Федак І.В.

Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри

Навчальний посібник

для студентів спеціальності «Прикладна математика»

Частина 3

Основні структури функціонального аналізу

Івано-Франківськ
2020

УДК 527.9(075.8)
ББК 22.16я73
Ф75

Рекомендовано вченою радою факультету математики та інформатики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» як навчальний посібник для студентів напряму підготовки “Прикладна математика”

Рецензенти:

Загороднюк А.В., зав. кафедри математичного і функціонального аналізу ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», доктор фізико-математичних наук, професор

Заторський Р.А., зав. кафедри диференціальних рівнянь та прикладної математики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника», доктор фізико-математичних наук, професор

Федак І.В.

Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Ч.3. Основні структури функціонального аналізу. – Івано-Франківськ: ПНУ імені Василя Стефаника, 2020. – 48с.

Навчальний посібник написаний у відповідності до програми з дисципліни «Функціональний аналіз та теорія міри» для студентів, які навчаються за напрямом підготовки «Прикладна математика» освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр». Частина 3 містить основні поняття та теореми про повні метричні простори та їх відображення, лінійні топологічні, нормовані, евклідові та гільбертові простори, ортогональні системи, вправи для самостійного розв’язування.

Може бути використаний студентами напрямів підготовки «Математика», «Середня освіта (математика)», «Статистика» при вивченні дисциплін «Теорія міри та інтеграла Лебега», «Функціональний аналіз».

ЗМІСТ

Лекція №9.

Повні метричні простори

9.1. Означення та приклади повних метричних просторів. Теорема про вкладені кулі.

9.2. Відображення метричних просторів. Принцип стискаючих відображень.

9.3. Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування рівнянь та систем лінійних рівнянь.

9.4. Розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь методом послідовних наближень.

9.1. *Означення та приклади повних метричних просторів. Теорема про вкладені кулі*

У лекції №2 ми ввели поняття ***границі послідовності*** (x_n) точок метричного простору (X,ρ), покладаючи:

$$x_0=\lim_{n\to\infty}x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\ \forall n>N\ \ \rho(x_n,x_0)<\varepsilon.$$

Можна записати ще й так: $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x_0)=0.$

У просторі R^1 таке означення співпадає з означенням границі числової послідовності, а у просторі $C[a,b]$ – з означенням рівномірної збіжності функціональної послідовності.

Теорема. Якщо послідовність (x_n) точок метричного простору (X,ρ) має границю, то ця границя єдина.

● Припустимо, що послідовність (x_n) має границі x_0 та x_0'. Тоді

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\ \forall n>N\ \ \rho(x_n,x_0)<\varepsilon,\ \rho\left(x_n,x_0'\right)<\varepsilon.$$

Звідси отримуємо, що $\rho\left(x_0,x_0'\right)\le\rho(x_n,x_0)+\rho\left(x_n,x_0'\right)<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$

А з довільності вибору $\varepsilon>0$ маємо $\rho\left(x_0,x_0'\right)=0,$ тобто $x_0'=x_0.$ ■

Послідовність (x_n) точок метричного простору (X,ρ) називається ***фундаментальною***, якщо для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер $N=N(\varepsilon)$, що $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ для всіх $n>N,\ m>N.$

Теорема 1. Якщо послідовність (x_n) збіжна, то вона й фундаментальна.

● Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $n > N$, $m > N$. Звідси за нерівністю трикутника для всіх $n > N$, $m > N$ отримуємо $\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_0) + \rho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

Обернене твердження до теореми 1 справедливе не у кожному метричному просторі. Наприклад, на множині раціональних чисел $X = Q$ з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$ послідовність десяткових наближень з недостачею числа $\sqrt{2}$ є фундаментальною, але не є збіжною, бо число $x_0 = \sqrt{2}$ ірраціональне.

Теорема 2. Якщо послідовність (x_n) фундаментальна, а деяка її підпослідовність $\left(x_{n_k}\right)$ збігається до x_0, то й $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

● З умов теореми випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $\rho\left(x_{n_k}, x_0\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\rho(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $n_k > N$, $n > N$, $m > N$. Покладаючи $m = n_k$, для всіх $n > N$ отримаємо $\rho(x_n, x_0) \le \rho(x_n, x_m) + \rho\left(x_{m=n_k}, x_0\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

Метричний простір, в якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називається ***повним метричним простором***.

З курсу математичного аналізу відомий ***критерій Коші*** збіжності числової послідовності: для того, щоб послідовність (x_n) була збіжною, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ знайшовся такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $|x_n - x_m| < \varepsilon$ для всіх $n > N$, $m > N$.

Оскільки у просторі R^1 метрика $\rho(x, y) = |x - y|$, то з критерію Коші безпосередньо випливає повнота даного простору.

Аналогічно отримуємо повноту простору $C[a,b]$ з критерію Коші рівномірної збіжності для функціональних послідовностей, врахувавши, що границя рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій – неперервна функція.

Теорема. Простір R^n повний.

● Нехай $\left(x^p\right)-$ довільна фундаментальна послідовність точок простору R^n, де $x^p=\left(x_1^p,x_2^p,...,x_n^p\right)$. Тоді для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер $N=N(\varepsilon)$, що $\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^p-y_k^q\right)^2}<\varepsilon$ для всіх $p>N,\ q>N$. Звідси випливає, що при кожному фіксованому k для всіх $p>N,\ q>N$ виконується нерівність $\left|x_k^p-x_k^q\right|<\varepsilon$. Тому кожна з числових послідовностей $\left(x_k^p\right)$ є фундаментальною, отже, і збіжною.

Нехай $x_k=\lim\limits_{p\to\infty}x_k^p,\ k=1,2,...,n,\quad x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$.

Тоді $\lim\limits_{p\to\infty}x^p=x\in R^n$. Отже, даний простір є повним. ■

Аналогічно доводять повноту просторів $R_p^n,\ p=0,\ p\geq1$. Повними будуть і простори m та $l_p,\ p\geq1$.

Як показує приклад простору раціональних чисел, не всі метричні простори є повними. Доведемо, що й простір $C_1[-1;1]$ неповний.

● Розглянемо послідовність неперервних на $[-1;1]$ функцій

$$x_n(t)=\begin{cases}-1,\ t\in\left[-1;-\dfrac{1}{n}\right],\\ nt,\ t\in\left[-\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{n}\right],\\ 1,\qquad t\in\left[\dfrac{1}{n};1\right].\end{cases}$$

Вона фундаментальна, бо $\int\limits_{-1}^{1}\left|x_n(t)-x_m(t)\right|dt<\dfrac{1}{\min\{m,n\}}$.

Припустимо, що границею цієї послідовності є неперервна на $[-1;1]$ функція $x_0(t)$, і розглянемо функцію $x(t)=\begin{cases}-1, & t\in[-1;0),\\ 1, & t\in[0;1].\end{cases}$

Внаслідок неперервності функції $x_0(t)$ інтеграл у лівій частині нерівності $\int\limits_{-1}^{1}|x(t)-x_0(t)|dt \le \int\limits_{-1}^{1}|x(t)-x_n(t)|dt+\int\limits_{-1}^{1}|x_n(t)-x_0(t)|dt$ є додатним, а перший доданок у правій частині дорівнює $\frac{1}{n}$ і прямує до нуля при $n\to\infty$. Тому при $n\to\infty$ інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}|x_n(t)-x_0(t)|dt$ прямувати до нуля не може. ■

Аналогічно доводиться неповнота довільного простору $C_1[a,b]$. Неповними є і всі простори $C_p[a,b]$, $p>1$.

Відзначимо, що для кожного неповного метричного простору (X,ρ) існує єдиний з точністю до ізометрії повний метричний простір (X',ρ'), що $X'=[X]$ і $\rho'(x,y)=\rho(x,y)$ для всіх точок $x,y\in X$. Такий простір називається ***доповненням простору*** (X,ρ). Зокрема, простір R^1 є доповненням простору раціональних чисел.

У математичному аналізі широко використовують так звану лему про вкладені відрізки. У функціональному аналізі аналогічну роль відіграє ***теорема про вкладені кулі***.

Теорема. Для того, щоб метричний простір (X,ρ) був повним, необхідно і достатньо, щоб у ньому всяка послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля, мала не порожній перетин.

● Необхідність. Нехай простір (X,ρ) повний, а $K_1[x_1,r_1]\supset K_2[x_2,r_2]\supset...\supset K_n[x_n,r_n]\supset...$ – послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких r_n прямують до нуля. Послідовність (x_n) центрів цих куль фундаментальна, бо

$\rho(x_m, x_n) < r_n$ при $m > n,$ а $r_n \to 0$ при $n \to \infty.$ Оскільки простір повний, то існує границя цієї послідовності $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n.$ Точка x є точкою дотику для всіх куль $K_n[x_n, r_n],$ бо кожна з цих куль містить всі точки послідовності $(x_n),$ починаючи з номера n відповідно. А оскільки такі кулі замкнені, то x належить всім цим кулям, а значить, і їхньому перетину.

Достатність. Нехай (x_n) – фундаментальна послідовність точок простору $(X, \rho).$ Внаслідок її фундаментальності ми можемо вибрати з неї таку підпослідовність $\left(x_{n_k}\right),$ що при кожному $k \in N$ для всіх $n \ge n_k$ будуть виконуватися нерівності $\rho\left(x_n, x_{n_k}\right) < \dfrac{1}{2^k}.$

Розглянемо послідовність вкладених одна в одну замкнених куль з центрами у точках цієї підпослідовності і радіусами $r_{n_k} = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ відповідно. За умовою теореми така послідовність куль має спільну точку, яку позначимо $x.$ Оскільки радіуси куль прямують до нуля, то x є границею підпослідовності $\left(x_{n_k}\right).$ Але послідовність (x_n) фундаментальна, то також $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x.$ ■

9.2. ***Відображення метричних просторів.***
Принцип стискаючих відображень.

