Формули зображень

1. $L[1]=\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}dx=\dfrac{1}{p}e^{-px}\Bigg|_0^{+\infty}=\dfrac{1}{p},\ \ \operatorname{Re}p>0.$

2. $L\left[e^{\alpha x}\right]=\int\limits_0^{+\infty} e^{\alpha x}e^{-px}dx=-\dfrac{e^{-(p-\alpha)x}}{p-\alpha}\Bigg|_0^{+\infty}=\dfrac{1}{p-\alpha},\ \ \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}\alpha.$

Покладаючи тут $\alpha=i\omega$ та $\alpha=-i\omega,$ відповідно отримуємо:

3. $L\left[e^{i\omega x}\right]=\dfrac{1}{p-i\omega},\quad L\left[e^{-i\omega x}\right]=\dfrac{1}{p+i\omega},\ \operatorname{Re}p>0.$

Далі, враховуючи лінійність перетворення Лапласа та вже отримані зображення, при відповідних їм $\operatorname{Re}p$ маємо:

4. $L[\operatorname{ch}\alpha x]=L\left[\dfrac{1}{2}\left(e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-\alpha}+\dfrac{1}{p+\alpha}\right)=\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}.$

5. $L[\operatorname{sh}\alpha x]=L\left[\dfrac{1}{2}\left(e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-\alpha}-\dfrac{1}{p+\alpha}\right)=\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}.$

6. $L[\cos\omega x]=L\left[\dfrac{1}{2}\left(e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}\right)\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-i\omega}+\dfrac{1}{p+i\omega}\right)=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}.$

7. $L[\sin\omega x]=L\left[\dfrac{1}{2i}\left(e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}\right)\right]=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-i\omega}-\dfrac{1}{p+i\omega}\right)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}.$

Припустимо тепер, що нам відоме зображення $F(p)=L\left[f(x)\right],\ \operatorname{Re}p>s_0.$ Застосуємо перетворення Лапласа до функції $f(x)e^{\alpha x}$:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-px}e^{\alpha x}f(x)dx=\int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)x}f(x)dx=F(p-\alpha),\ \operatorname{Re}(p-\alpha)>s_0. \quad (9.2)$$

Формулу (9.2) називають *формулою зміщення аргумента зображення*. З неї, зокрема, отримуємо такі зображення:

8. $L\left[e^{\alpha x}\cos\omega x\right]=\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}.$

9. $L\left[e^{\alpha x}\sin\omega x\right]=\dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}.$

Знайдемо тепер перетворення Лапласа функції $x\,f(x)$ за відомим зображенням $F(p)=L\left[f(x)\right].$ Оскільки інтеграл Лапласа збігається рівномірно, то його можна диференціювати за параметром p. У результаті одержуємо

$$\frac{dF(p)}{dp}=\frac{d}{dp}\left(\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)dx\right)=\int_0^{+\infty} \frac{d}{dp}\left(e^{-px}\right) f(x)dx=$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-px}\left(-x f(x)\right)dx=-L\left[x f(x)\right].$$

Таким чином,

$$L\left[x f(x)\right]=-\frac{dF(p)}{dp}.$$

Застосовуючи диференціювання n разів, приходимо до загальної формули

$$L\left[x^n f(x)\right]=(-1)^n \frac{d^nF(p)}{dp^n}. \qquad (9.3)$$

Покладаючи у (9.3) $f(x)=1$, знаходимо:

10. $L\left[x^n\right]=(-1)^n \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{n!}{p^{n+1}},\ n\in \mathrm{N}.$

Наведемо приклади зображень, які випливають з формули (9.3) і часто зустрічаються при розв’язуванні інтегральних рівнянь:

11. $L\left[x^n \cdot e^{\alpha x}\right]=\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}},\ n\in \mathrm{N}.$

12. $L[x\cdot \mathrm{ch}\alpha x]=\frac{p^2+\alpha^2}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2}.$

13. $L[x\cdot \mathrm{sh}\alpha x]=\frac{2\alpha p}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2}.$

14. $L[x\cdot \cos\omega x]=\frac{p^2-\omega^2}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}.$

15. $L[x\cdot \sin\omega x]=\frac{2\omega p}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}.$

Корисною буде і формула

16. $L[\sin\omega x-\omega x\cdot \cos\omega x]=\frac{2\omega^3}{\left(p^2+\omega^2\right)^2}.$

