій з такими потоками платежів є термінові депозити, одноразові позики. Числовий ряд в цьому випадку складається лише з двох елементів $\{-R(0); R(T)\}$ або $\{R(0); -R(T)\}$, а операції з елементарними потоками характеризуються чотирма параметрами – $R(0)$, $R(T)$, i, T . Величина одного з них визначається за відомими значеннями трьох решти. Наприклад,

$$i = \left(\frac{R(T)}{R(0)}\right)^{\frac{1}{T}} - 1, \quad T = \ln\left(\frac{R(T)}{R(0)}\right) \cdot \left(\ln(1+i)\right)^{-1}.$$

У деяких країнах процентні гроші обкладаються податком, що зменшує реальну нарощену суму та дохідність фінансової операції. Тоді нарощена сума з врахуванням ставки податку на прості проценти j

$$R_j(T)=R(T)-[R(T)-R(0)]\cdot j= R(T)(1-j)+R(0)\cdot j=R(0)[1+T(1-j)i],\ 0\le j\le 1 \qquad (2.1)$$

При нарахуванні податку на складні проценти можливе нарахування на весь термін відразу, або в кінці кожного періоду.

В першому випадку сума податку $R(0)((1+i_c)^T-1)j$, а нарощена сума:

$$R_j(T)=R(T)-[R(T)-R(0)]\cdot j=R(0)[(1-j)(1+i_c)^T+j] \qquad (2.2)$$

В другому випадку сума податку R_{jt} за рік t знаходиться за формулою $R_{jt}=(R(t)- R(t-1))\, j= R(0)((1+i_c)^t-(1+i_c)^{t-1})\, j$, загальна сума податку $G=R(0)((1+i)^T-1)j$, а нарощена сума з врахуванням сплати податків

$$R_j(T)=R(T)-G= R(0)(1+i)^T-R(0)\,[(1+i)^T-1]=R(0)(1-g)(1+i)^T \qquad (2.3)$$

Нарощена величина елементарного потоку для суми $R(0)$=10000 грн. покладеної на T=3 роки під i=20% річних, ставки податку на проценти j=10%, при нарахуванні простих процентів (2.1) $R_j(T)=10000[1+3\cdot 0{,}9\cdot 0{,}2]=15400$ грн. При нарахуванні складних процентів (2.2) $R_j(T)=10000[0{,}9\cdot(1+0{,}2)^3+0{,}1]=16552$ грн. Величина податку на проценти за перший, другий і треті роки: $R_{0,1;1}=10000[(1+0{,}2)^1-(1+0{,}2)^0]\cdot 0{,}1=200$; $R_{0,1;2}=10000[(1+0{,}2)^2-(1+0{,}2)^1]\cdot 0{,}1=240$; $R_{0,1;3}=10000[(1+0{,}2)^3-(1+0{,}2)^2]\cdot 0{,}1=288$.

В другому випадку при нарахуванні складних процентів (2.3) матимемо

$$R_j(T)=10000(1\text{-}0{,}1)(1+0{,}2)^3=15552 \text{ (грн.)}$$

Інколи доводиться мати справу з середніми величинами грошових потоків. Наприклад при отриманні різних за величиною кредитів, виданих під різні процентні ставки, з використанням схеми простих процентів, середня процентна ставка обчислюється за формулою $i_{cn} = \dfrac{\sum_{k=1}^{N} R_k T_k i_k}{\sum_{k=1}^{N} R_k T_k}$, де R_k - суми отриманих кредитів, T_k - термін на які вони видані.

Нехай перший кредит в сумі R_1=10000 грн. виданий на T_1=6 місяців під i_1=24%, а другий – величиною R_2=20000 грн. виданий на T_2=9 місяців під i_2=28% простих процентів. Тоді середня процентна ставка

$$i_c = \frac{0{,}24 \cdot 0{,}5 \cdot 10000 + 0{,}28 \cdot 0{,}75 \cdot 20000}{0{,}5 \cdot 10000 + 0{,}75 \cdot 20000} = 0{,}27, \text{ або } 27\%$$

Середню ставку за складними процентами визначають за формулою

$$i_{cc} = [(1+i_1)^{T_1} \cdot (1+i_2)^{T_2} \cdot \ldots \cdot (1+i_N)]^{\frac{1}{T}} - 1, \qquad T_1+T_2+\ldots+T_n=T$$

Нехай кредит в обсязі $R(0)$=10000 грн. виданий на T=6 років на таких умовах: перші T_1=2 роки – під i_1=5% річних (складні проценти), T_2=3 роки – під i_2=7%, T_3=1 рік – під i_3=8%. Тоді середня складна процентна ставка $i_{cc}=(1{,}05^2 \cdot 1{,}07^3 \cdot 1{,}08)^{1/6}-1=0{,}0649$ або 6,49%, а сума боргу, яку потрібно погасити, $R(T)= =R(0)\cdot(1+i_1)^{T1}\cdot(1+i_2)^{T2}\cdot(1+i_3)^{T3}=10000(1{,}05)^2\cdot(1{,}07)^3\cdot 1{,}08=14586{,}59$ (грн.).

До середніх величин грошових потоків відноситься *дюрація*, під якою розуміють середньозважене значення числових моментів платежів $t_1, t_2, \ldots, t_N$ за часткою ціни, яку вносить відповідний платіж в теперішню вартість всієї послідовності платежів.

Для послідовності грошових платежів $R_1(t_1), R_2(t_2), \ldots, R_N(t_N)$ в моменти часу $t_1, t_2, \ldots, t_N$. при нарахуванні простих процентів теперішня величина

$$R_k(0) = \frac{R_k(t_k)}{1+i_n t_k}, \tag{2.4}$$

де i_n - річна проста процентна ставка. Тоді дюрація

$$Dur = \frac{\sum_{k=1}^{N} t_k R_k(0)}{\sum_{k=1}^{N} R_k(0)} \qquad (2.5)$$

При нарахуванні складних процентів за ставкою i_c теперішня величина кожного платежу обчислюється за формулою $R_k(0) = \frac{R_k(t_k)}{(1+i_c)^{t_k}}$.

Економічний зміст показника дюрації: сумарна величина послідовності платежів, отриманих за весь термін, така ж, як у випадку, коли б вона була отримана з початкової суми $R(0)$ за час середньої тривалості платежів.

Приклад 2.2. Обчислити дюрації потоків платежів для інвестора і дебітора при простій процентній ставці i=28% річних. Проаналізувати отримані результати для даних табл. 2.1:

Таблиця 2.1

Дні очікування t_k	30	60	90	120	160	200	312	365	730	1460
Платежі R_k	-120	-85	-98	-95	-75	80	50	120	140	250

Розв'язок: За формулами (2.4) і (2.5) шукаємо $R_k(0)$ і Dur. Для дебітора

$$R_1(0) = \frac{120}{1+0{,}28\cdot\frac{30}{365}} = 117{,}84, \quad \ldots, \quad R_5(0) = \frac{75}{1+0{,}28\cdot\frac{160}{365}} = 68{,}32.$$

$$Dur_1 = \frac{117{,}84\cdot 30 + 81{,}91\cdot 60 + 92{,}89\cdot 90 + 88{,}51\cdot 120 + 68{,}32\cdot 160}{117{,}84 + 81{,}49 + 92{,}89 + 88{,}51 + 68{,}32} = 85 \text{ днів}$$

Для інвестора

$$R_1(0) = \frac{80}{1+0{,}28\cdot\frac{200}{365}} = 69{,}24, \quad \ldots, \quad R_5(0) = \frac{250}{1+0{,}28\cdot\frac{1460}{365}} = 117{,}92.$$

$$Dur_2 = \frac{69{,}24\cdot 200 + 40{,}24\cdot 312 + 93{,}75\cdot 365 + 89{,}74\cdot 730 + 117{,}92\cdot 1460}{69{,}24 + 40{,}24 + 93{,}75 + 89{,}74 + 117{,}92} = 726$$

Таким чином, весь потік платежів, отриманих дебітором за період з 30-ого по 160-ий день, за величиною рівносильний для дебітора отриманям всієї суми (120+85+98+95+75=473 тис. грн.) одноразово на 85 день.

Для кредитора повернення кредиту рівносильне отриманню всієї суми на 726 день від початку дії контракту.

Інколи потрібно коректувати умови раніше укладених угод: змінити терміни платежів; провести об'єднання декількох платежів в один із встановленням єдиного терміну погашення і т. д. Основним принципом зміни умов є *принцип фінансової еквівалентності*: сума платежів, які замінюються, зведених до одного моменту часу, повинна дорівнювати сумі платежів за новим зобов'язанням, зведеній на ту ж дату.

Якщо при консолідації n платежів у один за умови, що термін нового консолідованого платежу $t_{конс} > t_1, t_2, \ldots, t_n$, то рівняння еквівалентності має вигляд

$$R_{конс} = \sum_{k=1}^{n} R_k (1 + T_k \cdot i_k), \qquad (2.6)$$

де $R_{конс}$ – нарощена сума консолідованого платежу, R_k – платежі, які підлягають консолідації з термінами виплати $t_1, t_2, \ldots, t_n$, T_k - часові інтервали між $t_{конс}$ і t_k, тобто $T_k = t_{конс} - t_k$, i_k – процентна ставка платежів.

Приклад 2.3. Кредит на суму D=900 доларів отриманий під i=10% річних простих потрібно погасити двома платежами: перший величиною $R_1(t_1)$=500 доларів з процентами через t_1=90 днів, другий – $R_2(t_2)$=400 доларів, t_2=120 днів. Знайти розмір консолідованого платежу з $t_{конс}$=150 днів.

Розв'язок. Вважаємо, що T_p=360 днів. Суми, які потрібно було б повернути на попередніх умовах, такі:

R_1=500(1+(90/360)·0,1)=512,5 (дол.); R_2=400(1+(120/360)·0,1)=413,3 (дол.)

Тоді сума погашення консолідованого платежу (2.8)

$R_{конс}$=512,5(1+((150-90)/360))·0,1)+413,3(1+((150-120)/360))·0,1)=937,78 (дол.)

Якщо при об'єднанні платежів задана величина консолідованого платежу $R_{конс}$, то його термін $t_{конс}$ обчислюють за формулою

$$t_{конс} = \frac{1}{i}\left(\frac{R_{конс}}{\sum_{k=1}^{n} R_k (1 + t_k i)^{-1}} - 1\right). \qquad (2.7)$$

Дана формула має місце, якщо розмір консолідованого платежу є більшим за суму сучасних вартостей платежів, що замінюються.

Приклад 2.4. Суми R_1=20000, R_2=30000 і R_3=40000 грн., які потрібно виплатити відповідно через t_1=50, t_2=60 і t_3=150 днів, замінюють одним платежем у розмірі $R_{конс}$=100000 грн. з відтермінуванням боргу. Який середній період відтермінування, якщо банківська ставка i=10%.

Розв'язок. Теперішня вартість *R(0)* платежів, які заміняються, складає

$$R(0)=20000(1+(50/365)\cdot 0{,}1)^{-1}+30000(1+(60/365)\cdot 0{,}1)^{-1}+$$
$$+40000(1+(150/365)\cdot 0{,}1)^{-1}=87700 \text{ грн.}$$

За формулою (2.7) отримаємо, що $t_{конс}\frac{1}{0{,}1}\left(\frac{100000}{87700}-1\right)=1{,}404$ роки.

2.3. Фінансові ренти

Фінансова рента – це частинний випадок потоку платежів, всі члени якого – додатні величини, розподілені в часі із сталими інтервалами між будь-якими двома послідовними платежами. Іншими словами, фінансова рента – це послідовність періодичних виплат, які проводяться у вигляді грошової суми через рівні проміжки часу.

Прикладами фінансових рент є створення амортизаційного та пенсійного фондів, страхові премії, виплата кредитів, сплата дивідендів від акцій та ін. Потік платежів, що стосується тільки щорічних виплат, інколи називають *ануїтетом*.

Кожна рента описується або задається такими параметрами:

- *член ренти* (*rent*) – величина кожної окремої виплати *R*;

- *період ренти* (*rent period, payment period*)– проміжок часу між двома послідовними платежами (*p* – кількість платежів в рік);

- *термін ренти* (*term*) – час від початку першого до кінця останнього *n* періоду ренти;

- *процентна ставка* – ставка, яка використовується при нарощенні або дисконтуванні платежів, із яких складається рента: *i, d*;

- *нарощена сума* – це сума всіх членів ренти з нарахованими на них процентами на кінець її терміну;

- *теперішня (поточна) величина ренти* - це сума всіх її членів, дисконтованих на початок її терміну. Іноді цю суму називають *зведеною* або *капіталізованою ціною ренти*.

Якщо платежі надходять в кінці чергового проміжку часу, то рента називається – *постнумерандо*, на початку - *пренумерандо*.

2.4. Звичайні ренти (постнумерандо)

Прості, або *звичайні* ренти допускають надходження, або виплати однакових за величиною сум протягом всього терміну в кінці кожного періоду. Для їх кількісного аналізу використаємо всі наведені вище характеристики рент. Майбутня величина S є сумою всіх складових її платежів з нарахованими процентами на кінець терміну проведення операції.

Якщо протягом n років в кінці кожного вноситься тільки один платіж величиною R, і на нього нараховуются складні проценти за ставкою i, то нарощені суми утворюють послідовність: $R(1+i)^{n-1}, R(1+i)^{n-2}, \dots , R(1+i), R$, яка є геометричною прогресією з першим членом R і знаменником $(1+i)$, а її сума

$$S=R[(1+i)^n-1]/i=Rs(n,i) \qquad (2.8)$$

Множник $s(n,i)=[(1+i)^n-1]/i$ називається *коефіцієнтом нарощення ренти.* Запис (n,i) вказує на тривалість ренти і величину процентної ставки.

Під теперішньою величиною звичайної ренти розуміють суму всіх складових платежів, дисконтованих на момент початку операції. Вони утворюють послідовність $R/(1+i)\,;\ R/(1+i)^2\,;\dots ,\ R/(1+i)^n$., яка є геометричною прогресією з першим членом $R/(1+i)$ і знаменником $1/(1+i)$, а її сума $A=R(1-(1+i)^{-n}/i)$.

Величина $[1-(1+i)^{-n}]/i=a(n,i)$ називається *коефіцієнтом зведення ренти.*

Приклад 2.5. Для n=5-річної ренти з річним платежем R=1000 грн., процентною ставкою i=10% знайти нарощену та теперішню величину.