Нехай (X, ρ_X) та (Y, ρ_Y) – два метричні простори і f – відображення, яке кожному $x \in X$ ставить у відповідність деякий елемент $y = f(x) \in Y.$

Це відображення називається ***неперервним в точці*** $x_0 \in X,$ якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0,$ що для всіх $x \in X$ таких, що $\rho_X(x, x_0) < \delta,$ виконується нерівність $\rho_Y\left(f(x), f(x_0)\right) < \varepsilon.$

Якщо ж відображення f неперервне у всіх точках множини $X,$ то його називають ***неперервним відображенням***.

У випадку, коли $(X,\rho_X)=(Y,\rho_Y)=R^1$ означення неперервного відображення зводиться до означення неперервної функції.

Неперервне відображення компактного простору теж є компактним простором. Відповідно, неперервне відображення компактної множини є компактною множиною.

Справедливе й таке ***узагальнення теореми Вейєрштраса:*** Якщо $M \in X -$ компактна множина, а $(Y,\rho_Y)=R^1,$ то неперервна функція, визначена на цій множині, є обмеженою і набуває на ній свого найбільшого та найменшого значень.

Відображення f називається ***рівномірно неперервним*** на X, якщо для кожного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta=\delta(\varepsilon)>0,$ що для всіх $x_1, x_2 \in X$ таких, що $\rho_X(x_1,x_2)<\delta,$ виконується нерівність $\rho_Y(f(x_1), f(x_2))<\varepsilon.$

Справедливе наступне ***узагальнення теореми Кантора:*** Якщо $M \in X -$ компактна множина, то неперервне відображення, визначене на цій множині, є рівномірно неперервним.

Відзначимо і таке важливе ***узагальнення відомої теореми*** з математичного аналізу: границя рівномірно збіжної послідовності неперервних відображень теж є неперервним відображенням.

Нехай $(X,\rho)-$ метричний простір. Відображення $A: X \to X$ цього простору самого в себе називається ***стискаючим***, якщо існує таке число $\alpha<1,$ що для будь-яких точок $x, y \in X$ виконується нерівність $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x,y).$

Усяке стискаюче відображення є неперервним. Це випливає з нерівності $\rho(Ax, Ax_0) \le \alpha\rho(x,x_0) \le \rho(x,x_0).$

Точка x називаються ***нерухомою точкою*** відображення $A,$ якщо $Ax=x.$

Теорема Банаха (принцип стискаючих відображень). У повному метричному просторі всяке стискаюче відображення має одну і тільки одну нерухому точку.

● Нехай $x_0 -$ довільна точка повного метричного простору $(X,\rho),$ $A: X \to X -$ стискаюче відображення.

Розглянемо послідовність точок цього простору

$$x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1,\ \dots,\ x_n = Ax_{n-1},\ \dots$$

Вона фундаментальна, бо, вважаючи $m > n$, отримуємо

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(Ax_{n-1}, Ax_{m-1}) \le \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \le \dots \le \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le$$
$$\le \alpha^n \left[\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\right] \le$$
$$\le \alpha^n \left[1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1}\right]\rho(x_0, x_1) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1) \to 0$$

при $n \to \infty$. Оскільки простір повний, то існує границя $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Внаслідок неперервності відображення A маємо

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Отже, $x -$ нерухома точка відображення A. Вона єдина, бо з рівностей $Ax = x$ та $Ay = y$ випливає, що

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y).$$

При $\alpha < 1$ це можливе лише у випадку $\rho(x, y) = 0$, тобто $y = x$. ■

Зауваження 1. Для компактного простору (X, ρ) вимогу стискання можна дещо послабити, замінивши її для всіх $x \ne y$ нерівністю $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$.

Зауваження 2. Для неперервного відображення A достатньо лише вимагати, щоб деякий степінь цього відображення був стискаючим відображенням.

9.3. *Застосування принципу стискаючих відображень до розв'язування рівнянь та систем лінійних рівнянь*

Принцип стискаючих відображень не лише доводить існування та єдиність нерухомої точки, а й дає практичний спосіб її знаходження.

Проілюструємо ***застосування*** цього принципу:

а) для розв'язування алгебраїчного рівняння $F(x) = 0$.

● Припустимо, що $F(a) < 0$, $F(b) > 0$, і для всіх $x \in [a, b]$ виконується нерівність $0 < K_1 \le F'(x) \le K_2$. Тоді при $\lambda > 0$ запишемо дане рівняння у рівносильному до нього вигляді $x - \lambda F(x) = x$.

Розглянемо функцію $f(x) = x - \lambda F(x)$.

Оскільки $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, то $1 - \lambda K_2 \le f'(x) \le 1 - \lambda K_1$.

Якщо вибрати $\lambda > 0$ так, щоб виконувалася нерівність $1 - \lambda K_2 > -1$, то для всіх $x \in [a,b]$ отримаємо

$$\left| f'(x) \right| \le \alpha = \max\left\{ \left|1 - \lambda K_2\right|, \left|1 - \lambda K_1\right| \right\} < 1.$$

За теоремою Лагранжа про скінченні прирости маємо

$$\left| f(x_1) - f(x_2) \right| = \left| f'(\xi) \right| \cdot \left| x_1 - x_2 \right|, \ \xi \in (x_1, x_2),$$

тому при такому λ функція $f(x)$ буде стискаючим відображенням відрізка $[a,b]$ в себе. За теоремою Банаха таке відображення матиме єдину нерухому точку x.

Цю точку можна знайти ***методом послідовних наближень***:

1) вибираємо довільну точку $x_0 \in (a,b)$;

2) послідовні наближення шукаємо за формулою $x_n = f(x_{n-1})$;

3) шукаємо $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Знайдена у такий спосіб нерухома точка відображення $f(x)$ буде єдиним розв'язком рівняння $F(x) = 0$ на відрізку $[a,b]$. ■

б). Розглянемо також відображення A метричного простору R^n в себе, яке задається системою лінійних рівностей

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_{i,} \quad i = 1, 2, ..., n.$$

● Оскільки $\rho^2(y', y'') = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \left(x'_j - x''_j \right) \right)^2 \le \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right) \rho^2(x', x'')$,

то звідси отримуємо таку достатню умову стискання $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \le \alpha < 1$.

За її виконання існує єдина точка $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ така, що

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_{i,} \quad i = 1, 2, ..., n,$$

причому послідовні наближення до цього розв'язку мають вигляд

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_{i,} \quad i = 1, 2, ..., n,$$

а в ролі $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$ можна вибрати довільну точку з простору R^n.

Аналогічне відображення можна розглядати і у просторах R_0^n та R_1^n. При цьому достатні умови стискання матимуть вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right| \le \alpha < 1,\ i = 1, 2, ..., n, \text{ у просторі } R_0^n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left|a_{ij}\right| \le \alpha < 1,\ \ j = 1, 2, ..., n, \text{ у просторі } R_1^n.$$

Самі ж послідовні наближення до розв'язку системи рівнянь

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_{i,} \quad i = 1, 2, ..., n,$$

шукають за тими ж формулами, що й у просторі R^n. ■

9.4. ***Розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь методом послідовних наближень***

а). Розглянемо диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ з початковою умовою $y(x_0) = y_0$, де функція $f(x, y)$ неперервна, а отже і обмежена так, що $\left|f(x, y)\right| \le M$, у деякому прямокутнику з центром у точці (x_0, y_0) і задовольняє у ньому умову Ліпшиця за змінною y: $\left|f\left(x, \overline{y}\right) - f\left(x, \overline{\overline{y}}\right)\right| \le L\left|\overline{y} - \overline{\overline{y}}\right|$.

● Така ***задача Коші*** рівносильна інтегральному рівнянню

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt.$$

Виберемо $d > 0$ так, щоб виконувалася умова $Ld < 1$, і визначимо відображення $Ay(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt$ для неперервних на відрізку

$\left[x_0 - d, x_0 + d\right]$ функцій, які задовольняють умову $\left|y(x) - y_0\right| \le Md.$ Простір таких функцій є замкненим у повному просторі $C\left[x_0 - d, x_0 + d\right].$ Тому він теж повний.