Завдання для самостійного розв'язування

Завдання 1. *Перевірити, чи є функція* $y(x)$ *розв'язком заданого інтегрального рівняння.*

1.1. $y(x)=\dfrac{xe^x+1}{e^x},\quad y(x)-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 xe^s y(s)\,ds=e^{-x}+\dfrac{x}{4};$

1.2. $y(x)=\cos^2 x,\quad \int\limits_0^{\pi}(x+s)y(s)\,ds=\dfrac{\pi}{2}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right);$

1.3. $y(x)=xe^{x^3/3},\quad y(x)-\int\limits_0^x xsy(s)\,ds=x;$

1.4. $y(x)=x-\dfrac{x^2}{2},\quad \int\limits_0^x e^{x-s}y(s)\,ds=\dfrac{x^2}{2};$

1.5. $y(x)=\cos x,\quad \int\limits_0^{\pi}(\cos s+\sin x)\left(1-y^2(s)\right)ds=\dfrac{\pi}{2}\sin x;$

1.6. $y(x)=2\sin x+1,\quad y(x)-\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cos s\cdot y(s)\,ds=1;$

1.7. $y(x)=xe^x,\quad \int\limits_0^1 (x-e^{-s})\cdot y(s)\,ds=\dfrac{x-1}{2};$

1.8. $y(x)=e^x\operatorname{ch}x,\quad y(x)-\int\limits_0^x \dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}s}y(s)\,ds=\operatorname{ch}x;$

1.9. $y(x)=1-\ln 3\cdot x,\quad \int\limits_0^x 3^{x-s}y(s)\,ds=x;$

1.10. $y(x)=\sin x,\quad \int\limits_0^{\pi/2}(\cos s-\sin x)\left(1+y^2(s)\right)ds=\dfrac{4}{3}-\dfrac{3\pi}{4}\sin x;$

1.11. $y(x)=x-\pi\cos x,\quad y(x)-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(x+2s)y(s)\,ds=x;$

1.12. $y(x)=\sin^2 2x,\quad \int\limits_0^{2\pi}(x-s)y(s)\,ds=\pi x-\pi^2;$

1.13. $y(x)=2-e^{-x},\quad y(x)-\int\limits_0^x e^{2(s-x)}y(s)\,ds=1;$

1.14. $y(x)=\dfrac{1-2\sin x}{2e^{x}}, \quad \int\limits_{0}^{x}(1+x-s)y(s)\,ds=\dfrac{1}{2}e^{-x}\sin x;$

1.15. $y(x)=\sin 2x, \quad \int\limits_{0}^{\pi/2}(\cos s+2e^{x})\left(y(s)+y^{2}(s)\right)ds=\dfrac{4}{3}+\pi e^{x};$

1.16. $y(x)=\cos x+\sin x, \quad y(x)-\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\cos x\sin s\, y(s)\,ds=\sin x;$

1.17. $y(x)=\cos x+\sin x, \quad \int\limits_{0}^{\pi/2}(x-s)\,y(s)\,ds=2x-\dfrac{\pi}{2};$

1.18. $y(x)=2^{x}(1-e^{-x}), \quad y(x)+\int\limits_{0}^{x}2^{x-s}y(s)ds=2^{x}x;$

1.19. $y(x)=1-\dfrac{x^{2}}{2}, \quad \int\limits_{0}^{x}\mathrm{ch}(x-s)y(s)ds=x;$

1.20. $y(x)=\cos x, \quad y(x)+12\int\limits_{0}^{\pi}sx\left(1+y^{2}(s)\right)ds=9\pi^{2}x+\cos x.$

Завдання 4. *Розв'язати інтегральні рівняння Фредгольма II роду методом ітерованих ядер.*

4.1. $y(x)-\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin x\cos s\cdot y(s)ds=1;$

4.2. $y(x)-\dfrac{\ln 2}{2}\int\limits_{0}^{1}2^{x+s}y(s)ds=x;$

4.3. $y(x)-\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}y(s)ds=\sin x;$

4.4. $y(x)+\pi\int\limits_{0}^{1}x\sin(2\pi s)y(s)ds=\cos(2\pi x);$

4.5. $y(x)-\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}xe^{s}y(s)ds=e^{-x};$