Розв'язок. На кінець першого року вноситься 1000 грн., які на кінець другого зросли до 1100 грн. Разом з внесеними ще 1000 грн. на рахунку вже 2100 грн., які на кінець третього року зросли до 2310 грн.. Поклавши ще 1000 грн. на рахунку вже 3310 грн. і т. д. Нарощена сума P_n=6105,1 грн. Дисконтуючи її на початковий момент часу за процентною ставкою i=10%, знайдемо, теперішню величину ренти: P=6105,1/1,1^5=3791 грн.

2.5. Зведені прості ренти

Виплата у *зведених* рентах відбувається на один період раніше, а саме на початку кожного періоду. Її нарощене значення еквівалентне сумі всіх виплат в кінці останнього періоду, а поточне - на початку першого періоду. Нехай, як і раніше, A – поточна, а S – нарощена сума зведеної ренти, i – процентна ставка за період ренти, R - величина разових виплат. Поряд із зведеною розглянемо звичайну ренту з тією ж самою множиною платежів, що й у зведеної, яка починається на період раніше. Оскільки множини виплат обох рент однакові, то відповідні їм поточні значення еквівалентні. Тоді ми можемо записати $A(1+i)^{-1}=Ra(n,i)$. Звідси теперішня величина зведеної ренти

$$A=(1+i)R\cdot a(n,i)=(1+i)R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{2.9}$$

Нарощені суми розглянутих рент також еквівалентні. Тоді $S=(1+i)Rs(n,i)$.

Приклад 2.6. Знайти теперішню та нарощену величину зведеної ренти, яка складається з чотирьох виплат величиною R=200 грн. кожна, при ставці капіталізації i=8% річних.

Розв'язок. Нарощена величина

$$S=200\,(1{,}08)^3+200\cdot(1{,}08)^2+200\cdot 1{,}08+200=901{,}22 \text{ грн.},$$

а теперішня

$$A=200\cdot(1{,}08)^{-1}+200\cdot(1{,}08)^{-2}+200\cdot(1{,}08)^{-3}+200\cdot(1{,}08)^{-4}=662{,}44 \text{ (грн.)}.$$

2.6. Відкладені прості ренти

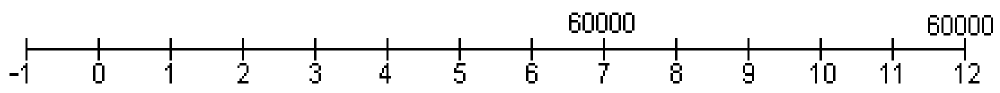
Якщо рента починається не в початковий, а в деякий інший момент у майбутньому, то вона називається *відкладеною рентою*. Час, який минув від теперішнього моменту до початку ренти, називається *періодом відтермінування*.

Так період відтермінування ренти з піврічними виплатами і першою виплатою через 6 років дорівнює 5,5 року.

Для ренти, яка виплачується через *k* років після початкового моменту часу, то її теперішня величина $A=(1+i)^{-k}Ra(n,i)$.

Приклад 2.7. Обчислити теперішню вартість відкладеної ренти з виплатами R=60000 грн. у кінці кожного півріччя, якщо перша виплата здійснюється через n_1=3,5 роки, остання через n_2=6 років. Проценти нараховуються за ставкою i=14% річних.

Розв'язок. Часова схема виплат зображена на рисунку.



Рівняння еквівалентності $A\cdot(1{,}14)^6 = 60000\cdot\dfrac{1-(0{,}14)^{-6}}{0{,}14} = 233322(\text{грн.})$, звідки

$A=(1{,}14)^{-6}\cdot 233322{,}04 = 106297{,}04$ (грн.).

2.7. Загальні ренти

Рента називається *загальною*, якщо період між послідовними виплатами не збігається з періодом нарахувань процентів. Основне завдання теорії *загальних рент* – звести загальну ренту до еквівалентної їй простої ренти.

Нехай W - розмір виплат загальної ренти; m– кількість періодів нарахувань у році; R – величина виплат простої ренти, еквівалентної загальній; p – кількість грошових виплат у рік загальної ренти, j- процентна ставка, яка відповідає періоду нарахувань загальної ренти, а i – процентна ставка за період нарахувань простої ренти.

Проста і загальна ренти вважаються еквівалентними, якщо виконуються такі умови: а) процентні ставки за періоди нарахувань для них є еквівалентними; б) еквівалентні даним рентам значення, які відповідають одному й тому ж моменту часу, є однаковими.

Виходячи з умови а) отримуємо $(1+j)^p = (1+i)^m$, або $j = (1+i)^{m/p} - 1$. Згідно умови б), прирівнявши нарощені суми за рік, матимемо $Rs(m,i)=Ws(p,j)$ або

$$R\frac{(1+i)^m - 1}{i} = W\frac{(1+j)^p - 1}{j} \Rightarrow \frac{R}{i} = \frac{W}{j} \Rightarrow R = W\frac{i}{j} = W\frac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}. \quad (2.10)$$

Приклад 2.8. Замінити звичайну ренту терміном на n=2 роки з виплатами R=200 грн. у кінці кожного півріччя із щоквартальним нарахуванням процентів за ставкою i=20% річних, на просту ренту з щоквартальними виплатами.

Розв'язок. Згідно (2.10) $R = \frac{0.05}{(1.05)^{4/2} - 1} \cdot 200 = 97{,}6$ (грн.).

Для обчислення поточної та нарощеної сум загальної ренти її спочатку перетворюють в еквівалентну просту ренту. Потім знаходять поточне значення нової простої ренти за формулою $A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$. Підставивши в останню формулу $R = W\frac{i}{(1+i)^{m/p} - 1}$, отримаємо, що

$$A = W\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{m/p} - 1}, \quad (2.11)$$

де n – термін ренти в періодах нарахування процентів; p – кількість виплат загальної ренти в рік; i – процентна ставка за період нарахування; m – кількість періодів нарахування в році.

Нарощене значення звичайної ренти

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = W\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{m/p} - 1}. \quad (2.12)$$

Приклад 2.9. Обчислити поточне A та нарощене S значення звичайної ренти з виплатами по W=80 грн. у кінці кожного півріччя при щомісячному нарахуванні процентів за процентною ставкою i=12% річних. Термін ренти 2 роки.

Розв'язок. Поточне значення A і нарощене S обчислюємо за формулами (2.11 і 2.12):

$$A = 80\frac{1-(1+0{,}01)^{-24}}{(1{,}01)^6 - 1} = 276{,}25 \text{ (грн.)}, \quad S = 80\frac{(0{,}01)^{24} - 1}{(1{,}01)^6 - 1} = 350{,}76 \text{ (грн.)}.$$

2.8. Вічні (нескінченні) ренти

Рента називається *нескінченною (вічною)*, якщо грошові виплати не обмежені терміном. Прикладом вічної ренти є послідовність періодичних виплат процентів на інвестований капітал. *Проста нескінченна рента* – це нескінченна послідовність платежів, з нарахуванням процентів в кінці кожного періоду.

Нарощена вартість вічної ренти є нескінченно великою величиною, проте її сучасна вартість вже є скінченною величиною.

Нехай A – поточна вартість звичайної простої нескінченної ренти, а R – вартість виплат за ставкою i, яка відповідає періоду виплат. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}$, то з формули $R=A/a(n,i)$ отримаємо, що $R=Ai \Rightarrow A=R/i$.

Приклад 2.10. Знайти суму грошей, що потрібно для заснування фонду який би забезпечував виплати розміром R=150000 грн. у кінці кожного року, якщо гроші інвестуються за ефективною ставкою – i=4% річних.

Розв'язок. Маємо звичайну нескінченну ренту з виплатами R=150000 грн. та i= 0,04. Тоді A=150000/0,04=3750000 (грн.).

Рента, в якої період виплати не збігається з періодом нарахування процентів, називається *загальною нескінченною рентою*. Величини виплат загальної та простої нескінченної рент зв'язані формулою $R = W \cdot \dfrac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}$.

Поточне значення загальної нескінченної ренти можна обчислити за допомогою перетворення її в просту ренту та використання формули $A = \dfrac{R}{i}$.

Приклад 2.11. Знайти поточну вартість нескінченної ренти з виплатами W=60 тис. грн. у кінці кожного місяця, а ефективна ставка i=5% річних.

Розв'язок. Маємо $R = W\dfrac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1} = 60\dfrac{0{,}05}{(1{,}05)^{\frac{1}{12}} - 1} = 736{,}35$ (тис. грн.),

$A = R / i = 736{,}36 / 0{,}05 = 14727{,}09$ (тис. грн.).

Вічна зведена рента визначається як послідовність періодичних виплат, які здійснюються на початку кожного періоду, і поділяється на: прості, коли період нарахувань процентів збігається з періодом виплат і загальні, коли період нарахувань процентів не збігається з періодом виплат.

Оскільки вічна зведена нескінченна рента відрізняється від звичайної тільки однією виплатою в початковий момент часу, то теперішня вартість $A = R + \frac{R}{i}$. Аналогічно, для нескінченної загальної ренти – $A = W + \frac{R}{i}$. Підставивши в $R = W\frac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}$ в останню формулу, матемимо

$$A = W \cdot (1 + \frac{1}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}) = W \cdot \frac{(1+i)^{\frac{m}{p}}}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1} \Rightarrow A \cdot i = W\frac{i}{1 - (1+i)^{-\frac{m}{p}}} = R.$$

Отримана формула встановлює співвідношення між виплатами двох еквівалентних вічних рент (простої звичайної та загальної зведеної).

Приклад 2.12. Знайти поточне значення зведеної нескінченної ренти з виплатами по W=150 грн. на початку кожного кварталу за ефективною ставкою i=8% річних.

Розв'язок. Величина виплат R еквівалентної простої ренти і поточна вартість A дорівнюють: $R = 150\frac{0{,}08}{1 - (1{,}08)^{-\frac{1}{4}}} = 629{,}7$ (грн.). $A = \frac{629{,}71}{0{,}08} = 7871{,}39$ (грн.).

2.9. Зростаючі ренти

Якщо періодичні виплати ренти утворюють зростаючу арифметичну прогресію, то така рента називається *зростаючою*. Послідовність виплат зростаючої ренти терміном *n* років має вигляд: *a ; a + b; a + 2b; ….. ,a + (n-1)b.*

Найпростішим прикладом є ренти з одиничною першою виплатою, та кожною наступною, на одиницю більшою за попередню. Поточне значення такої ренти $A(1)=\frac{1}{i}\left[\frac{1-\nu^n}{1-\nu} - n\nu^n\right], \nu = \frac{1}{1+i}.$

Приклад 2.13. Знайти поточне значення зростаючої ренти з першою виплатою R=15 грн., та кожною наступною на Δ=15 грн. більшою за попередню. Проценти нараховуються за ставкою i=4% на місяць, термін ренти n=9 місяців.

Розв'язок. Нехай A – поточне значення ренти. Тоді

$$A = 15A(1) = \frac{15}{0{,}04}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^9}{1-\left(\frac{1}{1{,}04}\right)} - 9\cdot\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^9\right] = 528{,}95 \text{ (грн.)}.$$

Зростаюча рента, в якої платежі починаються з нульового моменту часу, називається *зведеною зростаючою рентою*. Її поточне значення позначимо через $\overline{A}(1)$. Тоді $\overline{A}(1)=(1+i)A(1)$.

Для нарощених значень зростаючих рент, що відносяться до моменту n, виконується $S(1) = (1+i)^n A(1)$, $\overline{S}(1) = (1+i)^n \overline{A}(1)$. Крім того, $\overline{S}(1) = (1+i)^n S(1)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Нехай задано потік а) R={(-1000;1), (500;2), (1000;3)}; б) R{(-1500;1), (-500;2), (1000;3)}. Знайти поточну $R(0)$ та нарощену $R(T)$ величину потоку за процентною ставкою а) i=15%; б) i=20%.

2. Знайти майбутню величину елементарного потоку, якщо сума а) $R(0)$=20000 грн.; б) $R(0)$= 30000 грн. покладена в банк на депозит терміном а)T=3; б) T=5 років за процентною ставкою а) i=20%; б) i=22% річних, проценти нараховуються раз в рік.

3. За умовами прикладу 2 знайти майбутню величину елементарного потоку і річну ефективну ставку, якщо проценти нараховуються щоквартально?

4. За умовами прикладу 2 знайти нарощену величину елементарного потоку за ставкою податку на проценти а) j=9%; б) j=11% при нарахуванні простих і складних процентів.

5. Нехай перший кредит а) R_1=50000 грн.; б) R_1=60000 грн. виданий на а) T=5; б) T=7 місяців під а) i=22% ; б) i=24% річних, а другий величиною а)R_2=30000 грн.; б) R_2=40000 грн. виданий на а) T=2; б) T=3 місяці під а) i=25%; б) i=26% річних. Знайти середню просту процентну ставку?

6. Нехай кредит в обсязі а) R=30000 грн.; б) R=40000 грн. виданий на а) T=5; б) T=7 років на таких умовах: а) перші t_1=2 під i_1=5%, потім t_2=2 роки під i_2=7%, t_3=1 рік під i_3=8%; б) перші t_1=3 роки під i_1=5%, потім t_2=2 роки під i_2=7%, t_3=2 роки під i_3=8%. Обчислити середню складну процентну ставку та суму боргу, яку потрібно погасити.

7. Розрахувати дюрації потоків платежів зі сторони інвестора та дебітора для простої процентної ставки а) i=24%; б) i=26%, а k=360 днів:

а)

t_k	36	66	96	126	116	206	318	371	736	66
R_k	-130	-95	-108	-105	-85	90	60	130	150	60

б)

t_k	24	54	84	114	104	194	306	379	724	50
R_k	-110	-75	-88	-85	-65	70	40	110	130	40

8. Кредит отримано на суму а) D_1=700 дол.; б) D_1=600 дол. під а) i=11%; б) i=12% річних простих. Його потрібно погасити двома платежами: перший а) $R_1(t_1)$=400 дол.; б) $R_1(t_1)$=200 дол. з процентами через а) t_1=70; б) t_1=80 днів, другий – а) $R_2(t_2)$=300 дол.; б) $R_2(t_2)$=400 дол. з процентами через а) t_2=110; б) t_2=130 днів. Знайти розмір консолідованого платежу $R_{конс}$ з терміном погашення а) t=140; б) t=160 днів.