Оскільки $\left|Ay(x) - y_0\right| = \left|\int\limits_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)dt\right| \le Md,$ то відображення A переводить цей простір у себе. Крім того, воно стискаюче, бо

$$\left|A\bar{y}(x) - A\bar{\bar{y}}(x)\right| \le \int\limits_{x_0}^{x}\left|f\left(t, \bar{y}(t)\right) - f\left(t, \bar{\bar{y}}(t)\right)\right|dt \le Ld\left|\bar{y}(x) - \bar{\bar{y}}(x)\right|.$$

Отже, існує єдина його нерухома точка, а з нею і єдиний розв'язок задачі Коші в області $G = \left\{(x, y) : \left|x - x_0\right| \le d, \left|y - y_0\right| \le Md\right\}.$

Цей розв'язок можна знайти ***методом послідовних наближень***:

1) вибираємо довільну неперервну в околі точки x_0 функцію $y_0(x),$ наприклад, $y_0(x) \equiv y_0;$

2) шукаємо послідовні наближення за формулами

$$y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right)dt,\ n \in N;$$

3) знаходимо розв'язок $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x).$ ■

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші $\begin{cases} y' = 5 - y + 2x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

● Така задача рівносильна рівнянню $y(x) = \int\limits_0^x \left(5 - y(t) + 2t\right)dt.$

Виберемо $y_0(x) \equiv 0$ і будемо шукати послідовні наближення за формулами $y_n(x) = \int\limits_0^x \left(5 - y_{n-1}(t) + 2t\right)dt,\ n \in N.$ Тоді

$$y_1(x) = \int\limits_0^x (5 + 2t)dt = 5x + x^2,$$

$$y_2(x) = \int\limits_0^x \left(5 - \left(5t + t^2\right) + 2t\right)dt = 5x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3},$$

$$y_3(x)=\int_0^x\left(5-\left(5t-\frac{3t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)+2t\right)dt=5x-3\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}\right)+\frac{2x^4}{4!},\ldots$$

Методом математичної індукції легко довести, що

$$y_n(x)=5x-3\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n!}\right)-(-1)^n\cdot\frac{2x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отже, $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)=5x-3\left(e^{-x}-(1-x)\right)-0=-3e^{-x}+2x+3.$ ■

б). Розглянемо також лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt+f(x)$, ядро якого $K(x,t)$ неперервне у квадраті $Q=\{(x,t): a\le x\le b, a\le t\le b\}$, функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, а λ – довільний параметр.

● Відображення $Ay(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt+f(x)$ переводить простір $C[a,b]$ в себе. З нерівностей

$$\left|A\bar{y}(x)-A\bar{\bar{y}}(x)\right|\le|\lambda|\int_a^b|K(x,t)|\cdot\left|\bar{y}(t)-\bar{\bar{y}}(t)\right|dt\le$$

$$\le|\lambda|M(b-a)\max_{a\le t\le b}\left|\bar{y}(t)-\bar{\bar{y}}(t)\right|,\ M=\max_{(x,t)\in Q}|K(x,t)|,$$

отримуємо достатню умову стискання – нерівність $|\lambda|M(b-a)<1.$

За її виконання розв'язок такого інтегрального рівняння можна знайти ***методом послідовних наближень***:

1) вибираємо довільну неперервну функцію $y_0(x)$, наприклад, $y_0(x)\equiv f(x)$;

2) шукаємо послідовні наближення за формулами:

$$y_n(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y_{n-1}(t)dt+f(x),\ n\in N;$$

3) знаходимо розв'язок $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x).$ ■

Зауважимо, що даний метод буде застосовний і за виконання дещо слабшої вимоги $\left|\lambda\right|\max\limits_{a\le x\le b}\int\limits_a^b\left|K(x,t)\right|dt<1.$

Аналогічно можна розв'язувати і лінійні інтегральні рівняння Вольтерри другого роду $y(x)=\lambda\int\limits_a^x K(x,t)y(t)dt+f(x),\ a\le x\le b,$ ядро якого неперервне при $a\le t\le x\le b.$

Це рівняння є окремим випадком рівняння Фредгольма, але характерне тим, що має у просторі $C[a,b]$ єдиний розв'язок при кожному $\lambda\in R.$ При цьому послідовні наближення знаходять за формулами $y_n(x)=\lambda\int\limits_a^x K(x,t)y_{n-1}(t)dt+f(x),\ n\in N.$

Приклад 2. Розв'язати методом послідовних наближень інтегральне рівняння $y(x)=\int\limits_0^1 xt^2y(t)dt+x^2.$

● Це рівняння є лінійним інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду, причому: $\lambda=1,\ a=0,\ b=1,\ K(x,t)=xt^2,\ \ f(x)=x^2.$

Оскільки $M=\max\limits_{0\le x,t\le 1}\left|xt^2\right|=1,$ то умова $\left|\lambda\right|M(b-a)<1$ не виконується. Але $\left|1\right|\cdot\max\limits_{0\le x\le 1}\int\limits_0^1\left|xt^2\right|dt=\dfrac{1}{3}<1,$ тому метод послідовних наближень можна застосовувати.

Виберемо $y_0(x)=x^2$ і будемо шукати послідовні наближення за формулами $y_n(x)=\int\limits_0^1 xt^2y_{n-1}(t)dt+x^2,\ n\in N.$ Тоді

$$y_1(x)=\int\limits_0^1 xt^2\cdot t^2dt+x^2=\frac{1}{5}x+x^2,$$

$$y_2(x)=\int\limits_0^1 xt^2\cdot\left(\frac{1}{5}t+t^2\right)dt+x^2=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{4}\right)x+x^2,$$

$$y_3(x)=\int_0^1 xt^2\cdot\left(\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{4}\right)t+t^2\right)dt+x^2=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right)x+x^2,...$$

Методом математичної індукції доводимо, що

$$y_n(x)=\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{4^{n-1}}\right)x+x^2.$$

Отже, $y(x)=\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}x+x^2=\frac{4}{15}x+x^2.$ ■

Вправи до лекції №9

1. Дослідіть, чи фундаментальними у метричному просторі $C[0;1]$ послідовності функцій $x_n(t)=t^n$ та $x_n(t)=t^n-t^{n+1}$.
2. Доведіть, що у метричному просторі l_2 послідовність елементів (e_n): $e_1=(1,0,0,0,...)$, $e_2=(0,1,0,0,...)$, $e_3=(0,0,1,0,...)$, ... не має границі. Чи є ця послідовність фундаментальною?
3. Обґрунтуйте повноту просторів: а) R_0^n; б) R_1^n; в) l_2.
4. Доведіть, що метричний простір $C_2[0;1]$ не є повним.
5. Доведіть, що в теоремі про вкладені кулі перетин таких куль складається з однієї точки.
6. Доведіть, що відображення $Ax=x+\frac{1}{x}$ у повному метричному просторі $(X,\rho)=([1;+\infty),|x-y|)$ для всіх $x\neq y$ задовольняє нерівність $\rho(Ax,Ay)<\rho(x,y)$, але не має жодної нерухомої точки.
7. Доведіть, що рівняння $x^3+x-1=0$ має єдиний корінь на інтервалі $(0;1)$ і знайдіть цей корінь методом послідовних наближень з точністю до 0,01.
8. Методом послідовних наближень розв'яжіть задачі Коші:

а) $\begin{cases} y'=2x+y-1, \\ y(0)=0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} y'=3x-y+2, \\ y(0)=0. \end{cases}$ в) $\begin{cases} y'=x+y+4, \\ y(0)=0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} y' = x - y - 3, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ д) $\begin{cases} y' = x + 2y - 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$ е) $\begin{cases} y' = x - 2y + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}$

9. Методом послідовних наближень розв’яжіть лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду:

а) $y(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 t y(t)\,dt - x;$ б) $y(x) = \int_0^1 x^2 t y(t)\,dt + 4x;$

в) $y(x) = 2\int_0^1 x t^3 y(t)\,dt - 1;$ г) $y(x) = \lambda\int_0^1 x^2 t y(t)\,dt + x.$

10. Методом послідовних наближень розв’яжіть лінійні інтегральні рівняння Вольтерри другого роду:

а) $y(x) = x - \int_0^x (x-t)y(t)\,dt;$ б) $y(x) = 1 + \int_0^x (x-t)y(t)\,dt.$

Лекція №10

Лінійні топологічні та нормовані простори

10.1. Означення та приклади лінійних просторів.
10.2. Основні поняття, пов'язані з лінійними просторами.
10.3. Лінійні топологічні простори та нормовані простори.
10.4. Нормований простір L_1 та його повнота.

10.1. *Означення та приклади лінійних просторів*

Непорожня множина L називається ***лінійним простором***, якщо у ній введені операції додавання та множення на число такі, що:

1. $\forall x, y \in L \quad x + y = y + x$ (комутативність);
2. $\forall x, y, z \in L \;\; x + (y + z) = (x + y) + z$ (асоціативність);
3. $\exists 0 : \forall x \in L \quad x + 0 = x$ (існування нуля);
4. $\forall x \in L \;\; \exists - x : x + (-x) = 0$ (існування протилежного елемента);
5. $\forall x \in L \;\; 1 \cdot x = x$;
6. $\forall x \in L \;\; \alpha(\beta x) = (\alpha\beta) x$;
7. $\forall x \in L \;\; (\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$;
8. $\forall x, y \in L \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Якщо в L введена операція множення на комплексні числа, то такий простір називають ***комплексним лінійним простором***.

Наведемо приклади основних лінійних просторів:

1. R^1. Множина дійсних чисел зі звичайними операціями додавання та множення чисел.

2. $C[a,b]$. Множина неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій зі звичайними операціями додавання функцій та множення на число.

3. R^n. Множина впорядкованих наборів $(x_1, x_2, ..., x_n)$ дійсних чисел з покоординатними операціями додавання та множення на число.

4. C^n. Множина впорядкованих наборів $(x_1, x_2, ..., x_n)$ комплексних чисел з покоординатними операціями додавання та множення на число.

5. l_2. Множина послідовностей $(x_1, x_2, ..., x_n, ..)$ таких, що $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, з покоординатними операціями додавання та множення на число.

6. c. Множина збіжних послідовностей $(x_1, x_2, ..., x_n, ..)$ з покоординатними операціями додавання та множення на число.

7. c_0. Множина збіжних до нуля послідовностей $(x_1, x_2, ..., x_n, ..)$ з покоординатними операціями додавання та множення на число.