4.6. $y(x)-\dfrac{1}{e^{2}-1}\int\limits_{0}^{1}e^{x+s}y(s)ds=\sin(\pi x);$

4.7. $y(x)+\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin x\cos s\, y(s)ds=\cos x;$

4.8. $y(x)-\frac{e}{3}\int_{-1}^{1} xe^{s}y(s)ds=(3x^{2}+1)e^{-x};$

4.9. $y(x)-2\int_{-1}^{1} x^{2}s^{2}\,y(s)ds=e^{x};$

4.10. $y(x)-\int_{-1}^{0}(1+x)(1+s)\,y(s)ds=\pi\cos\pi x;$

4.11. $y(x)-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(2x-1)(2s-1)y(s)ds=3x^{2};$

4.12. $y(x)+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\sin 2x\cos 2s\,y(s)\,ds=\cos x+\sin x;$

4.13. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\sin x\cos s\,y(s)\,ds=\cos 2x;$

4.14. $y(x)-\frac{1}{6\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos x\cos s\,y(s)\,ds=5\cos x;$

4.15. $y(x)-\frac{1}{e^{\pi}+1}\int_{0}^{\pi}e^{x}\cos s\,y(s)\,ds=\frac{x}{4};$

4.16. $y(x)+\int_{0}^{1}e^{x-s}y(s)\,ds=x^{2}e^{x};$

4.17. $y(x)-2\int_{0}^{1}xe^{s}y(s)ds=e^{x};$

4.18. $y(x)-3\int_{0}^{2}x^{2}s^{2}\,y(s)ds=e^{2x};$

4.19. $y(x)-\int_{0}^{2}(x+1)(s+1)\,y(s)ds=\cos 2x;$

4.20. $y(x)-e\int_{0}^{1}xe^{s}y(s)ds=x^{2}e^{-x}.$

Завдання 5. *Розв'язати інтегральні рівняння Вольтерри II роду методом ітерованих ядер.*

5.1. $y(x)+\int_{0}^{x}e^{x-s}y(s)ds=x;$

5.2. $y(x)+\int_0^x (x-s)\cos(x-s)y(s)ds=\cos x;$

5.3. $y(x)-\int_0^x \sin(x-s)y(s)ds=x;$

5.4. $y(x)+\int_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds=x;$

5.5. $y(x)+\int_0^x \mathrm{ch}(x-s)y(s)ds=\mathrm{sh}\,x;$

5.6. $y(x)+2\int_0^x (x-s)^2 y(s)ds=x;$

5.7. $y(x)-\int_0^x 3^{x-s} y(s)ds=2x+1;$

5.8. $y(x)+\int_0^x e^{s-x}\sin(x-s)y(s)ds=x;$

5.9. $y(x)+\int_0^x (x-s)y(s)ds=x;$

5.10. $y(x)+\int_0^x e^{s-x}\sin(x-s)y(s)ds=e^{-x};$

5.11. $y(x)+\int_0^x e^{x-s}y(s)ds=e^{x};$

5.12. $y(x)-2\int_0^x \cos(x-s)y(s)ds=1;$

5.13. $y(x)+\int_0^x 2^{x-s}y(s)ds=x^2;$

5.14. $y(x)+\int_0^x e^{s-x}y(s)ds=x;$

5.15. $y(x)+\int_0^x e^{x-s}\cos(x-s)y(s)ds=1;$

5.16. $y(x)-\int_0^x \sin(x-s)y(s)ds=\frac{1}{x^2+1};$

5.17. $y(x)+\int\limits_0^x e^{x-s}y(s)ds = xe^{x^2/2};$

5.18. $y(x)+\frac{1}{2}\int\limits_0^x \cos(s-x)y(s)ds = e^{2x};$

5.19. $y(x)-\int\limits_0^x (x-s)^2 y(s)ds = 1;$

5.20. $y(x)+\int\limits_0^x (x-s)\sin(x-s)y(s)ds = \sin x.$

Завдання 6. *Розв'язати інтегральні рівняння Фредгольма II роду* $y(x)-\lambda\int\limits_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x)$*:*

а) за формулами Фредгольма,
б) зведенням до системи алгебраїчних рівнянь.