9. Консолідувати два платежі а) $R_1(t_1)$=15000 і $R_2(t_2)$=8000 грн.; б) $R_1(t_1)$=13000 і $R_2(t_2)$=7000 грн. з термінами виплати а) t_1=130 і t_2=150 днів; б) t_1=140 і t_2=160 днів у один із термінами виплати а) t=180; б) t=210 днів за простою ставкою а) i=18%; б) i=19% річних. Знайти величину різниці при консолідації за банківською та обліковою простими ставками.

10. Суми а) $R_1(t_1)$=5000, $R_2(t_2)$=10000 і $R_3(t_3)$=15000 грн.; б) $R_1(t_1)$=10000, $R_2(t_2)$=15000 і $R_3(t_3)$=20000 грн. слід виплатити через а) t_1=20, t_2=30, t_3=70 днів; б) t_1=40, t_2=50 і t_3=80 днів. Їх замінюють одним платежем у розмірі а) $R_{конс}$=50000; б) $R_{конс}$=60000 грн. з відтермінуванням боргу. Який середній період відтермінування, якщо банківська ставка а) i=12%; б) i=13%?

11. Для а) T=3 річної; б) T=4 річної ренти з річним платежем а) R=1500 грн.; б) R=2000 грн., процентна ставка: а) i=8%; б) i=9% знайти нарощену $R(T)$ та теперішню суму $R(0)$ ренти.

12. Знайти теперішню величину зведеної ренти з виплатами а) R=100 грн.; б)R=200 грн. на початок кожного півріччя при нарахуванні процентів за ставкою а) i=8%; б) i=9%.Термін ренти: а) T=3; б) T=5 років.

13. Обчислити нарощену величину $R(T)$ зведеної ренти, яка містить а) n=4; б) n=6 виплат розміром а) R=150 грн.; б) R=200 грн. кожна при нарахуванні процентів за ставкою а) i=7%; б) i=8% річних.

14. Обчислити теперішню вартість відкладеної ренти з виплатами а) R=4000 грн., б) R=5000 грн., у кінці кожного півроку, якщо а) перша виплата здійснюється через t_1=3 роки, а остання через t_2=5 років; б) перша – через t_1=4 роки, а остання через t_2=6 років, а процентна ставка а) i=10%; б) i=12% річних.

15. Замінити звичайну ренту терміном на: а) T=3; б) T=4 роки з виплатами по а) R=150 грн.; б) R=250 грн. у кінці кожного півріччя і щоквартальним нарахуванням процентів за ставкою а) i=16%; б) i=24% річних на просту ренту з щоквартальними виплатами.

16. Обчислити поточне $R(0)$ та нарощене $R(T)$ значення звичайної ренти з щопіврічними виплатами розміром а) R=60 грн.; б) R=70 грн. кожна при нарахуванні процентів кожних а) T=3; б) T=4 місяці за процентною ставкою а) i=19%; б) i=18% річних. Термін ренти T=3 роки.

17. Кредит розміром а) D=1000 грн.; б) D=2000 грн. видано під а) i=20%; б) i=22% річних при нарахуванні процентів що півроку. Обчислити величину платежів, що погашаються кожних чотири місяці, щоб борг погасився через а)T=3; б) T=2 роки і чотири місяці.

18. Знайти теперішню $R(0)$ та нарощену суму $R(T)$ звичайної ренти, яка складається з: а) n=3; б) n=5 виплат розміром а) R=150 грн.; б) R=250 грн. кожна, при ставці капіталізації а) i=9%; б) i=10% річних.

19. Знайти суму грошей для заснування фонду допомоги розвитку малого бізнесу, який би забезпечував: а) D=100000 грн.; б) D=210000 грн. у кінці кожного року, якщо їх можна інвестувати за ставкою а) i=5%; б) i=6% річних.

20. Знайти поточну суму грошей $R(0)$ нескінченної ренти з виплатами розміром а) R=40000 грн.; б) R=50000 грн. у кінці кожного місяця при ефективній ставці на інвестиції: а) $i_{еф}$=4%; б) $i_{еф}$=5% річних.

21. Знайти поточне значення $R(0)$ зведеної нескінченної ренти з виплатами розміром а) R=100 грн; б) R=200 грн. на початку кожного кварталу та ефективною ставкою а) $i_{еф}$=5%; б) $i_{еф}$=6% річних.

22.Знайти поточне значення $R(0)$ зростаючої ренти з першою виплатою розміром а) R_1=10 грн.; б) R_1=20 грн. та кожною наступною на а) Δ=10 грн.; б)Δ=20 грн. більшою за попередню. Проценти нараховуються за ставкою а) i=3%; б) i=5% на місяць, а термін ренти а) T=6; б) T=12 місяців.

Наведемо примірний варіант підсумкової контрольної роботи, яку доцільно провести після вивчення матеріалу розділу 2.

1. Знайти майбутню величину $R(T)$ елементарного потоку, якщо сума $R(0)$=5000 грн., покладена в банк на депозит терміном T=4 роки за процентною ставкою i=24% річних.

2. Для T=5-річної ренти з річним платежем R=1000 грн. при процентній ставці i=10% знайти нарощену $R(T)$ та теперішню суму $R(0)$ ренти.

3. Обчислити нарощену суму $R(T)$ зведеної ренти, яка містить n=6 виплат розміром R=100 грн. кожна при нарахуванні процентів за ставкою i=9% річних.

4. Знайти суму грошей для заснування фонду, який би забезпечував D=5000 грн. у кінці кожного року, якщо гроші інвестуються за ставкою i=10% річних.

5. Знайти теперішню величину $R(0)$ зведеної нескінченної ренти з виплатами розміром R=300 грн. на початку кожного кварталу та ефективною ставкою i=12% річних.

РОЗДІЛ 3. МАТЕМАТИЧНИЙ ІНСТРУМЕНТАРІЙ УПРАВЛІННЯ ПОЗИЧЕНИМ КАПІТАЛОМ

3.1. Основні методи погашення кредиту

При погашенні кредиту використовується принцип, у відповідності з яким чергова виплата за кредитом поділяється на дві основні частини: *погашення деякої частки кредиту* та *проценти за ним*.

Розглянемо найпростіші та найбільш вживані способи погашення кредиту.

Погашення кредиту одним платежем в кінці. Нехай кредит в обсязі D виданий на n років під i складних річних процентів. Сума погашення на кінець n-го року дорівнюватиме $D(1+i)^n$.

Для суми D=10000 грн., виданої в кредит під i=20% річних терміном на n=4 роки, величина разового платежу $R=10000\ (1+0{,}2)^4=20736$ (грн.).

Погашення основного боргу одним платежем в кінці. Нехай кредит величиною D виданий на n років під i складних річних процентів. За 1-ий і наступні роки процентні гроші дорівнюють iD. Якщо їх виплачувати в кінці кожного року, то на кінець n-го виплати складуть величину $D+iD$.

Для суми D=10000 грн. впродовж перших трьох років виплачується сума $R=10000\cdot 0{,}2=2000$(грн.), а на кінець четвертого - $R=10000+2000=12000$ (грн.).

Погашення основного боргу рівними річними виплатами. Нехай кредит величиною D виданий на n років під i складних річних процентів. В кінці кожного року виплачується n-та частка основного боргу $\frac{D}{n}$. В кінці 1-го року сплачуються проценти з суми $D – iD$, а весь платіж - $R_1 = \frac{D}{n} + iD$, а в кінці 2-го року – $R_2 = \frac{D}{n} + i\left(D - \frac{D}{n}\right)$ і т.д., в кінці n-го року $R_n = \frac{D}{n} + \frac{iD}{n}$. Платежі $R_1, R_2, \ldots$ утворюють спадну арифметичну прогресію, сума якої $S=D(1+i\frac{n+1}{2})$, а $I = Di\frac{n+1}{2}$ - сума виплачених процентів

Для суми D=10000 грн. в кінці першого року виплачуватиметься сума $R_1=\frac{10000}{4}+0{,}2\cdot 10000=4500$ (грн.), другого - R_2=2500+0,2·(10000-2500)=4000 (грн.), третього - R_3=3500 (грн.), четвертого - R_4=3000 (грн.).

Погашення кредиту рівними річними виплатами. Нехай кредит величиною D виданий на n років під i складних річних процентів. Виплати розглядають як річну ренту тривалістю n років і річним платежем R. Прирівнявши її поточну величину величині кредиту: $D=R\cdot\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, отримаємо $R=\frac{iD}{1-\left(1+i\right)^{-n}}$.

Для суми D=10000 величина платежу $R=\frac{0{,}2\cdot 10000}{1-(1+0{,}2)^{-4}}=3862{,}89$ (грн.).

Погашення кредиту рівними виплатами декілька разів в рік. На виплати розміром R, які проводяться m разів в рік (їх кількість nm), нараховуються проценти m разів в рік за ставкою $j=\frac{i}{m}$. Вони утворюють ренту, нарощена величина якої $S=R\frac{(1+j)^{nm}-1}{j}$. Нарощена величина кредиту $S=D\left(1+j\right)^{nm}$. Тоді $R\cdot\frac{\left(1+j\right)^{nm}-1}{j}=D\left(1+j\right)^{nm}$, звідки $R=\frac{D(1+j)^{nm}\cdot j}{(1-j)^{nm}-1}=\frac{jD}{1-(1+j)^{-nm}}=\frac{D}{a(nm;j)}$.

Для суми D=10000 грн. величина разового платежу (виплати здійснюються два рази в рік) $R=\frac{0{,}1\cdot 10000}{1-(1+0{,}1)^{-4\cdot 2}}=1874{,}43$ (грн.).

Загальний метод погашення кредиту. Нехай кредит величиною D виданий на n років під i складних річних процентів. Погашувальні платежі – це сума платежів, які йдуть на виплату кредиту, і платежів, що йдуть на виплату процентних грошей, нарахованих на залишок кредиту після попереднього платежу.

Нехай при видачі кредиту у розмірі D на n років отримані комісійні в розмірі gD ($0<g<1$). На фактичну величину кредиту (1-g)D нараховуються прості проценти за ставкою i. При визначенні дохідності у виді простої ставки i_{en} враховують те, що нарощенна виличина $D(1\text{-}g)$ $(1+ni_{en})$, повинна дорівнювати $D(1+ni)$. Тоді $D(1+ni)=D(1\text{-}g)(1+ni_{en})$, звідки $i_{cn}=\frac{1}{n}\left(\frac{1+ni}{(1-g)}-1\right)$.

При визначенні дохідності у виді ставки складних процентів (часова база дорівнює 365 днів): $D(1+ni)= D(1\text{-}g)\ (1+i_{cc})^n$, звідки $i_{cc}=\sqrt[n]{\frac{1+ni}{1-g}}-1$.

Приклад 3.1. При видачі кредиту на 180 днів отримані комісійні в розмірі 0,5% його суми, і нараховуються проценти за ставкою i=8%. Знайти ефективність операції у виді простої та складної річної ставки.

Розв'язок. Нехай n=180/365, g=0,5/100. Тоді

$$i_{cn}=\frac{365}{180}\left(\frac{1+\frac{180}{365}\cdot 0{,}08}{1-0{,}005}-1\right)=0{,}091; \qquad i_{cc}=\sqrt[\frac{180}{365}]{\frac{1+\frac{180}{365}\cdot 0{,}08}{1-\frac{0{,}5}{100}}}-1=0{,}0927.$$

Отже $i_{ñï}$ = 9,1%, а i_{cc} = 9,27%.

Якщо кредит видається під складні проценти, то рівняння еквівалентності за ставкою складних процентів $D(1+i)^n= D(1\text{-}g)\ (1+ i_{cc})^n$, звідки $i_{cc}=\frac{1+i}{\sqrt[n]{1-g}}-1$.

Кредит виданий на n=2 роки під i=20% складних річних і отримані комісійні в розмірі g=0,8% . Тоді ефективність операції за складною ставкою

$$i_{cc}=\frac{1+0{,}2}{\sqrt{1-0{,}002}}-1=0{,}2048, \text{ або } 20{,}48\%$$

Якщо при нарахуванні процентів враховують темп інфляції t, а реальна дохідність визначається простою ставкою i, то для величини кредиту D погашувальна сума $S_t=D(1+ni)(1+t)$. З іншої сторони, $S_t=D(1+ni_t)$, де i_t – проста ставка за термін кредиту при темпі інфляції t. Тоді з рівняння еквівалентності $D(1+ni)(1+t)=D(1+ni_t)$ випливає, що $i_t=\frac{ni+t+nit}{n}=\frac{(1+ni)I-1}{n}$, де I=1+t – індекс інфляції за термін кредиту.

Реальну ефективність операції i=20% за термін n=2 роки при рівні інфляції t=9% забезпечує проста ставка $i_t = \dfrac{2 \cdot 0{,}2 + 0{,}09 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}09}{2} = 0{,}263$, або 26,3%.

При річному темпі інфляції t, реальній ефективності операції i, для довготермінових кредитів складна ставка процентів $i_t = (1+i)\sqrt[n]{I} - 1$.

Реальну ефективність операції i=20% за термін n=2 роки при рівні інфляції t=9% забезпечує складна ставка i_t=(1+0,2) $\sqrt{1+0{,}09} - 1$=0,2528, або 25,2%.

3.2. Формування фонду погашення

Для повернення в кінці терміну боргу у вигляді разової виплати створюється фонд погашення, що формується з послідовних внесків, на які нараховуються відсотки, що разом із внесками повинні дорівнювати сумі боргу на час його виплати.

Коли передбачається періодична виплата відсотків, витрати позичальника γ складатимуться з виплат у фонд погашення R і відсотків, що нараховуються на борг D за ставкою i, тобто $\gamma = iD + R$. Якщо накопичення здійснюється впродовж n років шляхом щорічних внесків, на які нараховуються складні відсотки за ставкою q, то на кінець n-ого року накопичиться сума $S = \dfrac{R\left[(1+q)^n - 1\right]}{q}$, яка дорівнюватиме D, а щорічні витрати позичальника $\gamma = D\left(i + \dfrac{q}{(1+q)^n - 1}\right)$, де i визначає швидкість росту суми фонду, а q - суму виплачуваних відсотків. Створення фонду вигідне позичальнику, коли q більше i. Якщо q менше i, то краще виплачувати основну суму боргу частинами. Якщо відсотки приєднуються до основного боргу D, то $\gamma = D \cdot \dfrac{(1+i)^n q}{(1+q)^n - 1}$.