8. m. Множина обмежених послідовностей $(x_1, x_2, ..., x_n, ..)$ з покоординатними операціями додавання та множення на число.

9. R^{∞}. Множина довільних послідовностей $(x_1, x_2, ..., x_n, ..)$ дійсних чисел з покоординатними операціями додавання та множення на число.

Лінійні простори L та L^* називаються ***ізоморфними***, якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність, узгоджену з операціями, тобто

$$x \leftrightarrow x^*,\ y \leftrightarrow y^* \Rightarrow\ x + y \leftrightarrow x^* + y^*,\ \alpha x \leftrightarrow \alpha x^*.$$

Ізоморфні простори можна розглядати як різні реалізації одного і того ж лінійного простору

10.2. ***Основні поняття, пов'язані з лінійними просторами***

Елементи $x, y, ..., w$ лінійного простору L називаються ***лінійно незалежними***, якщо рівність $\alpha x + \beta y + ... + \lambda w = 0$ можлива лише за умови, що всі коефіцієнти $\alpha, \beta, ..., \lambda$ є нулями. У протилежному випадку таку систему елементів називають ***лінійно залежною***.

Нескінченна система елементів лінійного простору L є лінійно незалежною, якщо всі її скінченні підсистеми лінійно незалежні.

Якщо у просторі L існує лінійно незалежна система із n елементів, а всяка система із $n+1$ елементів лінійно залежна, то кажуть, що цей простір має ***розмірність*** n. Такими, зокрема, є простори R^n та C^n.

Довільна лінійно незалежна система із n елементів $n-$вимірного простору називається ***базисом*** цього простору.

Якщо у просторі L можна вказати лінійно незалежну систему із довільного скінченного числа елементів, то такий простір називають ***нескінченно вимірним***. Такими є простори: $C[a,b],\ l_2,\ c,\ c_0,\ m,\ R^\infty$.

Непорожня підмножина $L' \subset L$ називається ***підпростором*** простору $L,$ якщо вона сама утворює лінійний простір відносно тих же операцій, що й $L.$ Якщо $L' \subset L$ містить відмінні від нуля елементи і не співпадає з $L,$ то його називають ***власним підпростором*** простору $L.$ Наприклад, серед просторів $l_2,\ c_0,\ c,\ \ m,\ R^\infty$ кожен є власним підпростором наступного. Перетин будь-якої множини підпросторів простору L теж підпростором цього простору.

Якщо $\{x_\alpha\}$ – довільна множина елементів лінійного простору $L,$ то перетин усіх підпросторів цього простору, які містять $\{x_\alpha\},$ називають ***лінійною оболонкою*** множини $\{x_\alpha\}$ і позначають $L(\{x_\alpha\}).$ Лінійно незалежна система елементів лінійного простору L називається ***базисом Гамеля***, якщо її лінійна оболонка співпадає з $L.$

Елементи $x, y \in L$ називаються ***еквівалентними*** відносно підпростору $L' \subset L,$ якщо $x - y \in L'.$ Сукупність класів еквівалентних між собою елементів називають ***фактор-простором*** простору L по підпростору L' і позначають $L / L'.$

Якщо $x^* \in L/L',\quad y^* \in L/L'$ і $x \in x^*,\quad y \in y^*,$ то під ***сумою*** $x^* + y^* \in L/L'$ розуміють такий клас, який містить елемент $x + y,$ а під ***добутком*** $\alpha x^* \in L/L'$ – клас, який містить елемент $\alpha x.$

Фактор-простір із введеними таким чином операціями стає лінійним простором. Його розмірність називають ***корозмірністю*** підпростору L' у просторі $L.$

Якщо L' має корозмірність $n,$ то існують такі елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L,$ що кожен елемент $x \in L$ єдиним чином представляється у вигляді $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n + x',\ x' \in L'.$

10.3. *Лінійні топологічні та нормовані простори*

Множина L називається ***топологічним лінійним простором***, якщо:

1. L – лінійний простір;

2. L – топологічний простір;

3. Операції додавання і множення на числа в L неперервні відносно заданої топології.

Остання умова означає таке:

1) якщо $z_0 = x_0 + y_0$, то для кожного околу $O(z_0)$ знайдуться такі околи $O(x_0)$ та $O(y_0)$, що $x + y \in O(z_0)$ при $x \in O(x_0)$, $y \in O(y_0)$;

2) якщо $y_0 = \alpha_0 y_0$, то для кожного околу $O(y_0)$ існує такий окіл $O(x_0)$ і таке число $\delta > 0$, що $\alpha x \in O(y_0)$ при $x \in O(x_0)$, $|\alpha - \alpha_0| < \delta$.

Оскільки у топологічному лінійному просторі всякий окіл довільної точки x можна представити у вигляді $O(x) = x + O(0)$, то топологія такого простору цілком визначається системою околів нуля.

Наприклад, у топологічному лінійному просторі R^∞ кожен такий окіл нуля $U(k_1,...,k_m;\varepsilon)$ складається із тих елементів $x \in R^\infty$, які задовольняють умови: $|x_{k_i}| < \varepsilon$, $i = 1,...,m$.

З неперервності операцій додавання та множення на числа в топологічному лінійному просторі L безпосередньо випливають такі твердження:

1. Якщо множини X та Y відкриті, то і множина $X + Y$, тобто сукупність елементів вигляду $x + y$, $x \in X$, $y \in Y$, відкрита.

2. Якщо множина X відкрита, то і множина αX, тобто сукупність елементів вигляду αx, $x \in X$, відкрита при кожному $\alpha \neq 0$.

3. Якщо множина X замкнена, то і множина αX, замкнена при кожному α.

Важливим прикладом топологічних лінійних просторів є нормовані простори.

Лінійний простір L називають ***нормованим простором***, якщо кожному елементу $x \in L$ поставлено у відповідність таке дійсне число $\|x\|$, що виконуються умови:

1. $\|x\| \geq 0$, причому $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Всякий нормований простір стає метричним простором, якщо покласти $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Очевидно, що при цьому $\|x\| = \rho(x, 0)$.

Враховуючи ці співвідношення, нормовані простори позначають так само, як і відповідні їм метричні простори. Аналогічні вимоги ставляться і до їх елементів x. Наведемо приклади норм у деяких із цих просторів:

1. R^1. $\quad \|x\| = |x|$.
2. R^n. $\quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^{\ 2}}$.
3. R_1^n. $\quad \|x\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.
4. R_0^n. $\quad \|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.
5. $C[a,b]$. $\quad \|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$.
6. $C_2[a,b]$. $\quad \|x\| = \sqrt{\int_a^b (x(t))^2 \, dt}$.
7. $C_1[a,b]$. $\quad \|x\| = \int_a^b |x(t)| dt$.
8. l_2. $\quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$.
9. l_1. $\quad \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$.
10. m. $\quad \|x\| = \sup_{k \in N} |x_k|$.

Зауважимо, що з одного лінійного простору можна отримати різні нормовані простори, задавши у ньому по різному норми. У прикладах 2 – 4 ми отримали їх з лінійного простору R^n, а у прикладах 5 – 7 із лінійного простору $C[a,b]$.

Збіжність послідовності точок x_n нормованого простору до елемента x_0 цього простору визначають з умови $\|x_n - x_0\| \to 0$.

Послідовність точок x_n називається ***фундаментальною***, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ для всіх $n > N,\ m > N$.

Нормовані простори, в яких кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називаються ***банаховими просторами***.

Серед підпросторів нормованого простору розглядають лише його замкнені підпростори. Зокрема, найменший замкнений підпростір, який містить систему елементів $\{x_\alpha\}$, називається ***лінійним замиканням*** цієї системи. Якщо він співпадає з L, то таку систему елементів називають ***повною***.

10.4. *Нормований простір L_1 та його повнота*

З властивостей інтеграла Лебега випливає, що разом з функцією $f(x)$ інтегровним за Лебегом на множині A буде і добуток цієї функції на довільну сталу, а разом з двома такими функціями інтегровною за Лебегом на множині A буде і їхня сума. Ці властивості справедливі і для множин нескінченної міри.

Таким чином, для довільної вимірної множини X сукупність усіх інтегровних за Лебегом на X функцій утворює лінійний простір. Такий простір позначають $L_1(X)$.

Задамо норму у цьому просторі формулою $\| f \| = \int\limits_X | f(x)| d\mu.$

Виконання другої та третьої аксіом такої норми випливає з властивостей інтеграла Лебега. Справді,

$$\|\alpha f\| = \int\limits_X |\alpha f(x)| d\mu = |\alpha| \int\limits_X | f(x)| d\mu = |\alpha| \cdot \| f \|,$$

$$\|f+g\|=\int_X |f(x)+g(x)|d\mu \le \int_X |f(x)|d\mu+\int_X |g(x)|d\mu=\|f\|+\|g\|.$$

Але перша умова виконується лише частково. Зокрема, за наслідком з нерівності Чебишова з $\|f\|=0$ отримуємо лише $f(x)\sim 0.$

У зв'язку з цим розглядають не самі функції, а класи еквівалентних між собою функцій. Зокрема, клас $f=0$ буде складатися з функцій, які майже скрізь на X дорівнюють нулю.

Норму кожного такого класу f можна визначити за записаною вище формулою, вибираючи в ролі функції $f(x)$ довільного представника цього класу.

Збіжність за нормою цього простору називають ***збіжністю в середньому***, про яку ми вже говорили у лекції №7.