6.1. $K(x,s)=x^2s^3-xs^4,\ f(x)=4x^2,\ \lambda=2,\ x\in[a,b]=[-1;1];$
6.2. $K(x,s)=xs-x^2,\ f(x)=3x,\ \lambda=1,\ x\in[a,b]=[-2;2];$
6.3. $K(x,s)=x^2s-xs^2,\ f(x)=\cos x,\ \lambda=1,\ x\in[a,b]=[-1;1];$
6.4. $K(x,s)=x^3s-x^2s^2,\ f(x)=x^2+1,\ \lambda=-5,\ x\in[a,b]=[-1;1];$
6.5. $K(x,s)=x^4s-x^3s^2,\ f(x)=2x+3,\ \lambda=-0,5,\ x\in[a,b]=[-1;1];$
6.6. $K(x,s)=xs^4-x^2s^3,\ f(x)=2x,\ \lambda=1,5,\ x\in[a,b]=[-1;1];$
6.7. $K(x,s)=x^2s^3-x^3s^2,\ f(x)=x^2,\ \lambda=-5,\ x\in[a,b]=[-2;2];$
6.8. $K(x,s)=xs^3-x^2s^2,\ f(x)=x^2-1,\ \lambda=2,\ x\in[a,b]=[-1;1];$
6.9. $K(x,s)=x^3-xs^2,\ f(x)=x,\ \lambda=3,\ x\in[a,b]=[-1;1];$
6.10. $K(x,s)=xs^4-x^3s^2,\ f(x)=\sin x,\ \lambda=-1,\ x\in[a,b]=[-2;2];$
6.11. $K(x,s)=x^2s^3-xs^4,\ f(x)=x+2,\ \lambda=1,\ x\in[a,b]=[-1;1];$
6.12. $K(x,s)=xs-x^2,\ f(x)=x/2,\ \lambda=-1,\ x\in[a,b]=[-2;2];$
6.13. $K(x,s)=x^2s-xs^2,\ f(x)=e^x,\ \lambda=4,\ x\in[a,b]=[-1;1];$
6.14. $K(x,s)=x^3s-x^2s^2,\ f(x)=x+1,\ \lambda=-1,\ x\in[a,b]=[-1;1];.$
6.15. $K(x,s)=x^4s-x^3s^2,\ f(x)=3x+2,\ \lambda=0,5,\ x\in[a,b]=[-2;2];$
6.16. $K(x,s)=xs^4-x^2s^3,\ f(x)=x+3,\ \lambda=1,\ x\in[a,b]=[-1;1];$
6.17. $K(x,s)=x^2s^3-x^3s^2,\ f(x)=2x+5,\ \lambda=-4,\ x\in[a,b]=[-2;2];$

6.18. $K(x,s)=xs^3-x^2s^2,\ \ f(x)=x^2+1,\ \lambda=-1,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

6.19. $K(x,s)=x^3-xs^2,\ \ f(x)=e^x,\ \lambda=2,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

6.20. $K(x,s)=xs^4-x^3s^2,\ \ f(x)=e^x-1,\ \lambda=-1,\ x\in[a,b]=[-1;1].$

Завдання 9. *Розв'язати інтегральні рівняння Фредгольма ІІ роду з завдання 4 методом послідовних наближень .*

Завдання 11. *Розв'язати інтегральні рівняння Вольтерра ІІ роду з завдання 5 методом послідовних наближень .*

Завдання 14. *Знайти характеристичні числа та нормовані власні функції невиродженого симетричного ядра зведенням до крайової задачі на власні значення та записати з їх допомогою розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма ІІ роду* $y(x)=\lambda\int\limits_a^b K(x,s)y(s)ds+x$.

14.1. $K(x,s)=\begin{cases}\sin(s-1)\sin x,\ 0\le x\le s,\\ \sin s\sin(x-1),\ s\le x\le 1;\end{cases}$

14.2. $K(x,s)=\begin{cases}\cos\left(x+\pi/4\right)\cos\left(s-\pi/4\right),\ 0\le x\le s,\\ \cos\left(s+\pi/4\right)\cos\left(x-\pi/4\right),\ s\le x\le \pi;\end{cases}$

14.3. $K(x,s)=\begin{cases}(s-1)x,\ 0\le x\le s,\\ s(x-1),\ s\le x\le 1;\end{cases}$

14.4. $K(x,s)=\begin{cases}\mathrm{sh}(s-1)\,\mathrm{sh}\,x,\ 0\le x\le s,\\ \mathrm{sh}\,s\,\mathrm{sh}(x-1),\ s\le x\le 1;\end{cases}$