Приклад 3.2. Суму D=750 гривень надано в кредит на n=5 років за ставкою i=8% річних, причому проценти повинні виплачуватись в кінці кожного півріччя. Обчислити необхідну величину виплат у фонд погашення, якщо проценти нараховуються за ставкою q=10% річних. Знайти суму фонду до кінця другого року, повні витрати позичальника у випадках, коли проценти періодично виплачуються кредитору та коли приєднуються до основного боргу.

Розв'язок. Проценти на виплату фонду нараховуються за процентною ставкою q=10% річних і для того, щоб на кінець п'ятого року фонд містив 750 гривень, потрібно, щоб розмір виплат $R = 750\frac{0{,}05}{(1{,}05)^{10} - 1} = 59{,}62$ (грн.). Проценти на борг в кінці кожного півріччя становлять 4% від 750 грн., тобто 30 грн. Повний видаток за півріччя дорівнює 59,62+30=89,62 (грн). На кінець другого року $S_2 = 59{,}62\frac{(1{,}05)^4 - 1}{0{,}05} = 329{,}1$ (грн.).

Коли відсотки періодично виплачуються кредитору, то повні витрати позичальника $\gamma = 750\left(0{,}08 + \frac{0{,}1}{(1+0{,}1)^5 - 1}\right) = 182{,}85$ (грн.), а якщо приєднуються до основного боргу, то $\gamma = \frac{750(1+0{,}08)^5 \cdot 0{,}1}{(1+0{,}1)^5 - 1} = 180{,}5$ (грн.).

3.4. Розрахунок процентних платежів

Поділимо в формулі $I = \frac{Pdi}{k}$ чисельник і знаменник дробу на i: $I = \frac{Pd}{k/i} = \frac{Pd}{D'}$. Добуток Pd називається *процентним числом,* а $D' = k/i$ - *процентним ключем* або *дивізором*. Очевидно, що при однаковій процентній ставці i, але при різних (k=360, k=365), буде різним дивізор. Дивізор k/i чисельно дорівнює такій кількості грошових одиниць, з яких при процентній ставці i отримується одна одиниця доходу в день. Це можна пояснити так: i грошових одиниць отримується з одної грошової одиниці за k днів. Тому одна грошова одиниця за той же час отримується з капіталу $1/i$, а щоб мати 1 грошову одиницю доходу кожен день, необхідно взяти в k разів більше, тобто k/i.

Приклад 3.3. Обчислити величину процентних грошей з суми P=2400 грн., яку надають в борг під i=20% річних на термін з 5.03 по 25.09 того ж року, k=365.

Розв'язок. Число днів d=200, P=2400 грн., k=365. Тоді $D' = 365/0{,}2 = 1825$ і $I = Pd/D' = 2400 \cdot 200/1825 = 263$ (грн.).

Якщо ставка i виражається в процентах, то, очевидно, дивізор $D' = 100k/i$.

При обчисленні процентного платежу не завжди відома величина капіталу P, але відома величина, збільшеного - ($P+I$), або зменшеного – (P-I) на I.

Нехай відома величина F=P+I, річна ставка i (у вигляді десяткового дробу) і тривалість l (виражена в роках) фінансової операції. Тоді $i_l = li$ - процентна ставка за час l, а процентний платіж $I = \dfrac{Fi_l}{1+i_l} = \dfrac{Fli}{1+li}$.

Якщо відома величина K=P–I, то процентний платіж $I = \dfrac{Ki_l}{1+i_l} = \dfrac{Kli}{1+li}$.

Приклад 3.4. Знайти величину доходу кредитора, якщо за надання в борг деякої суми на півроку він отримав від дебітора F=6300 грн. При цьому застосовувалась проста процентна ставка i=10% річних.

Розв'язок. Оскільки F=6300 грн., l=0,5 року, i=0,1, то

$$I = \frac{Fli}{1+li} = \frac{6300 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1}{1+0{,}5 \cdot 0{,}1} = 300 \text{ (грн.)}.$$

У випадку, коли термін фінансової операції виражений в днях і позначений через ∂, то процентні платежі виражаються формулами

$$I = \frac{F\frac{\partial}{k}i}{1+\frac{\partial}{k}i} = \frac{F\partial}{D'+\partial}, \quad I = \frac{K\frac{\partial}{k}i}{1+\frac{\partial}{k}i} = \frac{K\partial}{D'+\partial}.$$

Приклад 3.5. Банк надав кредит в сумі K=10000 грн. 6 липня. Знайти суму, яку потрібно повернути 14 вересня цього ж року, а нараховані за ставкою i=12% річних проценти були утримані у момент надання кредиту, k=360.

Розв'язок. Оскільки, ∂=70 днів, k=360 днів, i=0,12, D'=360/0,12=3000, K=10000 грн., то $I = \dfrac{10000 \cdot 70}{3000-70} = 239$ (грн.). Таким чином, потрібно повернути борг в сумі P=K+I=10000+239=10239 (грн.).

В банках при обслуговуванні поточних рахунків використовують величини $P\partial/100$. В цьому випадку формула для обчислення дивізора залишається тією ж $D' = k / i$, але процентна ставка *i* в них виражена у процентах.

Зазвичай сума на рахунку змінюється в результаті надходжень, або зняття грошових сум. Для того, щоб знайти загальну величину нарахованих процентів за деякий термін, спочатку визначають процентні числа за кожний термін часу, коли сума на рахунку не змінювалась. Потім всі процентні числа додаються і отримане значення ділиться на D'.

Приклад 3.6. На рахунок 15.02 покладена сума 5000 грн., 10.04 на нього надійшло 3000 грн., 20.05 з рахунку зняли 2000 грн., 1.09 поклали 1000 грн., а 4.12 рахунок закрили. Операції здійснюються у невисокосному році. Знайти отриману суму, якщо процентна ставка i=12% річних і k=360.

Розв'язок. Визначаємо суми, які послідовно фіксувалися на рахунку: 5000 грн.; 5000+3000=8000 грн.; 8000-2000=6000 грн.; 6000+1000=7000 грн. Потім знаходимо терміни зберігання цих сум: 54, 40, 104, 94 дні. Сума процентних чисел складе $1000 \cdot \dfrac{5 \cdot 54 + 8 \cdot 40 + 6 \cdot 104 + 7 \cdot 94}{100} = 18720$. Дивізор в даному випадку D'=360/12=30, загальна величина нарахованих процентів – 18720/30=624 (грн.), а власник рахунку отримає 7000+624=7624 (грн.).

3.5. Споживчі кредити

В економічно розвинутих країнах більшість покупців не завжди можуть розрахуватися за товари безпосередньо після їх поставки, а відкладають оплату на певний період, впродовж якого продавець надає покупцю кредит, який в літературі називають *споживчим кредитом.*

Один із способів погашення споживчого кредиту передбачає *нарахування відсотків на всю суму кредиту та приєднання їх до основного боргу в момент його відкриття,* а погашення боргу з процентами відбувається рівними частинами впродовж всього терміну. Якщо розмір кредиту P, процента ставка i, термін n, то нарощена сума боргу $F=P(1+ni)$, а величина разового погашувального платежу - $R=F/nm$.

При рівномірній виплаті процентів дійсна вартість кредиту визначається реальною річною ставкою j_k, проценти за якою нараховуються順 наневиплачений залишок кредиту: $j_k=2mI/P(n+1)$, де m – число виплат у році, I – сума процентів на кінець терміну, n-загальна кількість виплат, P –основна сума кредиту.

Приклад 3.7. Товар ціною P=3000 грн. продається в кредит на n=2 роки під i=12% річних простих з щоквартальними рівними платежами. Знайти борг з процентами, процентні гроші і величину разового погашувального платежу.

Розв`язок: Оскільки P=3000, n=2, i=12%, то за формулою $F=P(1+ni)$ матимемо F=3000(1+2·0,12)=3720 (грн), I=3720-3000=720 (грн.). Враховуючи, що m=4 , то отримаємо R=3720/2·4=465 (грн.).

Якщо частина P_1 боргу P сплачується при оформленні кредиту, на його залишок нараховуються прості проценти, борг погашається рівномірно, то величина разового платежу $R=\dfrac{(P-P_1)(1+in)}{nm}$.

Зокрема, якщо за умовами прикладу 3.7 при оформленні сплачено 1000 грн., то величина разового платежу $R=\dfrac{(3000-1000)(1+2\cdot 0{,}12)}{2\cdot 4}=310$(грн.).

При погашенні споживчого кредиту рівними платежами слід визначити частку корисної виплати, що йде на погашення нарахованих процентів. Для складання плану користуються “правилом 78”, яке полягає в тому, що спочатку знаходимо суму порядкових номерів всіх платежів, наприклад, для дванадцяти платежів 1+2+3+...+11+12=78. Згідно “правила 78” частина першого погашувального платежу піде на виплату 12/78 від загальної нарахованої величини процентів (тобто(12/78)I), а решта R-12I/78 піде в рахунок виплати основного боргу.

Для другого платежу потрібно взяти дріб 11/78, третього 10/78 і т.д. Якщо в загальному випадку буде k запланованих платежів, то $N=1+2+\ldots+k=((1+k)/2)k$ і при використанні “правила 78” необхідно послідовно брати дроби $\frac{k}{N}$, $\frac{k-1}{N}$, ..., $\frac{1}{N}$. Очевидно, що $\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{N}=1$.

Для прикладу 3.7 план погашення такий: оскільки заплановано nm=2·4=8 платежів, то k=((1+8)/2)·8=36, а з першого в рахунок процентів піде 720 ·8/36=160 (грн.). Відповідно частина основного боргу 465-160=305 (грн.), а його залишок на початку наступного кварталу 3000-305=2695 (грн.). В другому кварталі в рахунок виплати процентів піде 720·7/36=140 (грн.), частина основного боргу 465-140=325 (грн.), а залишок - 2695-325=2370 (грн.) і т.д.

Нехай в прикладі 3.7 прийняте рішення повернути кредит після трьох погашувальних платежів. Оскільки залишилося п`ять платежів, то сума їх нових порядкових номерів: 1+2+3+4+5=15 і не доведеться виплачувати: 720·15/36=300 (грн.).

Якщо заплановано k платежів, а після m-ого прийнято рішення повернути кредит, то не виплачуватиметься сума MI/K, де M=1+2+…+K– m.

Нехай погашувальні платежі вносяться кожні l місяців, або 12/l разів в році і слід внести k=(12/l)·n платежів. Тоді за перші l місяців нараховуються проценти в розмірі $I_1=(P\cdot l\cdot I/12)=Pni/k$. За наступні l місяців - проценти на залишок боргу: $I_2 = \left(P - \frac{P}{k}\right)\cdot\frac{li}{12} = i_1\frac{k-1}{k}$. Аналогічно: $I_3 = I_1\frac{k-2}{k}$, … $, I_s = I_1\frac{k-s+1}{k}$, $I_k = I_1/k$, а загальна величина процентних виплат

$$I = \sum_{s=1}^{k} I_s = I_1\left(1 + \frac{k-1}{k} + \frac{k-2}{k} + ... + \frac{1}{k}\right) = I_1\frac{k+1}{2} = \frac{Pni}{2k}(k+1).$$

Якщо платежі вносяться кожні 3 місяці (12/3=4 рази в рік), то за n=5 років буде внесено k=4·5=20 платежів. Тоді для кредиту D=10000 грн., виданого під i=10% річних, величина процентних виплат $I = \frac{10000\cdot 5\cdot 0{,}1}{40}\cdot(20+1) = 2625$ (грн.).

Вираз $\frac{ni}{2k}(k+1)$ називається *процентним коефіцієнтом* і відображає співвідношення величини процентного платежу і кредиту.

3.6. *Пільгові кредити*

Нехай кредит розміром D, виданий на n років за пільговою ставкою $g< i$, погашається рівними виплатами, які утворюють річну ренту. Якщо розмір однієї виплати y, то теперішня величина ренти: $D=ya(n,g)=y\left[1-(1+g)^{-n}\right]/g$. Звідси $y=Dg/\left[1-(1+g)^{-n}\right]$.

Розмір виплати за звичайною ставкою i: $z=Di/\left[1-(1+i)^{-n}\right]$, щорічні втрати кредитора $z–y=\dfrac{Di}{1-(1+i)^{-n}}-\dfrac{Dg}{1-(1+g)^{-n}}$, за ставкою i їх сучасна величина $(z\text{-}y)a(n,i)= a(n,i)\ [D/a(n,i)\text{-}D/a(n,g)]=D[1\text{-}a(n,i)/a(n,g)]=D[1-\dfrac{g}{i}\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+g)^{-n}}]$

Грант-елемент – це умовні втрати кредитора, які дорівнюють різниці між вартістю заданої суми боргу та теперішньою вартістю погашених сум і процентів. Його обчислюють у вигляді *абсолютної та відносної величини.* Для їх оцінки проводять дисконтування суми боргу за пільговою ставкою g та звичайною i.

Субсидія кредитора позичальнику $(z–y)a(n,i)=W$ називається *абсолютним грант-елементом*, а величина $w=1-\dfrac{a(n,i)}{a(n,g)}$ *відносним грант-елементом.*

Приклад 3.8. Надано пільговий кредит D=16 млн. грн. на n=6 років під g=12% річних, а звичайна ставка i=24%. Знайти абсолютну та відносну величини грант-елемента, якщо кредит погашається рівними виплатами.

Розв'язок. Коефіцієнти теперішньої вартості $a(12\%,6)=\dfrac{1-(1{,}12)^{-6}}{0{,}12}$=4,1114; $a(24\%,6)$=3,02. Тоді $w=1\text{-}\dfrac{3{,}02}{4{,}1114}$=0,2655 або w=26,55%, а

$$W=D\cdot w=16000000\cdot 0{,}2655=4247312{,}35 \text{ (грн.)}.$$

Отже, втрати кредитора – 4247312,35 (грн.), що становить 26,55% кредиту.

При видачі пільгового кредиту передбачається існування пільгового періоду L, при цьому проценти можуть або виплачуватись у пільговому періоді, або приєднуватись до основної суми, що буде погашатись впродовж (n-L) років.

Коли проценти сплачуються в пільговому періоді, то відносний грант-елемент: $w=1-\left(\dfrac{a(i;n-L)}{a(g;n-L)}\cdot(1+i)^{-L}+g\cdot a(i;L)\right)$, а коли додаються до основної суми, то: $w=1-\dfrac{a(i;n-L)}{a(g;n-L)}\cdot\left(\dfrac{1+g}{1+i}\right)^{L}$.