Теорема. Простір $L_1(X)$ повний.

● Нехай $\{f_n\}$ – фундаментальна послідовність елементів із $L_1(X)$, тобто $\|f_n-f_m\|\to 0$ при $n, m\to\infty$.

Тоді існує зростаюча послідовність індексів $\{n_k\}$ така, що

$$\|f_{n_k}-f_{n_{k+1}}\|=\int_X \left(f_{n_k}(x)-f_{n_{k+1}}(x)\right)d\mu<\frac{1}{2^k}.$$

З цієї нерівності та теореми Леві випливає, що ряд $|f_{n_1}(x)|+|f_{n_2}(x)-f_{n_1}(x)|+\ldots$, а з ним і ряд $f_{n_1}(x)+\left(f_{n_2}(x)-f_{n_1}(x)\right)+\ldots$ збігається майже скрізь на X до деякої інтегровної за Лебегом на множині X функції $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$.

Внаслідок фундаментальності послідовності $\{f_n\}$ для кожного фіксованого $\varepsilon>0$ і достатньо великих k та l отримаємо нерівність

$$\int_X |f_{n_k}(x)-f_{n_l}(x)|d\mu<\varepsilon.$$

За теоремою Фату у ній можна перейти до границі при $l\to\infty$ і отримати нерівність $\int\limits_X |f_{n_k}(x)-f(x)|d\mu\le\varepsilon$, з якої випливатиме збіжність f_{n_k} до f за нормою простору $L_1(X)$.

А з того, що підпослідовність фундаментальної послідовності $\{f_n\}$ збігається до f, випливає, що й сама послідовність є збіжною до f. Отже, повнота простору $L_1(X)$ доведена. ■

Зауважимо, що у випадку $X=[a,b]$ він є доповненням неповного нормованого простору $C_1[a,b]$.

Вправи до лекції №10

1. Доведіть, що множина $C'[a,b]$ неперервно диференційованих на відрізку $[a,b]$ функцій зі звичайними операціями додавання і множення на число утворює лінійний підпростір у просторі $C[a,b]$.
2. Перевірте, чи можна у просторі $C'[a,b]$ задати норму формулою $\|x\|=\max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$. Вкажіть хоч один підпростір цього простору, у якому така формула визначає норму.
3. Доведіть, що у $C'[a,b]$ норма може бути задана формулою
$$\|x\|=\max_{t\in[a,b]}|x(t)|+\max_{t\in[a,b]}|x'(t)|.$$
4. Перевірте виконання аксіом норми у просторах R^1, R^n, R_1^n, R_0^n, $C[a,b]$, $C_2[a,b]$, $C_1[a,b]$, l_2, l_1 та *m.*
5. Для яких μ норма у лінійному просторі R^1 може бути визначена за формулою $\|x\|=|x|^{\mu}$?
6. Доведіть, що у лінійному просторі R^n норма не може бути визначена формулою $\|x\|=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{|x_k|}$.
7. Обґрунтуйте, що кожен нормований простір є лінійним топологічним простором
8. Перевірте, чи збігаються у нормованих просторах $C[0;1]$ та $L_1[0;1]$ послідовності функцій:

   а) $x_n(t)=t^n-t^{2n}$; б) $x_n(t)=e^{-\frac{t}{n}}$; в) $x_n(t)=ne^{-nt}$;

г) $x_n(t) = \sin t - \sin\frac{t}{n}$; д) $x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, \ t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, \quad t \notin \left[0, \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$

9. Дослідіть на збіжність у просторах l_1 та l_2 послідовності:

а) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0, \ldots\right)$; б) $x_n = \left(\underbrace{1, 0, \ldots, 0, \frac{1}{n}}_{n}, 0, \ldots\right)$;

в) $x_n = \left(\underbrace{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, \ldots\right)$; г) $x_n = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{n-1} \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\right)$.

10. Проаналізуйте суттєвість та необхідність рівномірної збіжності для збіжності в середньому на прикладах:

а) $f_n(x) = \begin{cases} n, \ x \in \left(0; \frac{1}{n}\right), \\ 0, \ x \in \left(\frac{1}{n}; 1\right). \end{cases}$ б) $f_n(x) = \begin{cases} 1, \ x \in \left(0; \frac{1}{n}\right), \\ 0, \ x \in \left(\frac{1}{n}; 1\right). \end{cases}$

Лекція №11.

Евклідові простори

11.1. Означення та приклади евклідових просторів.

11.2. Нерівність Коші-Буняковського та аналог теореми Піфагора.

11.3. Евклідовий простір L_2 та його повнота.

11.4. Збіжність у середньому квадратичному.

11.1. *Означення та приклади евклідових просторів*

Одним із способів введення норми в лінійному просторі є її задавання з допомогою скалярного добутку.

Скалярним добутком у дійсному лінійному просторі L називається дійсна функція (x, y), яка визначена для кожної пари елементів $x, y \in L$ і задовольняє такі умови:

1. $(x, x) \geq 0,$ причому $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $(x, y) = (y, x);$
3. $(\alpha x, y) = \alpha (x, y);$
4. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2 y).$

Лінійний простір із заданим у ньому скалярним добутком називається ***евклідовим простором***. Такий простір стає нормованим, якщо в ньому визначити норму $\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$

Прикладами евклідових просторів є такі простори:

1. $R^n.$ $\qquad (x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$
2. $l_2.$ $\qquad (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$
3. $C_2[a, b].$ $\qquad (x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt.$

У випадку комплексного лінійного простору L наведена вище система аксіом скалярного добутку є суперечливою. Справді, за нею для $x \neq 0$ отримуємо, що

$$(ix, ix) = i(x, ix) = i(ix, x) = i^2 (x, x) = -(x, x) < 0.$$

Щоб уникнути суперечності, достатньо другу з аксіом скалярного добутку записати у вигляді $(x,y)=\overline{(y,x)}$, де число $\overline{(y,x)}$ є комплексно спряженим до (y,x).

Зрозуміло, що при цьому дійсний евклідовий простір виявиться окремим випадком комплексного евклідового простору.

Прикладами комплексних евклідових просторів є простори:

1. C^n. $\quad (x,y)=\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$

2. l_2. $\quad (x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$

3. $C_2[a,b]$. $\quad (x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt.$

З курсу геометрії відомо, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін. Аналог цієї властивості для евклідових просторів має вигляд:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right).$$

● Справді, у кожному такому просторі

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)=$$
$$=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)+(x,x)-(x,y)-(y,x)+(y,y)=$$
$$=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right). \quad \blacksquare$$

Така рівність є не лише необхідною, а й достатньою умовою для того, щоб норму у лінійному просторі можна було задати з допомогою добутку. Тому її називають ***характеристичною властивістю*** евклідових просторів.

Розглянемо відповідні приклади нормованих просторів:

1. $R_p^n,\ p\ge 1$. Його норма $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ може бути задана скалярним добутком лише при $p=2$.

● Справді, взявши $x=(1,1,0,\ldots,0)$, $y=(1,-1,0,\ldots,0)$, будемо мати

$$\|x\| = \|y\| = 2^{\frac{1}{p}}, \ \|x+y\| = \|x-y\| = 2.$$

Отже, з характеристичної властивості отримаємо рівняння $2^2 + 2^2 = 2\left(2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}}\right)$, єдиним коренем якого є $p = 2$. ■

Зауважимо, що ці ж елементи x та y не задовольняють характеристичну властивість і у просторі R_0^n. Тому його норму теж не можна задати скалярним добутком.

2. $l_p, \ p \ge 1, \ \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

● При $p \ne 2$ елементи $x = (1,1,0,...,0,...)$, $y = (1,-1,0,...,0,...)$, не задовольняють характеристичну властивість евклідових просторів. ■

Їх також можна використати і для доведення неевклідовості простору m.

3. Доведемо, що і у просторі $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ норма не може бути задана скалярним добутком.

● Справді, у цьому просторі для функцій $x(t) = \cos t, \ \ y = \sin t$ отримуємо: $\|x\| = \|y\| = 1, \ \|x+y\| = \sqrt{2}, \ \|x-y\| = 1.$

Але $\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 \ne 2\left(1^2 + 1^2\right)$. ■

Аналогічно може бути доведена неевклідовість довільного простору $C[a,b]$.

11.2. *Нерівність Коші-Буняковського та аналог теореми Піфагора*

Розглянемо у дійсному евклідовому просторі при $x \ne 0, \ \lambda \in R$ невід'ємну квадратичну функцію

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x - y, \lambda x - y) = \lambda^2 (x,x) - 2\lambda(x,y) + (y,y) =$$
$$= \|x\|^2 \lambda^2 - 2(x,y)\lambda + \|y\|^2.$$

Її дискримінант $D = \left(2(x,y)\right)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \le 0.$

Звідси отримуємо нерівність $\left|(x,y)\right| \le \|x\|\cdot\|y\|$, яку називають ***нерівністю Коші-Буняковського***. Вона справедлива для всіх елементів x, y евклідового простору.

У конкретних евклідових просторах така нерівність набуває вигляду:

1. R^n. $$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2}.$$

2. l_2. $$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k\right| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} {x_k}^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} {y_k}^2}.$$

3. $C_2[a,b]$. $$\left|\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}\cdot\sqrt{\int_a^b y^2(t)\,dt}.$$

Останню нерівність називають ***інтегральною нерівністю Коші-Буняковського.***

Нерівність Коші-Буняковського дає змогу ввести поняття ***кута*** між довільними ненульовими елементами x, y цього простору за формулою $\cos\varphi = \dfrac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$, $0 \le \varphi \le \pi.$

Зокрема, якщо $\cos\varphi = 0$, то такі елементи називаються ***ортогональними***. Зрозуміло, що умова ортогональності ненульових елементів x, y рівносильна рівності $(x,y) = 0.$

У комплексному евклідовому просторі поняття кута між елементами, як правило, не вводять. Але умова ортогональності $(x,y) = 0$ зберігається.