14.5. $K(x,s)=\begin{cases}-x,\ 0\le x\le s,\\ -s,\ s\le x\le 1;\end{cases}$

14.6. $K(x,s)=\begin{cases}-x-1,\ 0\le x\le s,\\ -s-1,\ s\le x\le 1;\end{cases}$

14.7. $K(x,s)=\begin{cases}\cos s\sin x,\ 0\le x\le s,\\ \sin s\cos x,\ s\le x\le \pi;\end{cases}$

14.8. $K(x,s)=0{,}5\cdot\sin|x-s|,\ 0\le x\le s\le\pi;$

14.9. $K(x,s)=\begin{cases} e^{-s}\operatorname{ch}x, & 0\le x\le s,\\ e^{-x}\operatorname{ch}s, & s\le x\le 2;\end{cases}$

14.10. $K(x,s)=\begin{cases} s(x+1), & 0\le x\le s,\\ (s+1)x, & s\le x\le 1;\end{cases}$

14.11. $K(x,s)=\begin{cases} s(2-x), & 0\le x\le s,\\ x(2-s), & s\le x\le 2;\end{cases}$

14.12. $K(x,s)=\begin{cases} \sin s\cos x, & 0\le x\le s,\\ \cos s\sin x, & s\le x\le \pi;\end{cases}$

14.13. $K(x,s)=\begin{cases} (x+1)(s-x), & 0\le x\le s,\\ (s+1)(x-s), & s\le x\le 1;\end{cases}$

14.14. $K(x,s)=\begin{cases} \sin\left(x+\pi/4\right)\sin\left(s-\pi/4\right), & 0\le x\le s,\\ \sin\left(s+\pi/4\right)\sin\left(x-\pi/4\right), & s\le x\le \pi;\end{cases}$

14.15. $K(x,s)=\begin{cases} e^{-s}\operatorname{sh}x, & 0\le x\le s,\\ e^{-x}\operatorname{sh}s, & s\le x\le 1;\end{cases}$

14.16. $K(x,s)=\begin{cases} \operatorname{ch}(s-1)\operatorname{ch}x, & 0\le x\le s,\\ \operatorname{ch}s\operatorname{ch}(x-1), & s\le x\le 1;\end{cases}$

14.17. $K(x,s)=\begin{cases} \cos(s-1)\cos x, & 0\le x\le s,\\ \cos s\cos(x-1), & s\le x\le \pi;\end{cases}$

14.18. $K(x,s)=\begin{cases} (x+3)(s-x), & 0\le x\le s,\\ (s+3)(x-s), & s\le x\le 3;\end{cases}$

14.19. $K(x,s)=\cos|x-s|,\ 0\le x\le s\le 2\pi;$

14.20. $K(x,s)=\begin{cases} (s-4)x, & 0\le x\le s,\\ s(x-4), & s\le x\le 4.\end{cases}$

Завдання 16. *Розв'язати інтегральні рівняння Вольтерри I роду з ядром типу згортки зведенням до рівняння II роду.*

16.1. $\int_0^x (x-s)\sin(x-s)y(s)ds = \sin^2 x;$

16.2. $\int_0^x (x-s)e^{x-s}y(s)ds = \frac{1}{2}e^{2x} - xe^x - \frac{1}{2};$

16.3. $\int_0^x e^{x-s}\,\mathrm{sh}(x-s)y(s)ds = e^{2x} - 2x - 1;$

16.4. $\int_0^x (x-s)\sin(x-s)y(s)ds = \sin^2 x;$

16.5. $\int_0^x (x-s)y(s)ds = \mathrm{ch}\,x - 1;$

16.6. $\int_0^x \sin(x-s)y(s)ds = \frac{x^4}{2};$

16.7. $\int_0^x e^{x-s}\cos(x-s)y(s)ds = xe^x;$

16.8. $\int_0^x (x-s)2^{x-s}y(s)ds = e^{2x} - x - 1;$

16.9. $\int_0^x \cos(x-s)y(s)ds = x\sin x;$

16.10. $\int_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds = 2\sin^2\frac{x}{2};$

16.11. $\int_0^x (x-s)^2 y(s)ds = x^2(x+1);$

16.12. $\int_0^x 3^{x-s}y(s)ds = x;$

16.13. $\int_0^x (x-s)y(s)ds = e^x - x - 1;$

16.14. $\int_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds = \mathrm{sh}\,x - x;$