За умовами прикладу 3.8 при відтермінуванні на два роки та сплатою процентів: $w=1-(\dfrac{a(24\%,4)}{a(12\%,4)}\cdot(1+0{,}24)^{-2}+0{,}12\cdot1{,}457)=0{,}3107$, або $w=31{,}07\%$.

Якщо ж проценти додаються, то

$$\omega=1-\frac{a(24\div4)}{a(12\div4)}\cdot\left(\frac{1+0{,}12}{1+0{,}24}\right)^{2}=1-\frac{2{,}404}{3{,}073}\cdot(0{,}9032)^{2}=0{,}3543,\text{ або }\omega=35{,}43\%.$$

Окремим видом пільгового кредиту є *позика*, яка не передбачає процентних сплат і призводить до ще більших втрат кредитора, розмір яких можна визначити, припустивши, що вона розміщена під проценти за ставкою i. Якщо не передбачається пільгового періоду, то $w=1-\dfrac{a(i,n)}{n}$, а якщо передбачається, то відносні втрати кредитора становлять $w=1-\dfrac{a(i,n-L)}{n}\cdot(1+i)^{L}$.

Так для позики на $n=3$ роки за ринковою ставкою $i=20\%$, $w=1-\dfrac{a(20\%,3)}{3}=0{,}2978$, або $w=29{,}78\%$.

Наприклад, якщо позику надано на 3 роки з пільговим періодом 1 рік, то для $i=20\%$, $w=1-\dfrac{a(20\%,2)}{3}\cdot1{,}2=0{,}5889$, або $w=58{,}89\%$.

3.7. Ломбардний кредит

Ломбардний кредит - це кредит на короткий термін під заставу цінних паперів, товарів та іншого майна. За договором воно передається кредитору, хоча позичальник залишається його власником. Якщо кредит не буде погашений, то право власності переходить до кредитора, який його реалізовуватиме, для повернення боргу разом з нарахованими процентами.

Приклад 3.9. Клієнт хоче отримати 12.04 під заставу m=300 цінних паперів вартістю P=100 грн. кожного на цей день. Банк надає кредит під i=10% річних на n=3 місяці в розмірі θ=80% вартості цінних паперів, а його витрати на обслуговування складають j=1% від номінальної суми і утримуються разом з процентами в момент надання. У випадку протермінування розрахунок введеться за кожний протермінований день за ставкою q=12% річних. Знайти величину кредиту, і витрати клієнта за умови, що він розрахувався 1.08.

Розв'язок. Вартість цінних паперів: mP=100·300=30000 (грн.), а номінальна величина кредиту $mP\theta$=30000·0,8=240000 (грн.). Оскільки $\partial = 91$ день, то процентний платіж $I = 24000 \cdot 0{,}1 \cdot \dfrac{91}{360} = 607$(грн.), а витрати на обслуговування, які утримуються наперед - $24000 \cdot 0{,}01 = 240$(грн.), а тому розмір отримуваного кредиту - $24000 - 607 - 240 = 23153$ (грн.).

Нехай борг повернуто 1 серпня. Тоді проценти за 20 протермінованих днів - $24000 \cdot 0{,}12 \cdot \dfrac{20}{360} = 160$ (грн.).

Отже, без врахування витрат на обслуговування боргу, які були утримані на початку операції, потрібно віддати $2400 + 160 = 24160$ (грн.), звідки видно, що фактична величина кредиту є меншою, ніж номінальна.

Приклад 3.10. Підприємцю необхідна сума P=40000 грн. на n=3 місяці, яку надано 15.05 в розмірі 75% вартості застави під i=12% річних, а за обслуговування утримано 400 грн. Знайти величину застави.

Розв'язок. Номінальна величина кредиту за вираховуванням процентів і плати за обслуговування 40000 грн. Відповідно, $K = 40000 + 400 = 40400$ (грн.), кредит видається на 92 дні, а величина процентного платежу

$I = \frac{K\partial}{D' - \partial} = \frac{40400 \cdot 92}{(360/0{,}12) - 92} = 1278$ (грн.). Відповідно $P = 40400 + 1278 = 41678$ (грн.), а вартість застави $\frac{P}{0{,}75} = 55571$ (грн.).

3.8. Іпотечні позики

В позиці під заставу нерухомості (*іпотеки)* власник майна отримує позику в того, кому віддав його під заставу, і передає йому право на першочергове задоволення своєї вимоги з вартості заставного майна у випадку відмови від погашення або неповного погашення заборгованості.

Найбільш розповсюдженою є *іпотечна позика*, умови якої допускають рівні внески боржника, а також встановлюється місячна процентна ставка.

В здійсненні іпотеки при купівлі об'єкту застави беруть участь три агенти: продавець, покупець (боржник), кредитор.

Наприклад, продавець отримує від покупця за деяке майно повну вартість – 120000 грн., а покупець бере позику під його заставу – 100000 грн. і додає власні засоби – 20000 грн. Потрібно визначити розмір щомісячних платежів R і заборгованість на момент чергового погашення до повної оплати боргу.

Оскільки платежі є постійною рентою постнумерандо, то, прирівнявши теперішню величину термінових виплат сумі позики D, для місячних внесків R знаходимо: $D=Ra(n,i)=R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, $n=12k$ (k – термін погашення в роках) - загальне число платежів, i – місячна процентна ставка, $a(n,i)$ – коефіцієнт зведення постійної ренти. Звідси $R=D/a(n,i)$, а для рент пренумерандо $R=(1+i)D/a(n,i)$. Величину $D/a(n,i)$ називають *коефіцієнтом відтермінування*.

Приклад 3.11. Позика в розмірі D=100000000 грн. видана на n=10 років, погашення щомісячне, і нараховуються проценти за номінальною річною ставкою i=12%. Знайти місячну суму внеску R.

Розв'язок: Загальне число платежів $n=12\cdot10=120$, $i=0{,}01$, $a(120,1)=69{,}70052$. $R=100000000/69{,}70052=1434709$ (грн.), з них $100000000\cdot0{,}01=1000000$ (грн.) – проценти, а 1434709–1000000=434709 (грн.)

піде на погашення боргу.

При видачі позики під заставу для обох сторін важливо знати суму погашеного боргу і його залишок на будь-який момент часу.

Нехай $d_t=d_{t-1}(1+i)=d_1(1+i)^{t-1}$ – сума погашення боргу, t – порядковий номер, i – місячна процентна ставка. Послідовні суми погашення боргу є геометричною прогресією з першим членом d_1 і знаменником $(1+i)$, причому $d_1=R–Di$, а її сума від початку погашення до t включно - $w_t=ds(t,i)$, де $s(t,i)$ – коефіцієнт нарощення постійної ренти постнумерандо. Залишок боргу на початок місяця $D_{t+1}=D_t–w_t$.

Прикла 3.12. За умовами попереднього прикладу знайти залишок боргу на початок 118 місяця.

Розв'язок: $D_{118}=D_1–w_{117}$; $w_{117}=d_1s(117,1)=424709\cdot 220{,}3329=95780694$ (грн.), звідки $D_{118}=100000000–95780694=4219406$ (грн.).

3.9. Лізингові операції

Лізинг – форма довготермінової оренди, пов’язана з передачею в користування різного роду майна, яка передбачає серію фіксованих виплат. Згідно контракту *лізингодавач* передає права володіння та використання обладнання (але не право власності) на фіксований термін *лізингоотримувачу* в обмін на обумовлені лізингові платежі. Лізингодавач купує обладнання у відповідності з вимогами орендатора за узгодженою з ним ціною.

3.9.1. Методи розрахунку лізингових платежів

Вихідною вимогою для здійснення всіх лізингових операцій є *рівність сучасної вартості потоку лізингових платежів витратам на придбання обладнання.*

При погашенні всієї вартості майна для виплат постнумерандо вартість майна для лізингодавача $K=R\cdot a(n.i)$, де R – розмір постійного платежу, $a(n.i) =$

$= \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ – коефіцієнт зведення постійної ренти постнумерандо.

При розрахунку розмірів платежів інколи застосовують коефіцієнти відтермінування, що визначають частку вартості обладнання, яка погашається при кожній виплаті. Коефіцієнт відтермінування для постійних рент постнумерандо -$a_1=1/a(n.i)=i/(1-(1+i)^{-n})$, а для рент пренумерандо-$a_2=(1/a(n.i))\cdot v=i/(1+i)(1-(1+i)^{-})$. Тоді розмір лізингових платежів $R=K\cdot a_{1(2)}$.

Якщо перший платіж в k раз більший за інші, то умова еквівалентності фінансових зобов'язань: для виплат постнумерандо $K=(k-1)\cdot R^1\cdot v+R^1\cdot a(k+1;i)$, а для виплат пренумерандо $K=(k-1)\cdot R^2+R^2\cdot a(k+1;i)\,(1+i)$, звідки

$$R^1=\frac{K}{(k-1)v+a(n-k+1,i)}, \qquad R^2=\frac{K}{(k-1)v+a(n-k+1,i)(1+\mathrm{i})}.$$

Якщо виплачується аванс величиною A, то для лізингових платежів постнумерандо і пренумерандо, відповідно, отримуємо: $K=A+R^1a(n.i)$, $K=A+R^2a(n.i)(1+i)$. Звідси в термінах коефіцієнтів відтермінування, матимемо $R^{1(2)}=(K-A)\cdot a_{1(2)}$.

Якщо передбачається викуп майна за залишковою ціною, частка якої s, то для платежів постнумерандо та пренумерандо

$$R^1=\frac{K\left(1-sv^n\right)}{a(n,i)}=K\left(1-sv^n\right)a_1 \quad R^2=\frac{K\left(1-sv^n\right)}{a(n,i)\left(1+i\right)}=K\left(1-sv^n\right)a_2.$$

Коли одночасно враховується авансовий платіж і викуп майна, то для послідовності платежів постнумерандо та пренумерандо: $K\left(1-s\,v^n\right)=A+R^1\mathrm{a(n.i)}$, $K\left(1-sv^n\right)=A+R^2a(n,i)(1+i)$, звідки

$$R^1=\frac{K\left(1-sv^n\right)-A}{a(n,i)}, \quad R^2=\frac{K\left(1-sv^n\right)-A}{a(n,i)(1+i)}.$$

Приклад 3.11. Для різних умов лізингу розрахувати значення щомісячних платежів R, якщо $K=1000$, $n=36$ місяців, $i=2\%$ в місяць, виплати постнумерандо

Розв'язок. Коефіцієнт відтермінування $a_1=0{,}02/(1-1{,}02^{-36})=0{,}03923$. Тоді $R=1000\cdot 0{,}03923=39{,}23$.

Якщо платежі вносяться на початку кожного місяця, то a_2=a_1, $R=1000\cdot 0{,}039233\cdot 1{,}02^{-1}=38{,}46$.Якщо в першому місяці сплачується подвійний внесок, то для внесків в кінці періоду отримаємо $R^1 = \dfrac{K}{(k-1)v + a(n-r+1;i)} = \dfrac{1000}{(2-1)\cdot 1{,}02^{-1} + a(35;2)}$ =38,49.

Якщо A=100, то $R^1 = (K-A)a_1 = 900 \cdot 0{,}03923 = 35{,}31$.

Нехай s=0,2, тоді $R^1 = K(1 - s\,v^n)\cdot a_1 = 100\cdot(1-0{,}2\cdot 1{,}02^{-36})\cdot 0{,}03923$=35,39.

При A=100, s=0,2 слідує , що $R^1 = 1000(1-0{,}2\cdot 1{,}02)^{-36}\cdot 0{,}03923 = 31{,}46$.

Приклад 3.12. Обладнання вартістю K=100 млн. грн. надано в лізинг на n=5 років за ставкою i=10% річних. Повне погашення відбувається в кінці періодів. Знайти величину платежу та скласти графік погашення заборгованості.

Розв'язок. За формулою $R=K/a(n.i)$ отримаємо R=100$\cdot \dfrac{0{,}1}{1-(1+0{,}1)^{-5}}$ =26,38.

Проценти за перший рік 100·0,1=10, сума погашення 26,38-10 =16,38. За другий рік (100-16,38)·0,1=8,362; 26,38-8,362=18,018 і т. д. Графік погашення поданий у табл. 3.1., з якої видно, що суми, призначені для погашення основного боргу, збільшуються, а процентні платежі скорочуються.

Таблиця 3.1

Графік погашення заборгованості

t	Залишок боргу на кінець періоду	%	Погашення боргу	Лізингові платежі
1	100	10	16,38	26,38
2	83,62	8,362	18,018	26,38
3	65,602	6,56	19,82	26,38
4	45,782	4,578	21,802	26,38
5	23,98	2,398	23,98	26,38

Приклад 3.13. За умовами прикладу 3.12 знайти величину разового платежу та скласти графік погашення при виплатах постнумерандо, якщо залишкова вартість 10% від початкової (s=0,1).

Розв'язок. Величина платежу $R=\frac{K(1-\gamma(1+i)^{-n})}{a(n;i)}$=100(1–0,1·1,1^{-5})·0,2638= =24,742.

Проценти за перший рік 100·0,1=10, сума погашення – 24,742; проценти за другий рік (100-14,742)·0,1=8,526, сума погашення – 24,742-8,526=16,215 і т. д. Графік погашення боргу подано у вигляді табл. 3.2.

Таблиця 3.2

t	Залишок боргу на кінець періоду	%	Погашення боргу	Лізингові платежі
1	100	10	14,742	24,742
2	85,258	8,526	16,215	24,742
3	69,043	6,904	17,837	24,742
4	51,205	5,121	19,621	24,742
5	31,584	3,158	21,584	24,742

Залишкова вартість: 31,584-21,584=10 (млн. грн.).

Нехай тепер величина платежу визначається розміром сум погашення основного боргу та виплат процентів. Розрахунок виконується за схемою погашення рівними частками. Для схеми з повним погашенням $d=(K/n)=const$.

Приклад 3.14. Подати схему погашення заборгованості за умовами прикладу 3.12, вважаючи, що основний борг погашається рівними сумами.

Розв'язок. Величина платежу *R*=100/5=20 (млн. грн.) для кожного року. Проценти за перший рік - 100·0,1=10 (млн. грн.), за другий рік - (100-20)·0,1=8 (млн. грн.). Графік погашення платежів поданий у табл. 3.3.