Доведемо також своєрідний ***аналог теореми Піфагора***: у дійсному евклідовому просторі ненульові елементи x та y ортогональні тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

● Справді, адже $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x,x)+2(x,y)+(y,y)=(x,x)+(y,y)\Leftrightarrow (x,y)=0 \ ■$$

У комплексних евклідових просторах з ортогональності ненульових елементів x та y записана рівність випливає. Але обернене твердження неправильне.

11.3. ***Евклідовий простір*** L_2 ***та його повнота***

Будемо розглядати функції, ***інтегровні з квадратом*** на множині X, тобто такі, що $\int\limits_X f^2(x)\,d\mu<\infty.$

Оскільки $\left|f(x)g(x)\right|\le\frac{1}{2}\left[f^2(x)+g^2(x)\right],$ то добуток довільних двох інтегровних з квадратом функцій є інтегровною за Лебегом на множині X функцією.

Зокрема, якщо $\mu(X)<\infty,$ то, покладаючи $g(x)=1,$ отримаємо інтегровність за Лебегом інтегровної з квадратом функції $f(x).$ При цьому на основі інтегральної нерівності Коші-Буняковського

$$\left(\int\limits_X f(x)\,d\mu\right)^2\le\mu(X)\int\limits_X f^2(x)\,d\mu.$$

Відзначимо, що, навпаки, з інтегровності функції $f(x)$ її інтегровність з квадратом не випливає. У цьому легко переконається на прикладі функції $y=\frac{1}{\sqrt{x}},\ x\in(0,1).$

З рівності $\int\limits_X\left(\alpha f(x)\right)^2 d\mu=\alpha^2\int\limits_X f^2(x)\,d\mu$ та нерівності

$$\left(f(x)+g(x)\right)^2\le f^2(x)+2\left|f(x)g(x)\right|+g^2(x)$$

випливає, що сукупність усіх інтегровних з квадратом на вимірній множині X функцій утворює лінійний простір. Цей простір позначають $L_2(X).$

Розглядаючи тут, як і у випадку $L_1(X),$ класи еквівалентних між собою функцій, визначимо у цьому просторі ***норму*** за формулою

$$\|f\|=\sqrt{\int_X f^2(x)\,d\mu}.$$

Відзначимо, що аналогічно можна було б отримати і простір $L_2(X,\mu)$ класів еквівалентних між собою функцій, інтегровних з квадратом на X за довільною повною $\sigma-$адитивною мірою μ.

Теорема. Простір $L_2(X)$ при $\mu(X)<+\infty$ повний.

● Нехай $\{f_n\}-$ фундаментальна послідовність елементів із $L_2(X)$, тобто $\|f_n-f_m\|\to 0$ при $n, m\to\infty$. Тоді

$$\int_X |f_n(x)-f_m(x)|\,d\mu\le\sqrt{\mu(X)\int_X (f_n(x)-f_m(x))^2\,d\mu}=\sqrt{\mu(X)}\cdot\|f_n-f_m\|$$

отримаємо, що ця послідовність фундаментальна і у просторі $L_1(X)$.

Тому знайдеться така її підпослідовність $\{f_{n_k}\}$, яка збігається майже скрізь на X до функції деякої функції $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$.

Для кожного фіксованого $\varepsilon>0$ і достатньо великих k та l отримаємо нерівність $\int_X (f_{n_k}(x)-f_{n_l}(x))^2\,d\mu<\varepsilon$, в якій внаслідок теореми Фату можна перейти до границі при $l\to\infty$ і отримати нерівність $\int_X (f_{n_k}(x)-f(x))^2\,d\mu\le\varepsilon$.

З останньої нерівності випливає збіжність f_{n_k} до f за нормою простору $L_2(X)$. А з того, що підпослідовність фундаментальної послідовності $\{f_n\}$ збігається до f, отримуємо, що й послідовність $\{f_n\}$ є збіжною до f. ■

У випадку $X=[a,b]$ такий банаховий простір є доповненням неповного нормованого простору $C_2[a,b]$.

Зауважимо, що при доведенні цієї теореми ми суттєво використовували умову $\mu(X)<+\infty$. Якщо вона не виконується, то не кожна функція з $L_2(X)$ належатиме простору $L_1(X)$.

Наприклад, функція $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ на $X=(-\infty,+\infty)$.

Так само з фундаментальності послідовності у просторі $L_2(X)$ не випливатиме її фундаментальність у просторі $L_1(X)$.

Але, не зважаючи на це, простір $L_2(X)$ буде банаховим і у випадку $\mu(X)=+\infty$.

Такий простір стає евклідовим, якщо у ньому визначити скалярний добуток $(f,g)=\int\limits_X f(x)g(x)d\mu.$

У випадку комплекснозначних функцій такий скалярний добуток визначають за формулою $(f,g)=\int\limits_X f(x)\overline{g(x)}d\mu$.

У загальному випадку можна розглядати функції, інтегровні зі степенем $p,$ і простори $L_p(X)$ та $L_p(X,\mu)$ при довільному дійсному $p\ge 1$ з нормою $\|f\|=\left(\int\limits_X |f(x)|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$. Але евклідовими такі простори будуть лише при $p=2$.

11.4. ***Збіжність у середньому квадратичному***

Збіжність за нормою простору $L_2(X)$ називають ***збіжністю у середньому квадратичному***.

Для $\mu(X)<\infty$ з нерівності $\sqrt{\int\limits_X (f_n(x)-f(x))^2 d\mu}<\varepsilon$ випливає, що $\int\limits_X |f_n(x)-f(x)|d\mu\le\varepsilon\sqrt{\mu(X)}$. Тому при $\mu(X)<\infty$ із збіжності послідовності $f_n(x)$ до функції $f(x)$ у середньому квадратичному випливає її збіжність до $f(x)$ і в середньому. Проте обернене до цього твердження неправильне.

Якщо ж $\mu(X)=+\infty$, то із збіжності у середньому квадратичному збіжність у середньому не випливає.

Наприклад, у просторі $L_2(-\infty,+\infty)$ послідовність функцій $f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & |x|\le n,\\ 0, & |x|>n,\end{cases}$ збігається до функції $f(x)=0$, але вона не збігається до жодної функції у просторі $L_1(-\infty,+\infty)$.

Доведемо також, що при $\mu(X)<\infty$ із рівномірної збіжності послідовності $f_n(x)$ до функції $f(x)$ випливає її збіжність до $f(x)$ і в середньому квадратичному.

● З рівномірної збіжності випливає існування для кожного $\varepsilon>0$ такого числа $N,$ що $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ для всіх $n>N,$ $x\in A.$ Тоді $\sqrt{\int\limits_X \left(f_n(x)-f(x)\right)^2 d\mu}<\varepsilon\sqrt{\mu(X)}$ звідки внаслідок довільності $\varepsilon>0$ та скінченності міри $\mu(X)$ і випливає збіжність у середньому квадратичному. ■

Умова рівномірної збіжності тут є суттєвою, але, як і для збіжності у середньому, вона не є необхідною.

Обернене твердження неправильне. Навіть більше, із збіжності в середньому квадратичному не випливає збіжності хоч в одній точці множини X.

Але, якщо послідовність інтегровних за Лебегом на множині X скінченної міри функцій $f_n(x)$ збігається на множині X до функції $f(x)$ в середньому квадратичному, то з неї можна вибрати підпослідовність, яка збігається на цій множині до функції $f(x)$ майже скрізь.

Щодо множин нескінченної міри, то на них з рівномірної збіжності збіжність у середньому квадратичному не випливає.

Вправи до лекції №11

1. Знайдіть усі значення коефіцієнтів α та $\beta,$ при яких функція $\varphi(x,y)=\alpha x_1y_1+\beta x_2y_2$ задає скалярний добуток у просторі $R^2.$

2. Доведіть, що норма $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$ у лінійному просторі $C[a,b]$ не може бути задана за допомогою скалярного добутку.
3. Перевірте, чи може бути задана за допомогою скалярного добутку норма $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]}|x'(t)|$ у просторі $C'[a,b]$ неперервно диференційованих на відрізку $[a,b]$ функцій?
4. Перевірте виконання характеристичної властивості евклідових просторів для норми простору m.
5. Доведіть, що в евклідовому просторі l_2 елементи $e_1 = (1,0,0,0,...)$, $e_2 = (0,1,0,0,...)$, $e_3 = (0,0,1,0,...)$, ... попарно ортогональні.
6. Обґрунтуйте, що у комплексних евклідових просторах з рівності $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ не випливає рівність (x,y).
7. Використовуючи інтегральну нерівність Коші-Буняковського, доведіть нерівність $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ для норми простору $L_2(X)$.
8. Доведіть, що для збіжності у середньому квадратичному умова рівномірної збіжності є суттєвою, але не є необхідною.
9. Доведіть, що послідовність функцій $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}}, & |x| \le n, \\ 0, & |x| > n, \end{cases}$ на множині $X = (-\infty, +\infty)$ збігається рівномірно до функції $f(x) = 0$, але не збігається на цій множині до жодної функції у середньому квадратичному.
10. Дослідіть, чи збігаються у просторі $L_2[0;1]$ послідовності:

а) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$; б) $x_n(t) = e^{-\frac{t}{n}}$; в) $x_n(t) = ne^{-nt}$;

г) $x_n(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & t \notin \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$ д) $x_n(t) = \begin{cases} n^2 t, & t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right), \\ \dfrac{nt}{n^2+1}, & t \notin \left[0, \dfrac{1}{n}\right). \end{cases}$

Лекція №12.