16.15. $\int_0^x e^{x-s}y(s)ds = \frac{x^2}{2};$

16.16. $\displaystyle\int_0^x \sin(x-s)y(s)ds = 2\sin^2\frac{x}{2};$

16.17. $\displaystyle\int_0^x (x-s)^2 y(s)ds = x^3;$

16.18. $\displaystyle\int_0^x \cos(x-s)y(s)ds = x\cos x;$

16.19. $\displaystyle\int_0^x \sin(x-s)\cos(x-s)y(s)ds = 2x;$

16.20. $\displaystyle\int_0^x (x-s)3^{x-s} y(s)ds = e^x + x - 1.$

Завдання 18. *Розв'язати інтегральні рівняння Вольтерра з завдань 5 та 16 за допомогою перетворення Лапласа.*

Завдання 20. *Розв'язати з допомогою перетворення Лапласа інтегро-диференціальні рівняння типу згортки.*

20.1. $\displaystyle y''(x) - 4\int_0^x e^{-(x-s)}\left(y'(s)+y(s)\right)ds = e^{-x},\ \ y(0)=y'(0)=1;$

20.2. $\displaystyle y''(x) + \int_0^x \sin(x-s)\left(y''(s)+y(s)\right)ds = 2\cos x,\ \ y(0)=y'(0)=0;$

20.3. $\displaystyle y''(x) - y(x) - 4\int_0^x (x-s)\cos(x-s)y(s)ds = 0,\ \ y(0)=y'(0)=2;$

20.4. $\displaystyle y'(x) + y(x) + \int_0^x (x-s-1)y(s)ds = 0,\ \ y(0)=3;$

20.5. $\displaystyle y'(x) + 3y(x) + 2\int_0^x (x-s)y'''(s)ds = 3x+4,\ \ y(0)=3;$

20.6. $\displaystyle y'(x) - \int_0^x (x-s)y(s)ds = \cos x,\ \ y(0)=-2;$

20.7. $\displaystyle y''(x) - 4\int_0^x e^{-(x-s)}\left(y'(s)+y(s)\right)ds = 0,\ \ y(0)=y'(0)=0;$

20.8. $\displaystyle y''(x) + \int_0^x e^{2(x-s)}y'(s)ds = e^{2x},\ \ y(0)=y'(0)=0;$

20.9. $y''(x)+2y'(x)-2\int_0^x \sin(x-s)y'(s)ds=\cos x,\quad y(0)=y'(0)=0;$

20.10. $y''(x)+3y(x)+\int_0^x (x-s)^2 y'(s)ds=\dfrac{x^4+18x^2+12}{6},$

$y(0)=0,\ y'(0)=1$

20.11. $y'(x)+y(x)+\int_0^x (x-s)^2 y'''(s)ds=x+1,\quad y(0)=-1;$

20.12. $y'(x)+\int_0^x \cos(x-s)y(s)ds=x,\quad y(0)=1;$

20.13. $y'(x)+2\int_0^x (x-s)y(s)ds=\dfrac{1}{2}\sin x,\quad y(0)=1;$

20.14. $y'(x)+\int_0^x e^{-2(x-s)}y(s)ds=0,\quad y(0)=-3;$

20.15. $y'(x)-y(x)+\int_0^x (x-s)y'(s)ds-\int_0^x y(s)ds=x,\quad y(0)=6;$

20.16. $y''(x)+y(x)+\int_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds+\int_0^x \mathrm{ch}(x-s)y'(s)ds=\mathrm{ch}x,$

$y(0)=2,\ y'(0)=0;$

20.17. $y''(x)+2y'(x)+y(x)=\int_0^x (x-s)y''(s)ds+$

$+2\int_0^x \sin(x-s)y'(s)ds+\cos x,\quad y(0)=y'(0)=0;$

20.18. $y'(x)-3\int_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds=-e^{-x},\quad y(0)=2;$

20.19. $y''(x)-y(x)-\int_0^x e^{x-s}\sin(x-s)y(s)ds=e^x(1-\cos x),$

$y(0)=1,\ y'(0)=-1;$

20.20. $y''(x)-y'(x)-\int_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds=\dfrac{1}{2}x\,\mathrm{sh}\,x,\quad y(0)=y'(0)=0.$