Таблиця 3.3

t	Залишок боргу на кінець періоду	%	Погашення боргу	Лізингові платежі
1	100	10	20	30
2	80	8	20	28
3	60	6	20	26

4	40	4	20	24
5	20	2	20	22

3.11. Форфейтингові операції

3.11.1. Сутність форфейтингових операцій

До форфейтування звертаються при продажі великого об'єкту. Покупець хоче купити товар, коли він не володіє відповідними коштами, а продавець не може відкласти отримання грошей та продати товар в кредит. В цьому випадку покупець виписує комплект векселів на суму, яка дорівнює вартості товару та процентам за кредит, що начебто надається покупцю продавцем, який після отримання портфеля векселів обліковує його в банку без права повороту на себе, отримуючи гроші на початку угоди. Банк, форфейтуючи угоду, бере весь ризик на себе.

Інколи, в якості четвертого агента угоди виступає гарант-банк покупця, який гарантує погашення заборгованості за векселями.

Мета продавця – отримати гроші на початку угоди і усунути ризик відмови покупця від платежів і ризик, пов'язаний з коливанням процентних ставок.

Мета покупця – придбати товар в кредит з найменшими сукупними витратами, які полягають у послідовному погашенні векселів.

Для банку форфейтна операція – це операція обліку портфеля векселів, ефективність якої визначається розміром облікової ставки та іншими параметрами.

Аналіз операцій а форфе здійснюється з позицій кожної сторони, яка бере участь в ній, із врахуванням вказаних вище цілей.

Продавець повинен отримати при обліку векселів суму , яка дорівнює ціні товару.

Сума V_t, яка зазначена на векселі, складається з суми основного боргу, ціни товару і процентів за кредит, які можуть визначатися двома способами: *проценти на залишок заборгованості, або проценти на ту частину боргу, яка покривається векселем*.

Нехай погашення основного боргу відбувається однаковими сумами і відповідно в кожний вексель записується сума P/n. Проценти за кредит утворюють послідовність: $Pi, Pi\left(1-\frac{1}{n}\right),..., \_Pi\left(1-\frac{t-1}{n}\right),..., \frac{Pi}{n}, i=\overline{1,n}.$

Сума векселя, який погашається в момент t,

$$V_t = \frac{P}{n} + Pi\left(1-\frac{t-1}{n}\right) = \frac{P}{n}(1+(n-t+1)i),$$

а загальна сума нарахованих процентів $Pi\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{t-1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}Pi.$ Тоді загальна сума векселів $\sum_{t=1}^{n}V_t = P\left(1+\frac{n+1}{2}i\right)$, де n – число періодів, або векселів, i – ставка простих процентів за період, P - ціна товару з вирахуванням процентів.

В цьому випадку $V_t = \frac{P}{n}(1+it).$ Сума процентів за весь період:

$$\sum_{t=1}^{n}V_t - P = \sum_{t=1}^{n}\frac{P}{n}(1+ti) - P = \frac{n+1}{2}Pi.$$

Як бачимо, формули для обчислення суми нарахованих процентів за двома варіантами співпадають, а різниця між ними, як буде показано у прикладі 3.15, полягає в розподілі процентів за періодами.

Приклад 3.15. Для оплати за товар на суму P=1 млн. грн. виписано n=4 векселі з погашенням що півріччя. Проста річна процентна ставка i=10%. Знайти величину процентних платежів і суми векселів.

Розв'язок. В нашому випадку проста процентна ставка за півріччя i=5%, n=4, $\frac{P}{n} = \frac{1000000}{4} = 250000$(грн.).

Платежі утворюють ряд: 0,05·1000000=50000; 50000·$\left(1-\frac{1}{4}\right)$=37500; 50000·$\left(1-\frac{1}{2}\right)$=25000; 50000·$\left(1-\frac{3}{4}\right)$=12500, суми векселів:

V_1=250000(1+(4–1+1)0,05)=300000, …V_4=250000(1+(4–4+1)0,05)=262500.

Отримані результати подамо у вигляді табл. 3.4.

Таблиця 3.4.

t	P/n тис.грн	Варіант 1	
		Нараховані відсотки у тис.грн.	V_t тис.грн.
1	250	50,0	300
2	250	37,5	287,5
3	250	25,0	275
4	250	12,5	262,5
Всього		125,0	1125

При обліку портфеля векселів в банку за простою обліковою ставкою d продавець отримає деяку суму

$$A = P\left[1+\frac{n+1}{2}\left((i-d)-id\,\frac{n+2}{3}\right)\right]=AZ.$$

Якщо величина Z <1, то продавець отримає суму, меншу за домовлену ціну P. Тому для уникнення втрат слід підвищити ціну в $\frac{1}{Z}$ разів. Величину $\frac{1}{Z}$ назвемо *коригуючим множником*.

Приклад 3.16. За умовами прикладу 3.15 для d=9,5% знайти значення Z.

Розв'язок. Підставивши відповідні значення, матимемо

$$Z = 1+\frac{4+1}{2}\cdot\left(0{,}05-0{,}0475-0{,}05\cdot 0{,}0475\cdot\frac{4+2}{3}\right)=0{,}994375.$$

Підвищення ціни в 1/Z= 1/0,994375=1,005657 разів компенсує втрати продавця. Суми векселів після коригування утворюють послідовність: 301697; 289126; 276566; 263984. Обліковуючи їх за ставкою d=4,75%, отримаємо в сумі 1000000 грн.

Співвідношення процентних ставок, при яких продавець не зазнає втрат знайдемо з формули для визначення A при $Z=1$, з якої випливає, що $i-d=id\,\frac{n+2}{3}$, а процентна ставка, при якій зникає необхідність у коригуванні ціни $i^* = \dfrac{d}{1 - \dfrac{n+2}{3}d}$. Підвищення ставки до рівня i^* повністю балансує умови угоди, при цьому дещо підвищуються суми векселів.

Приклад 3.17. Яким повинен бути рівень процентної ставки за кредит для того, щоб покупець не зазнав збитків за умови, що d=4,75% (приклад 3.15).

Розв'язок. За умовами прикладу 3.15 $i^* = \dfrac{0{,}0475}{1 - \dfrac{4+2}{3}0{,}0475} = 0{,}052486$.

Отже, річна ставка 10,4972% повністю компенсує втрати продавця.

Послідовність погашення векселів можна розглядати як потік платежів, а сукупні втрати покупця є теперішньою вартістю цього потоку W, яка обчислюється за формулою.

$$W_1 = \frac{1}{Z}\sum_t S_t \left(\frac{1}{1+q}\right)^t = \frac{P}{Z}\sum_t \left[1 + (n - t + 1)i\right]\left(\frac{t}{1+q}\right)^t.$$

Приклад 3.18. За умовами прикладу 3.15 при умові, що складна ставка 15%, що відповідає ставці за півріччя $q = \sqrt{1{,}15} - 1 = 0{,}07238$, або 7,238%, знайти теперішню величину платежів за векселями.

Розв'язок. Враховуючи, що Z =0,994375, отримаємо

$$W_1 = \frac{1}{0{,}994375}(300 \cdot 1{,}07238^{-1} + 287{,}5 \cdot 1{,}07238^{-2} + 275 \cdot 1{,}07238^{-3} + 262{,}5 \cdot 1{,}07238^{-4}) =$$

=956,65 (тис. грн.).

Отже, при узгодженні умов конкретної угоди а форфе необхідний її всесторонній кількісний аналіз з позиції зацікавлених сторін, оскільки фінансові результати угоди не очевидні та суттєво залежать від значень прийнятих параметрів.

Для продавця, який остерігається суттєвого підвищення ціни і в той же час намагається компенсувати свої втрати, засобами управління є: зниження облікової ставки, підвищення процентної ставки за кредит, зменшення числа векселів.

Засобами управління для покупця є в основному параметри d і n. Більша величина параметра i відіграє негативну роль при великих значеннях n.

Таким чином, *основна задача покупця* – знайти значення n, яке мінімізує теперішню вартість втрат імпортера.

Завдання до самостійної роботи

1. Для суми а) D=30000 грн.; б) D=40000 грн., виданої в кредит під а) i=16%; б) i=18% річних терміном на а) n=5; б) n=6 років, подати графік погашення боргу, для таких схем: весь кредит з процентами одним платежем в кінці; основний борг одним платежем в кінці; основний борг рівними річними виплатами; весь кредит з процентами рівними річними виплатами; весь кредит з процентами рівними виплатами два рази в рік.
2. При видачі кредиту на а) n=160; б) n=200 днів отримані комісійні в розмірі а) g=0,6%; б) g=0,8% суми, а на фактичну суму нараховані проценти за простою ставкою а) i=12%; б) i=14% річних. Яка ефективність кредитної операції у виді річної ставки простих і складних процентів?
3. Нехай кредит виданий на а) n=4; б) n=8 років під а) i=18%; б) i=22% складних річних процентів і отримані комісійні в розмірі а) g=0,4%; б) g=0,6% від суми. Знайти ефективність операції за ставкою складних процентів.
4. Знайти величину простої ставки i_t, яка забезпечує реальну ефективність кредитної операції а) i=18%; б) i=22% за термін а) n=3; б) n=4 роки при рівні інфляції а) t=8%; б) t=10%.
5. Кредит в сумі а) D=1000 грн. ; б) D=1500 грн. надано терміном на а) n=4; б) n=6 років за ставкою а) i=6%; б) i=12% річних, які виплачуються в кінці кожного півріччя. Обчислити необхідну величину виплат у фонд погашення, якщо проценти нараховуються за процентною ставкою а) q=12%; б) q=14% річних. Якою буде сума фонду до кінця а) другого; б) четвертого року? Знайти повні витрати позичальника, коли відсотки періодично виплачуються кредитору, та коли приєднуються до основного боргу.
6. За умовами прикладу 4 знайти величину складної ставки i_t.

7. Обчислити величину процентних грошей з суми а) P=3000 грн.; б) P=4000 грн., яку надають в борг під а) i=22%; б) i=24% річних на термін а) з 10.04 по 18.05; б) з 20.05 по 22.08 того ж року, а кількість днів k=365.
8. Знайти величину доходу кредитора, якщо за надання в борг деякої суми на а)l=4; б) l=9 місяців він отримав від дебітора а) F=3000 грн.; б) F=4000 грн. При цьому застосовувалась проста процентна ставка а) i=12%; б) i=14%.
9. Кредит в сумі а) K=6000 грн.; б) K=8000 грн. банк надав а) 10.06; б) 5.07. Знайти суму, яку потрібно повернути а) 22.08; б) 14.09 цього ж року, якщо нараховані за ставкою а) i=16%; б) i=18% проценти були отримані банком у момент надання кредиту. Число днів у році k=360.
10. Рахунок відкрито а) 10.02; б) 12.03 і на нього покладена сума а)P_1=3000 грн.; б) P_1=4000 грн. В наступному кварталі а) 12.04; б) 15.05 на рахунок надійшло а) P_2=1000 грн.; б) P_2=2000 грн., потім а) 20.06; б) 18.07 з рахунку зняли а) P_3=2000 грн.; б) P_3=1000 грн. і а) 2.10; б) 29.10 поклали суму а)P_4=1500 грн.; б) P_4=2500 грн. Рахунок закрито а) 22.11; б) 15.12. Визначити суму, отриману власником рахунку, якщо процентна ставка а) i=14%; б)i=16% річних, а кількість днів у році k=360.
11. Товар ціною а) P=4000; б) P=5000 грн. продається в кредит терміном на а)n=3; б) n=4 роки під а) i=14%; б) i=18% річних з щоквартальними рівними платежами, причому нараховуються прості проценти. Визначити борг з процентами, процентні гроші та величину разового погашувального платежу.
12. За умовами прикладу 11 вважати, що частину боргу а) P_1=1500 грн.; б)P_1=2000 грн. споживач сплачує при оформленні кредиту.
13. За умовами прикладу 11, користуючись „правилом 78”, скласти план погашення.
14. Нехай за умовами прикладу 11 прийнято рішення повернути кредит раніше терміну після а) n=4; б) n=6 погашувальних платежів. Обчислити суму, яку йому не доведеться сплачувати в рахунок сплати процентів.

15. Нехай погашувальні платежі вносяться кожні а) k=4; б) k=6 місяців впродовж а) n=4; б) n=6 років за користування кредитом в сумі а) P=15000 грн.; б)P=20000 грн., виданим під а) i=12%; б) i=16% річних.
16. Надано пільговий кредит розміром а) D=12 млн. грн.; б) D=14 млн. грн. на а)n=5; б) n=8 років під а) i=10%; б) i=11% річних. Звичайна процентна ставка а) g=20%; б) g=22% річних. Знайти абсолютну та відносну величину грант-елемента, якщо кредит погашається рівними терміновими виплатами.
17. За умовами прикладу 16 обчислити величину втрат від надання пільгового кредиту за умови відтермінування на а) n=3; б) n=4 роки у випадках, коли проценти сплачуються в пільговий період і додаються до основної частини.
18. Знайти відносну величину втрат кредитора для безпроцентного кредиту, виданого на а) n=4; б) n=6 років за процентною ставкою а) i=22%; б) i=24%.
19. В умовах прикладу 18 вважати, що пільговий період а) n=2 роки; б) n=3 роки.
20. Клієнт звернувся в банк а) 12.03; б) 15.04 з метою отримання кредиту під заставу а) m=200; б) m=250 цінних паперів, вартість кожного з яких на цей день складає а) P=70; б) P=80 грн. Банк надає кредит під а) i=12%; б) i=14% річних терміном на а) n=4; б) n=6 місяців в розмірі а) θ=82%; б) θ=84% вартості цінних паперів. Витрати банку на обслуговування кредиту складають а)j=0,8%, б) j=0,9% від його номінальної суми та отримуються разом з процентним платежем в момент надання. У випадку перетермінування виплати банку за кожний день перетермінування сплачується пеня з розрахунку а) g=9%; б) g=10% річних. Знайти величину кредиту, витрати клієнта за умови, що він розрахувався з банком а) 28.06; б) 29.07.
21. Підприємцю необхідна сума а) P=20000; б) P=30000 грн. терміном на а) n=4; б) n=6 місяців, яка надана йому в розмірі а) θ=80%; б) θ=85% вартості застави під а) i=10%; б) i=11% річних, а за обслуговування утримано а) 450; б)500 грн. Визначити величину застави, якщо кредит взято а) 10.03; б) 15.04.
22. Під заставу нерухомості видана на а) n=12; б) n=15 років позика в розмірі а)D=200000; б) D=300000 грн. Погашення щомісячне, а проценти нарахову-

ються за номінальною річною ставкою а) i=18%; б) i=24%. Знайти місячну суму внеску.