Ортогональні системи та ряди Фур'є

12.1. Базис евклідового простору. Приклади базисів.
12.2. Ряди Фур'є та нерівність Бесселя.
12.3. Зв'язок між замкненими, повними та тотальними системами
12.4. Гільбертові простори. Теорема про ізоморфізм.

12.1. ***Базис евклідового простору. Приклади базисів***

Система $\{x_\alpha\}$ ненульових елементів x_α евклідового простору E називається ***ортогональною***, якщо $\forall \alpha \neq \beta \quad (x_\alpha, x_\beta) = 0.$

Теорема. Кожна ортогональна система ненульових елементів x_α евклідового простору E є лінійно незалежною.

● Нехай $\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0.$

Оскільки система $\{x_\alpha\}$ ортогональна, то

$$\left(\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n}, x_{\alpha_k}\right) = \lambda_k \left(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}\right) = 0, \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Але $\left(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}\right) \neq 0,$ то $\lambda_k = 0$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n.$ Тому ця система лінійно незалежна. ■

Якщо ортогональна система $\{x_\alpha\}$ повна, то вона називається ***ортогональним базисом***. Якщо при цьому норма кожного елемента цієї системи дорівнює 1, то її називають ***ортогональним нормованим базисом***. Якщо система $\{x_\alpha\}$ ортогональна, то $\left\{\dfrac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}$ – ортогональна нормована система.

Наведемо приклади ортогональних базисів:

1. У просторі R^n ортогональний нормований базис утворюють елементи $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$

2. Ортогональний нормований базис простору l_2 складається з нескінченного числа елементів

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots),\ e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots$$

3. У просторах $C_2\left[a;b\right]$ та $L_2\left[a;b\right]$ серед різних ортогональних базисів, які можна задати у них, найважливішою є тригонометрична система, що складається з функцій $\frac{1}{2}, \cos\frac{2\pi nt}{b-a}, \sin\frac{2\pi nt}{b-a}, \quad n=1,2,3,...$

Зокрема, ортогональний базис просторів $C_2\left[-\pi,\pi\right]$ та $L_2\left[-\pi,\pi\right]$ утворюють функції $\frac{1}{2}, \cos nt, \sin nt, \quad n=1,2,3,...$.

Обґрунтуємо повноту тригонометричної системи.

● За теоремою Вейєрштраса кожну неперервну функцію, яка набуває на кінцях відрізка $\left[a;b\right]$ рівних значень, можна подати як границю рівномірно збіжної послідовності лінійних комбінацій елементів такої системи. Така послідовність збігатиметься до тієї ж функції і за нормами просторів $C_2\left[a;b\right]$ та $L_2\left[a;b\right]$.

Якщо ж $f-$ довільна функція з вказаних просторів, то її, у свою чергу, можна подати як границю за нормами цих просторів послідовностей функцій f_n, кожна з яких збігається з функцією f на відрізку $\left[a;b-\frac{1}{n}\right]$ і є лінійною на відрізку $\left[b-\frac{1}{n};b\right]$, причому $f_n\left(b\right)=f\left(a\right)$. ■

Відзначимо, що у кожному сепарабельному евклідовому просторі існує ортогональний базис, який складається не більше як зі зліченного числа елементів.

● Нехай така ортогональна система $\{\varphi_\alpha\}$ є ще й нормованою. Тоді $\|\varphi_\alpha\|=1$ для кожного α та $\|\varphi_\alpha-\varphi_\beta\|=\sqrt{2}, \alpha\neq\beta$. Тому околи елементів цієї системи з радіусами 0,5 попарно не перетинаються. У кожному з них має бути принаймні один елемент зліченної скрізь щільної множини сепарабельного простору. Отже, таких околів, а з ними і елементів базису, не більше як зліченна кількість. ■

З кожної лінійно незалежної системи методом ортогоналізації можна отримати ортогональну нормовану систему, елементи якої будуть лінійними комбінаціями елементів початкової системи.

Застосовуючи такий метод до системи функцій $1, x, x^2, \ldots$ у просторі $L_2[-1;1]$, отримаємо відмінну від тригонометричної ортогональну систему многочленів Лежандра, яка з точністю до сталого множника збігається з многочленами $R_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^2 - 1\right)^n$.

У просторі $L_2(-\infty;+\infty)$ ортогональний базис можна отримати, ортогоналізуючи систему елементів $x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$, $n = 0,1,2,\ldots$, а у просторі $L_2(0;+\infty)$ – ортогоналізуючи систему функцій $x^n e^{-x}$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Можна також розглядати поняття ***ортогональності з вагою*** $g(x)$, покладаючи $\int_X \varphi_n(x)\varphi_m(x)g(x)d\mu = 0$ при $m \neq n$.

Зокрема, вибравши $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, ми отримаємо у просторі $L_2[-1;1]$ систему ***многочленів Чебишова***, які визначаються формулою $T_n(x)\cos(n\arccos x)$, $n = 1,2,3,\ldots$.

12.2. ***Ряди Фур'є та нерівність Бесселя***

Вибираючи у просторі R^n базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, ми можемо довільний елемент цього простору записати у вигляді $x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$, де $c_k = (x, e_k)$.

Нехай тепер E – нескінченно вимірний евклідовий простір, і $\{\varphi_k\}$ – ортогональна нормована система елементів цього простору. Поставимо у відповідність довільному елементу $x \in E$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$, де $c_k = (x, \varphi_k)$, $k = 1,2,\ldots$.

Такий ряд називається ***рядом Фур'є*** елемента x за системою $\{\varphi_k\}$, а числа c_k – ***коефіцієнтами Фур'є*** цього елемента.

Природно виникають питання про збіжність цього ряду, а у випадку збіжності – про співпадання його суми з елементом x.

Для відповіді на них, підберемо при заданому $n \in N$ коефіцієнти α_k, $k = 1, 2, ..., n,$ так, щоб мінімізувати норму $\|x - S_n\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right\|$.

Оскільки $\{\varphi_k\}$ – ортогональна нормована система, то

$$\|x - S_n\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$

$$= (x, x) - 2\left(x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) =$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2 .$$

Мінімум такого виразу досягається при $\alpha_k = c_k$, $k = 1, 2, ..., n,$ причому у такому разі $\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$.

Таким чином, ми отримали, що ***найкраще наближення*** елемента x дають часткові суми його ряду Фур'є.

Оскільки завжди $\|x - S_n\|^2 \geq 0,$ то з останньої рівності випливає, що $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|x\|^2$ при кожному $n \in N$.

Перейшовши тут до границі, отримаємо нерівність $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|x\|^2$, яку називають ***нерівністю Бесселя***.

У комплексних евклідових просторах нерівність Бесселя матиме вигляд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2$.

Ортогональна нормована система $\{\varphi_k\}$ називається ***замкненою***, якщо для будь-якого $x \in E$ виконується рівність $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2$.

Цю рівність називають ***рівністю Парсеваля***. У комплексних евклідових просторах вона набуває вигляду $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|x\|^2$.

З тотожності $\left\|x-S_n\right\|^2=\left\|x\right\|^2-\sum\limits_{k=1}^{n}c_k^2$ випливає, що замкненість ортогональної нормованої системи $\left\{\varphi_k\right\}$ рівносильна тому, що для кожного $x\in E$ часткові суми ряду Фур'є збігаються до x за нормою цього простору.

Прикладом замкненої ортогональної системи функцій у просторі $L_2\left[-\pi;\pi\right]$ є система функцій: $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \dfrac{\cos nt}{\sqrt{\pi}},\ \dfrac{\sin nt}{\sqrt{\pi}},\quad n=1,2,3,\ldots$.

Ряд Фур'є для функції $f\in L_2\left[-\pi;\pi\right]$ має вигляд:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

а коефіцієнти Фур'є визначаються рівностями: $a_0=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{[-\pi;\pi]}f\left(x\right)d\mu$,

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{[-\pi;\pi]}f\left(x\right)\cos nx\,d\mu$, $b_n=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{[-\pi;\pi]}f\left(x\right)\sin nx\,d\mu$.

Для кожної функції $f\in L_2\left[-\pi;\pi\right]$ її тригонометричний ряд Фур'є збігається до неї у середньому квадратичному.

Рівність Парсеваля для цієї системи функцій має вигляд:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{[-\pi;\pi]}f^2\left(x\right)d\mu.$$

Скориставшись формулами Ейлера $\cos nx=\dfrac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$ та $\sin nx=\dfrac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$, тригонометричний ряд можна записати значно компактніше: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$, де $c_n=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{[-\pi;\pi]}f\left(x\right)e^{-inx}\,d\mu$.

Розглядають також кратні ряди Фур'є. А саме, якщо на множинах X' та X'' визначено міри μ' та μ'', то відповідні простори функцій, інтегровних з квадратом по цих множинах позначимо $L_2\left(X',\mu'\right)$ та $L_2\left(X'',\mu''\right)$.