23. Сума заборгованості за договором іпотеки а) D=20; б) D=40 млн. грн., загальний термін погашення а) n=12; б) n=15 років. Передбачається ріст платежів впродовж а) n_1=50; б) n_1=62 місяці. Ставка за позику а) i=12%; б) i=14%, щорічний приріст платежів а) g=4%; б)g=6%. Знайти величину витрат на кінець а) шестирічного періоду; б)восьмирічного періоду.
24. Для різних умов лізингу розрахувати величину платежів, якщо а) K=10000; б) K=20000 грн. термін виплати а) n=24; б) n=30 місяців, процентна ставка а) i=1%; б) i=1,5% в місяць.
25. Обладнання вартістю а) K=20; б) K=30 млн. грн. надано в лізинг на а)n=6; б)n=8 років за ставкою а) i=12%; б) i=14% річних. Платежі проводяться в кінці періодів і відбувається повне погашення вартості. Обчислити величину разового платежу та скласти графік погашення заборгованості.
26. За умовами попереднього прикладу обчислити величину разового платежу R та скласти графік погашення заборгованості при виплатах постнумерандо, якщо передбачається залишкова вартість у розмірі а) s=5%; б) s=8% від початкової вартості обладнання.
27. За умовами прикладу 26 подати схему погашення заборгованості, вважаючи, що основний борг погашається рівними частинами.
28. Для оплати за товар на суму а) P=200000; б) P=300000 грн. виписано а)n=5; б) n=6 векселів з погашенням кожного півріччя. Проста річна процентна ставка за кредит а) i=12%; б) i=11%. Визначити величину процентних платежів і суми векселів.
29. За умовами прикладу 28 для облікової ставки а) d=8%, а) d=9% знайти значення коригуючого коефіцієнта.
30. За умовами прикладу 28 знайти рівень процентної ставки за кредит, щоб покупець не зазнав збитків.
31. За умовами прикладу 28 у випадку, коли складна процентна ставка, а)i=12%; б)i=14% річних, знайти теперішні величини платежів за векселями.

Примірний варіант контрольної роботи, яку доцільно провести після вивчення матеріалу розділу 3.

1. При видачі кредиту на n=120 днів отримані комісійні в розмірі g=0,5% суми, а на фактичну суму нараховані проценти за простою ставкою i=16% річних. Яка ефективність кредитної операції у виді річної ставки простих процентів.

2. Знайти величину простої ставки i_t, яка забезпечує реальну ефективність кредитної операції i=20% за термін n=2 роки при рівні інфляції t=9%.

3. Товар ціною P=6000 грн. продається в кредит терміном на n=2 роки під i=12% річних з щоквартальними рівними платежами, причому нараховуються прості проценти. Визначити величину разового погашувального платежу.

4. Чому дорівнює відносна величина втрат кредитора для безпроцентного кредиту, виданого на n=3 роки за процентною ставкою i=20% річних.

5. Під заставу нерухомості видана на n=10 років позика в розмірі D=10000 грн. Погашення щомісячне, на борг нараховуються проценти за номінальною річною ставкою i=20%. Знайти місячну суму внеску.

Тести для проміжного контролю знань

1. **Невизначеність – це:**

1) фундаментальна характеристика недостатньої забезпеченості процесу прийняття рішень знаннями стосовно певної проблемної ситуації;
2) можливість отримання фінансового результату, відмінного від очікуваного, у процесі реалізації управлінських рішень фінансової діяльності;
3) властивість ризику, що допускає як обов'язкову умову необхідність вибору з кількох найбільш вірогіднихз стратегій;
4) формалізований опис конфліктної ситуації, що включає чітко визначені правила дій її учасників.

2. Фінансовий ризик підприємства це:

1) можливість отримання фінансового результату, відмінного від очікуваного (у формі втрат прибутку і(або) капіталу), у процесі реалізації управлінських рішень фінансової діяльності в ситуації невизначеності;
2) ситуація постійного вибору тих чи інших гіпотез та ієрархії цінностей в процесі господарської діяльності;
3) збитки, яких можна зазнати під час реалізації господарського рішення, здійснення операцій купівлі-продажу;
4) формалізований опис конфліктної ситуації, що включає чітко визначені правила дій її учасників.

3. Що розуміють під методом нарощення капіталу:

1) процес збільшення грошової суми в результаті нарахування процентів за встановленою ставкою;
2) процес зменшення грошової суми в результаті нарахування процентів за встановленою ставкою;
3) стабілізація грошової суми в результаті впливу інфляції та нарахування процентів за встановленою ставкою;
4) дисконтування грошової суми впродовж періоду інвестування капіталу за складними процентами.

4. При одній і тій же ставці процентів:

1) нарощення складних процентів завжди відбувається скоріше, ніж простих при довжині періоду нарощення більшого за одиницю;
2) нарощення складних процентів завжди відбувається скоріше, ніж простих;
3) нарощення складних процентів завжди відбувається скоріше, ніж простих при довжині періоду нарощення меншого за одиницю;
4) нарощення складних і простих процентів завжди відбувається однаково.

5. Формула нарощення капіталу за простими процентами, де P_n – нарощена сума капіталу, P – початкова сума капіталу, i – річна ставка процента, n – кількість інтервалів нарахувань, має вигляд:

1) $P_n=P(1+ni)$;
2) $P_n=P(1+n)^i$;
3) $P_n=P/(1+i)$;
4) $P_n=P(1+n+i)$.

6. Формула нарощення капіталу за складними процентами, де P_n – нарощена сума капіталу, P – початкова сума капіталу, i – річна ставка процента, n – кількість інтервалів нарахувань, має вигляд:

1) $P_n=P(1+i)^n$;
2) $P_n=P(1+ni)$;
3) $P_n=P(1+n)^i$;
4) $P_n=P/(1+i)$.

***7.* Якщо термін платежу n>1 є дробовим числом, то інколи застосовується комбінована схема: складні проценти за ціле число років (періодів) a, а прості - за решта років b. Тоді нарощена сума P_n з використанням комбінованої схеми нарахування процентів обчислюється за формулою:**

1) $P_n=P(1+i)^a(1+bi)$;
2) $P_n=P(1+ni(1+ni))$;
3) $P_n=P(1+n)^i$;
4) $P_n=P/(1+i)(1+ni)$.

8. Що розуміють під методом дисконтування капіталу:

1) процес знаходження вартісної величини в певний момент часу за її відомим, або передбачуваним значенням у майбутньому;
2) процес зменшення грошової суми в результаті нарахування процентів за встановленою ставкою;

3) процес збільшення грошової суми в результаті нарахування процентів за встановленою ставкою;
4) стабілізація грошової суми в результаті впливу інфляції та нарахування процентів за встановленою ставкою.

9. Вексель – це:
1) документ, складений за установленою законом формою, який є безумовним засвідченням однієї особи сплатити іншій визначену суму грошових коштів у встановлений термін;
2) цінний папір, що засвідчує право власника на участь у власному капіталі підприємства;
3) емісійний цінний папір, що засвідчує внесення її власником грошових коштів і підтверджує зобов'язання відшкодувати йому номінальну вартість цього цінного паперу в передбачений в ньому строк з виплатою фіксованого відсотка;
4) встановленої форми грошовий (фінансовий) документ, який містить безумовне письмове розпорядження чекодавця (власника рахунку у фінансовій установі) про сплату чекодержателю зазначеної в чеку суми.

10. При нарощенні простих процентів величину дисконту знаходять за формулою, де *D* – сума дисконту, P_n – нарощена сума капіталу, *P* – початкова сума капіталу, *i* – річна ставка процента, *n* – кількість інтервалів нарахувань:
1) $D = \frac{P_n ni}{1+ni}$;
2) $D = 1 - \frac{P_n}{1+ni}$; ;
3) $D = 1 + \frac{P_n ni}{1+ni}$;
4) $D = P_n - Pn^3$.

11. Облікову ставку *d* за певний період розраховують за формулою, де *D* – сума дисконту, P_n – сума боргу при погашенні цінного паперу:

1) $d = \frac{D}{P_n}$;

2) $d = \frac{P_n}{1+D}$;

3) $d = D + \frac{P_n}{D}$;

4) $d = P_n - 2D$.

12. Які формули задають умови еквівалентності облікової ставки *d* та процентної ставки *i* стосовно заданого періоду часу *t*:

1) $d = \frac{i}{1+i}$; $i = \frac{d}{1-d}$;

2) $i = \frac{P_n}{1+D}$; $i = \frac{d}{1-d}$;

3) $i = D + \frac{P_n}{D}$; $d = \frac{i}{1+i}$;

4) $i = P_n - D$; $d = \frac{i}{1+i}$.

13. За якою формулою можна знайти період *n*, за який сума *P* при *m*-кратному нарахуванні процентів в рік за ставкою *i* зросте до величини P_n:

1) $n = \frac{\ln \frac{P_n}{P}}{m \ln\left(1 + \frac{i}{m}\right)}$;

2) $n = \frac{\ln \frac{P_n}{P}}{m \ln\left(1 - \frac{i}{m}\right)}$;

3) $n = \frac{P_n m}{1+i}$;

4) $i = m\left(\left(\frac{P_n}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right)$.

14.За якою формулою визначають процентну ставку *i*, якщо відомо, що за *n* періодів при *m*-кратному нарахуванні процентів в рік сума *P* зросла до P_n:

1) $i = m\left(\left(\frac{P_n}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right)$.;

2) $i = \frac{\ln \frac{P_n}{P}}{m \ln\left(1 - \frac{i}{m}\right)}$;

3) $i = m\left(\left(\frac{P_n}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} + 1\right)$; ;

4) $i = n\left(\left(\frac{P_n}{P}\right)^{\frac{m}{n}} - 1\right)$.

15.Ефективна ставка $i_{еф}$ розраховується за формулою, де *i* – річна ставка процента, *n* – кількість інтервалів нарахувань:

1) $i_{еф} = (1 + \frac{i}{m})^m - 1$;

2) $i_{еф} = (1 - \frac{i}{m})^m - 1$;

3) $i_{еф} = m\left(\left(\frac{P_n}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} + 1\right)$;

4) $i_{еф} = (1 - \frac{i}{m})$.

16.Зростання початкової суми *P* відбувається скоріше за схемою:

1) неперервного нарощення;
2) нарощення за складними процентами;
3) нарощення за простими процентами;
4) є однаковим для всіх схем.

17.Вкажіть формулу для знаходження нарощеної суми за *n* років при неперервному нарахуванні відсотків, де P_n – нарощена сума капіталу, *P* – початкова сума капіталу, *i* – річна ставка процента:

1) $P_n = \lim\limits_{m\to\infty} P \cdot \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{n\cdot m}$;

2) $P_n = \lg P \cdot \left(1 - \frac{i}{m}\right)^{n\cdot m}$;

3) $P_n = \ln P \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n\cdot m}$

4) $i = (1 - \frac{m}{i_{еф}})$.

18.Реальна відсоткова ставка розраховується за формулою, де α - річний темп інфляції:

1) $i_p = \frac{i-\alpha}{1+\alpha}$;

2) $i_p = \frac{i+\alpha}{1-\alpha}$;

3) $i_p = \frac{1-\alpha}{i+\alpha}$;

4) $i_p = (i+1)\cdot(1-\alpha)$.

19. Нехай на період n_k встановлена річна процентна ставка i_k. Тоді при реінвестуванні, отриманих на кожному етапі нарощення грошових засобів за простими процентами, нарощена за m періодів сума:

1) $F = P(1 + \sum_{k=1}^{m} n_k i_k)$;

2) $F = P \prod_{k=1}^{m} (1 + n_k i_k)$;

3) $F = P(1 + n_k i_k)^m$;

4) $F = P \prod_{k=1}^{m} (1 + n_k i_k)^{n_k}$.

20. Нехай на період n_k встановлена річна процентна ставка i_k. Тоді при реінвестуванні, отриманих на кожному етапі нарощення грошових засобів за складними процентами, нарощена за m періодів сума:

1) $F = P \prod_{k=1}^{m} (1 + n_k i_k)^{n_k}$;

2) $F = P \prod_{k=1}^{m} (1 + n_k i_k)$;

3) $F = P(1 + n_k i_k)^m$;

4) $F = P(1 + \sum_{k=1}^{m} n_k i_k)$.

21. Грошовий потік підприємства це:

1) сукупність розподілених в часі надходжень і виплат грошових коштів, які генеруються його господарською діяльністю;
2) грошовий платіж у вигляді однієї суми коштів, пов'язаний з операціями купівлі-продажу товарів (продукції, робіт, послуг);
3) одномоментне надходження та вибуття коштів з рахунку підприємства внаслідок здійснення господарської діяльності;

4) грошовий платіж за поставлені товари в межах однієї господарської операції.

22. Управління грошовими потоками є складовою частиною:

1) фінансового менеджменту;
2) менеджменту персоналу;
3) соціального менеджменту;
4) мережевого маркетингу.

23. Майбутня величина потоку *R*(*T*) за *T* періодів визначається за формулою ..., де *T* – термін (кількість періодів проведення операції), *i* – процентна ставка, R_t – величина потоку у періоді *t*:

1) $R(T)=\sum_k R_k(1+i)^{T-t_k}$;
2) $R(T)=\sum_k R_k(1-i)^{T-t_k}$;
3) $R(T)=\sum_k R_k(1+i)T-t_k$;
4) $R(T)=\sum_k (R_k+i)^{T-t_k}$.

24. При відомих величинах *R*(0), *R*(*T*) і *T* процентна ставка визначається за формулою ..., де *R*(0) – теперішня виевеличина потоку, *R*(*T*) – майбутня величина потоку, *T* – термін (кількість періодів проведення операції), *i* – процентна ставка:

1) $i=\left(\frac{R(T)}{R(0)}\right)^{\frac{1}{T}}-1$;
2) $i=\left(\frac{R(0)}{R(\grave{O})}\right)^{\frac{1}{T}}-1$;
3) $i=\left(\frac{R(T)}{R(0)}\right)^{\frac{1}{T}}+1$;

4) $i = \left(\frac{R(T)}{R(0)}\right)^{T} - 1.$

25. При послідовності грошових платежів $R_1(t_1)$, $R_2(t_2)$, …, $R_N(t_N)$ в момент часу t_1, t_2, …, t_N і використання простої відсоткової ставки дюрація розраховується за формулою ..., де $R(0)$ – теперішня величина потоку, $R(T)$ – майбутня величина потоку, T – термін (кількість періодів проведення операції):

1) $Dur = \frac{\sum_{k=1}^{N} t_k R_k(0)}{\sum_{k=1}^{N} R_k(0)}$;

2) $Dur = \frac{\sum_{k=1}^{N} t_k R_k(T)}{\sum_{k=1}^{N} R_k(0)}$;

3) $Dur = \frac{\sum_{k=1}^{N} t_k R_k(T)}{\sum_{k=1}^{N} R_k(T)}$;

4) $Dur = \frac{\sum_{k=1}^{N} t_k R_k(0)}{\sum_{k=1}^{N} R_k(T)}$.

26. При консолідації n платежів у один за умови, що термін нового консолідованого платежу більший раніше встановлених термінів ($t_{конс} > t_1$, t_2, …, t_n), рівняння еквівалентності має вигляд, де $R_{конс}$ – нарощена сума консолідованого платежу, R_k – платежі, які підлягають консолідації з термінами виплати t_1, t_2, …, t_n, T_k - часові інтервали між $t_{конс}$ і t_k, тобто $T_k = t_{конс} - t_k$, i_k – процентна ставка платежів:

1) $R_{конс} = \sum_{k=1}^{n} R_k (1 + T_k \cdot i_k)$;

2) $R_{конс} = \sum_{k=1}^{n} R_k (1 - T_k \cdot i_k)$;

3) $R_{конс} = \sum_{k=1}^{n} R_k (1 + T_k + i_k)$;

4) $R_{конс} = \sum_{k=1}^{n} R_k (1 - T_k - i_k)$.

27. Теперішня сума грошей зведеної ренти обчислюється за формулою …, де *A* – теперішня сума грошей, *S* – нарощена сума грошей зведеної ренти, *i* – процентна ставка за період ренти, *R* - величина разової виплати:

1) $A = (1+i)R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$;

2) $A = (1-i)R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$;

3) $A = (1+i)R\dfrac{1-(1-i)^{-n}}{i}$;

4) $A = (1-i)R\dfrac{1-(1-i)^{-n}}{i}$.

28. Зв’язок між виплатами загальної та простої нескінченної рент описується формулою ..., де *W* - розмір грошових виплат загальної ренти, *i* – процентна ставка за період ренти, *m* – кількість періодів нарахувань у році, *R* – величина виплат простої ренти, еквівалентної загальній; *p* – кількість грошових виплат у рік загальної ренти:

1) $R = W \cdot \dfrac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}$;

2) $R = W + \dfrac{i}{(1-i)^{\frac{m}{p}} - 1}$;

3) $R = W \cdot \dfrac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}} + 1}$;

4) $R = W - \dfrac{i}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}$.

29. Теперішня величина зведеної нескінченної ренти розраховується за формулою ..., де *A* – теперішня величина ренти, *W* - розмір грошових виплат загальної ренти, *i* – процентна ставка за період ренти, *m* – кількість періодів нарахувань у році, *R* – величина виплат простої ренти, еквівалентної загальній; *p* – кількість грошових виплат у рік загальної ренти:

1) $A = W \cdot \dfrac{(1+i)^{\frac{m}{p}}}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}$;

2) $A = W \cdot \dfrac{(1-i)^{\frac{m}{p}}}{(1+i)^{\frac{m}{p}} - 1}$;

3) $A = W \cdot \dfrac{(1+i)^{\frac{m}{p}}}{(1-i)^{\frac{m}{p}} - 1}$;

4) $A = W \cdot \dfrac{(1+i)^{\frac{m}{p}}}{(1+i)^{\frac{m}{p}} + 1}$.

30. Теперішня величина зростаючої ренти обчислюється за формуллою, де *A* – теперішня величина зростаючої ренти, *n* – термін ренти, *i* – процентна ставка за період ренти:

1) $A(1) = \dfrac{1}{i}\left[\dfrac{1-\nu^n}{1-\nu} - n\nu^n\right], \nu = \dfrac{1}{1+i}$;

2) $A(1)=\frac{1}{i}\left[\frac{1-\nu^n}{1-\nu}+n\nu^n\right], \nu=\frac{1}{1+i}$;

3) $A(1)=\frac{1}{i}\left[\frac{1+\nu^n}{1+\nu}-n\nu^n\right], \nu=\frac{1}{1+i}$;

4) $A(1)=\left[\frac{1-\nu^n}{1-\nu}+n+\nu^n\right], \nu=\frac{1}{1+i}$.

31.При визначенні дохідності кредитної операції у виді ставки простих процентів i_{en} використовують формулу ..., де i – процентна ставка, n – термін кредиту в роках, D – сума кредиту, при його видачі отримані комісійні в розмірі gD ($0<g<1$):

1) $i_{en}=\frac{1}{n}\left(\frac{1+ni}{(1-g)}-1\right)$;

2) $i_{en}=\frac{1}{n}\left(\frac{1-ni}{(1-g)}-1\right)$;

3) $i_{en}=\frac{1}{n}\left(\frac{1+ni}{(1+g)}-1\right)$;

4) $i_{en}=\frac{1}{n}\left(\frac{1+ni}{(1-g)}\right)$.

32. При визначенні дохідності кредитної операції у виді ставки складних процентів i_{en} використовують формулу ..., де i – процентна ставка, n – термін кредиту в роках, D – сума кредиту, при його видачі отримані комісійні в розмірі gD ($0<g<1$):

1) $i_e=\sqrt[n]{\frac{1+ni}{1-g}}-1$;

2) $i_e=\sqrt[n]{\frac{1-ni}{1-g}}-1$;

3) $i_e = \sqrt[n]{\frac{1+ni}{1+g}} - 1$;

4) $i_e = \sqrt[n]{\frac{1+ni}{1-g}}$.

33. Проста ставка процентів, яка забезпечує реальну ефективність кредитної операції *i* при рівні інфляції *t* за термін *n* кредиту, дорівнюватиме ..., де *I* – індекс інфляції за термін кредиту:

1) $i_t = \frac{(1+ni)I-1}{n}$;

2) $i_t = \frac{(1-ni)I-1}{n}$;

3) $i_t = \frac{(1+ni)I+1}{n}$;

4) $i_t = \frac{(1-ni)I+1}{n}$.

34. Якщо накопичення коштів здійснюється впродовж *n* років шляхом щорічних регулярних внесків, на які нараховуються складні відсотки за ставкою *q*, то при умові, що відсотки не виплачуються кредитору, а приєднуються до основного боргу *D*, то повні щорічні витрати позичальника γ розраховуються за формулою ..., де *i* – процентна ставка, яка нараховується на борг *D*:

1) $\gamma = D \cdot \frac{(1+i)^n q}{(1+q)^n - 1}$;

2) $\gamma = D \cdot \frac{(1+i)^n q}{(1+q)^n + 1}$;

3) $\gamma = D \cdot \frac{(1-i)^n q}{(1+q)^n - 1}$;

4) $\gamma = D \cdot \frac{(1-i)^n q}{(1-q)^n - 1}$.

35. Щорічні втрати кредитора розраховується за формулою ..., де *D* – величина кредиту, *n* – термін кредиту, *i* – звичайна, *g* - пільгова процентні ставки:

1) $z–y=\dfrac{Di}{1-(1+i)^{-n}}-\dfrac{Dg}{1-(1+g)^{-n}}$;

2) $z–y=\dfrac{Di}{1-(1+i)^{-n}}+\dfrac{Dg}{1-(1+g)^{-n}}$;

3) $z–y=\dfrac{Di}{1-(1-i)^{-n}}-\dfrac{Dg}{1-(1+g)^{-n}}$;

4) $z–y=\dfrac{Di}{1+(1+i)^{-n}}-\dfrac{Dg}{1+(1+g)^{-n}}$.

36. Субсидія кредитора позичальнику розраховується за формулою .., де *D* – величина кредиту, *n* – термін кредиту, *i* – звичайна, *g* - пільгова процентні ставки:

1) $(z–y)a(n,i)=D\left[1-\dfrac{g}{i}\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+g)^{-n}}\right]$;

2) $(z–y)a(n,i)=D\left[1+\dfrac{g}{i}\cdot\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+g)^{-n}}\right]$;

3) $(z–y)a(n,i)=D\left[1-\dfrac{g}{i}\cdot\dfrac{1-(1-i)^{-n}}{1-(1-g)^{-n}}\right]$;

4) $(z–y)a(n,i)=D\left[1-\dfrac{g}{i}\cdot\dfrac{1+(1+i)^{-n}}{1+(1+g)^{-n}}\right]$.

37. Відносний грант-елемент розраховується за формулою …, де *n* – термін кредиту, *i* – звичайна, *g* - пільгова процентні ставки:

1) $w=1-\dfrac{a(n,i)}{a(n,g)}$;

2) $w=1+\dfrac{a(n,i)}{a(n,g)}$;

3) $w=\dfrac{a(n,i)}{a(n,g)}$;

4) $w=\dfrac{1}{a}-\dfrac{a(n,i)}{a(n,g)}$.

38. Коли проценти сплачуються під час пільгового періоду, то відносний грант-елемент розраховується за формулою …, де *L* – величина періоду відтермінування, *n* – термін кредиту, *i* – звичайна, *g* - пільгова процентні ставки:

1) $w=1-\left(\dfrac{a(i;n-L)}{a(g;n-L)}\cdot(1+i)^{-L}+g\cdot a(i;L)\right)$;

2) $w=i+\left(\dfrac{a(i;n-L)}{a(g;n-L)}\cdot(1+i)^{-L}+g\cdot a(i;L)\right)$;

3) $w=1-\left(\dfrac{a(i;n+L)}{a(g;n+L)}\cdot(1-i)^{-L}+g\cdot a(i;L)\right)$;

4) $w=1-\left(\dfrac{a(i;n+L)}{a(g;n-L)}\cdot(1+i)^{-L}-g\cdot a(i;L)\right)$.

39. Величина погашувального платежу *R* для іпотечної позики обчислюється за формулою ..., де *D* – сума позики, *n* – загальне число платежів, *n*=12*k* (*k* – термін погашення в роках), *i* – місячна процентна ставка, *a*(*n*, *i*) – коефіцієнт зведення постійної ренти:

1) $R=D\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$;

2) $R=D\dfrac{i}{1+(1+i)^{-n}}$;

3) $R=D\dfrac{i}{1-(1-i)^{-n}}$;

4) $R = D\dfrac{i}{1+(1-i)^{-n}}$.

40. Теперішня величина всіх платежів за векселем обчислюється за формулою ..., де *n* – кількість векселів, *i* – річна процентна ставка за кредит величиною *P, d* – проста облікова ставка:

1) $A = P\left[1+\dfrac{n+1}{2}\left((i-d)-id\dfrac{n+2}{3}\right)\right]$;

2) $A = P\left[1-\dfrac{n+1}{2}\left((i-d)-id\dfrac{n+2}{3}\right)\right]$;

3) $A = P\left[1+\dfrac{n+1}{2}\left((i+d)-id\dfrac{n+2}{3}\right)\right]$;

4) $A = P\left[1+\dfrac{n+1}{2}\left((i+d)+id\dfrac{n+2}{3}\right)\right]$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бондарев Б.В. Финансовая математика: Учебн. пос. / Бондарев Б.В., Щурко И.А. – Донецк: Кассиопея, 1998.- 164с.
2. Бочаров П.П. Финансовая математика: Учебник / Бочаров П.П., Касимов Ю.Ф.- М.: Гардарики, 2002.-624с.
3. Бугрій М.І. Основи фінансового-кредитного аналізу: Текст лекцій / Бугрій М.І. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім.. І.Франка, 2006.-375с.
4. Єлейко Я.І. Основи фінансового аналізу / Єлейко Я.І., Кандиба О.М., Лапішко М.Л., Смовженко Т.С. – Львів: Львівський банківський інститут НБУ, 2000.-141с.
5. Капитоненко В.В. Финансовая математика и ее приложения: Учебн. пос. для вузов/ Капитоненко В.В. – М.: Изд-во ПРИОР, 2001.-240с.
6. Кочетыгов А.А. Финансовая и актуарная математика: Учебн. пос./ Коче-

тыгов А.А. - Тул. гос. ун – т. 1988.-200с.

7. Кочетыгов А.А. Финансовая математика: Серия «Учебники, учебные пособия» / Кочетыгов А.А. –Ростов н-Д: Изд-во «Феникс» 2004.- 480с.
8. Ковальев В.В. Курс финансовых вычислений / Ковальев В.В., Уланов В.А. – М.: Финансы и статистика, 1999.
9. Кісілевич О.В. Фінансова математика: опорний конспект лекцій / Кісілевич О.В., Копич І.М., Михайленко Н.В. – Львів: В-во ЛКА, 2008.-292с.
10. Кутуков В.Б. Основы финансовой и страховой матиматики / Кутуков В.Б. -М.: Дело, 1988.-304с.
11. Лукасевич И.Я. Анализ финансовых операций: Методы, модели, техника вычислений / Лукасевич И.Я. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1998.-400с.
12. Лукашин Ю.П. Финансовая математика: Учебно-практическое пособие / Лукашин Ю.П. – М.: МЭСИ, 1998.-81с.
13. Малыхин В.И. Финансовая математика / Малыхин В.И. – М.: ЮНИТИ – ДАНА, 1999.-
14. Машина Н.І. Вищі фінансові обчислення: Навч. пос. / Машина Н.І. – К.: Центр навчальної літератури, 2003.-208с.
15. Сороківська М.В. Фінансовий менеджмент (математичний інструментарій): Навч. Посібник / Сороківська М.В., Юсипович О.І. – Львів: «Новий світ - 2000», 2011. – 284с.
16. Симчера В.М. Введение в финансовые актуарные вычисления. / Симчера В.М.- М.: Финансы и статистика, 2003.-352с.
17. Цымбаленко С.В. Финансовые вычисления: Учебн. пос. / Цымбаленко С.В., Цымбаленко Т.Т. – М.: Финансы и статистика, 2004.-160с.
18. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерчиских расчетов / Четыркин Е.М. – М.: «Дело ЛТД», 1995.-320с.
19. Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учебник / Четыркин Е.М. - М.: «Дело ЛТД», 2002.-400с.