Нехай $X = X' \times X''$, $\mu = \mu' \otimes \mu''$. Якщо при цьому $\{\varphi_m\}$ та $\{\psi_n\}$ – ортогональні нормовані базиси у просторах $L_2(X', \mu')$ та $L_2(X'', \mu'')$ відповідно, то система функцій $f_{mn}(x, y) = \varphi_m(x)\psi_n(y)$ утворює ортогональний нормований базис у просторі $L_2(X, \mu)$.

12.3. *Зв'язок між замкненими, повними та тотальними системами*

Поняття замкнутості та повноти ортогональних нормованих систем тісно пов'язані між собою, чим ми уже неявно скористалися у попередньому твердженні щодо базису простору $L_2(X, \mu)$.

Теорема 1. У сепарабельному евклідовому просторі E кожна повна ортогональна нормована система є замкненою і, навпаки, кожна замкнена ортогональна нормована система є повною.

● Нехай ортогональна нормована система $\{\varphi_k\}$ є замкненою. Тоді для кожного елемента $x \in E$ послідовність часткових сум його ряду Фур'є збігається до x. Отже, лінійні комбінації елементів системи $\{\varphi_k\}$ скрізь щільні в E, тобто така система є повною.

Навпаки, якщо ортогональна нормована система $\{\varphi_k\}$ є повною, то кожен елемент $x \in E$ можна з довільною точністю апроксимувати лінійними комбінаціями елементів системи $\{\varphi_k\}$. Часткові суми його ряду Фур'є дають не менш точне наближення, тому послідовність цих сум збігається до x, що рівносильне замкненості системи $\{\varphi_k\}$. ■

З нерівності Бесселя випливає, що для кожного $x \in E$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ є збіжним. Навпаки, якщо $\{\varphi_k\}$ – довільна ортогональна нормована система в повному евклідовому просторі E, не обов'язково повна, і числа c_k такі, що ряд із їх квадратів збігається, то за ***теоремою Ріса-Фішера*** існує такий елемент $x \in E$, що $c_k = (x, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, та

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (x, x) = \|x\|^2.$$

● Нехай $x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$. Тоді $\|x_m - x_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} c_k^2$ для кожного $m > n$ і, оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ збіжний, то з повноти простору E випливає збіжність послідовності $\{x_n\}$ до деякого елемента $x \in E$. При цьому

$$(x,\varphi_l) = (x_n,\varphi_l) + (x - x_n,\varphi_l) = c_l + (x - x_n,\varphi_l), \ \ n \ge l = 1,2,3,\dots .$$

Враховуючи нерівність $|(x - x_n,\varphi_l)| \le \|x - x_n\| \cdot \|\varphi_l\|$ та збіжність послідовності $\{x_n\}$ до x, звідси отримуємо $(x,\varphi_l) = c_l$ для всіх $l = 1,2,3,\dots$. Крім того, з рівності

$$\|x - x_n\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \right) = (x,x) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0$$

при $n \to 0$ дістаємо, що $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (x,x) = \|x\|^2$. ■

Система $\{\varphi_\alpha\}$ елементів евклідового простору називається ***тотальною***, якщо не існує жодного ненульового елемента, ортогонального до всіх φ_α.

Теорема 2. Для того, щоб ортогональна нормована система $\{\varphi_k\}$ у повному сепарабельному евклідовому просторі була повною, необхідно і достатньо, щоб вона була тотальною.

● Нехай система $\{\varphi_k\}$ повна. Тоді вона замкнена. Якщо елемент x ортогональний до всіх елементів цієї системи, то всі його коефіцієнти Фур'є дорівнюють нулю. Тоді з рівності Парсеваля випливає, що й $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = 0$, тобто $x = 0$.

Навпаки, якщо така система не повна, то вона не замкнена. Отже, знайдеться такий елемент x_0, що $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \|x_0\|^2$, $c_k = (x_0,\varphi_k)$, $k = 1,2,\dots$. А оскільки простір E повний, то існуватиме також такий елемент $x \in E$, що $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2$, $c_k = (x,\varphi_k)$, $k = 1,2,\dots$. При цьому ненульовий елемент $x - x_0$ буде ортогональним до всіх елементів системи $\{\varphi_k\}$, бо $(x - x_0, \varphi_k) = (x, \varphi_k) - (x_0, \varphi_k) = c_k - c_k = 0,\ k = 1, 2, \dots$ Отже, така система не може бути тотальною. ■

Зауважимо, що у неповних евклідових просторах можуть бути тотальні, але не повні ортогональні системи.

12.4. ***Гільбертові простори. Теорема про ізоморфізм***

Повні евклідові простори нескінченної розмірності називають ***гільбертовими просторами***. Надалі ми будемо розглядати лише ***сепарабельні*** гільбертові простори, тобто такі, які містять зліченну скрізь щільну множину.

Евклідові простори E та E^* називають ізоморфними, якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність так, що $x \leftrightarrow x^*,\ y \leftrightarrow y^* \Rightarrow\ x + y \leftrightarrow x^* + y^*,\ \alpha x \leftrightarrow \alpha x^*,\ (x, y) = (x^*, y^*)$.

Будь-які два $n-$вимірні евклідові простори ізоморфні між собою, і кожен з них ізоморфний простору R^n. Але евклідові простори нескінченної розмірності не обов'язково ізоморфні між собою. Наприклад, простори l_2 та $C_2[a, b]$ не ізоморфні, бо один з них повний, а другий – ні.

Проте справедливе наступне твердження:

Теорема. Будь-які два дійсні сепарабельні гільбертові простори ізоморфні між собою.

● Покажемо, що кожен такий гільбертовий простір H ізоморфний простору l_2. Виберемо в H довільну повну ортогональну нормовану систему $\{\varphi_k\}$ і поставимо у відповідність кожному елементу $x \in H$ послідовність $(c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)$ його коефіцієнтів Фур'є.

З нерівності Бесселя випливає, що така послідовність є елементом простору l_2. Навпаки, кожній такій послідовності із l_2 відповідатиме деякий елемент $x \in H$, причому ця відповідність буде взаємно однозначною.

Якщо тепер $x \leftrightarrow (c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)$, $y \leftrightarrow (d_1, d_2, \dots, d_k, \dots)$, то

$$\alpha x \leftrightarrow (\alpha c_1, \alpha c_2, ..., \alpha c_k, ...), \quad x + y \leftrightarrow (c_1 + d_1, c_2 + d_2, ..., c_k + d_k, ...).$$

Крім того,

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left[(x+y, x+y) - (x-y, x-y)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(c_k + d_k)^2 - \sum_{k=1}^{\infty}(c_k - d_k)^2\right] = \sum_{k=1}^{\infty} c_k d_k. \ \blacksquare$$

Доведена теорема означає, що з точністю до ізоморфізму існує лише один сепарабельний гільбертовий простір, і простір l_2 можна розглядати як одну з його реалізацій. Іншою важливою реалізацією гільбертового простору є евклідовий простір $L_2(X)$.

Аналогічне твердження справедливе і для комплексних гільбертових просторів: будь-які два сепарабельні комплексні гільбертові простори ізоморфні між собою. Зокрема, всі вони ізоморфні комплексному простору l_2.

Сукупність L елементів гільбертового простору H, яка разом з елементами x та y для довільних чисел α та β (дійсних чи комплексних відповідно) містить елемент $\alpha x + \beta y$, називається ***лінійною многостатністю***.

Замкнуту лінійну многостатністю називають ***підпростором*** гільбертового простору, якщо на ній визначений той самий скалярний добуток, що і на всьому просторі.

Наприклад, сукупність елементів вигляду $x = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, ...)$ утворює підпростір гільбертового простору l_2. Він ізоморфний евклідовому простору R^n.

Множина $H_0^{\perp}$ елементів гільбертового простору H, які ортогональні до всіх елементів підпростору H_0, називається ***ортогональним доповненням*** підпростору H_0.

Кожен елемент $x \in H$ єдиним способом представляється у вигляді суми $x = x_0 + x'$, де $x_0 \in H_0$, $x' \in H_0^{\perp}$. Іншими словами, простір H є прямою сумою своїх ортогональних підпросторів H_0 та $H_0^{\perp}$.

Звідси, зокрема, випливає, що:

1) ортогональне доповнення до ортогонального доповнення підпростору H_0 збігається з підпростором H_0.

2) ортогональне доповнення до підпростору скінченної розмірності n має корозмірність n, і навпаки.

Можна розглядати також прямі суми довільного числа попарно ортогональних підпросторів простору H. Якщо при цьому $x=\sum\limits_n x_n,\ x_n\in H_n$, то $\|x\|^2=\sum\limits_n\|x_n\|^2$.

Аналогічно можна визначити і пряму суму H довільних гільбертових просторів H_n. У випадку їх зліченної кількості додатково вимагають збіжності ряду $\sum\limits_n\|x_n\|^2$. При цьому скалярний добуток (x,y) в H дорівнює $\sum\limits_n(x_n,y_n)$.

Вправи до лекції №12

1. Доведіть повноту системи елементів (e_n) у просторі l_2.
2. Обґрунтуйте ортогональність тригонометричної системи у просторі $L_2[-\pi;\pi]$..
3. Доведіть, що система функцій $\{\sin nt\},\ n\in N,$ ортогональна у просторі $L_2[0;\pi]$. Запишіть для неї відповідну ортогональну нормовану систему.
4. Для ортогональної нормованої системи із вправи 3 та функції $x(t)=1$ перевірте виконання рівності Парсеваля.
5. Розв'яжіть вправу 4 у просторі $L_2[-\pi;\pi]$.
6. Перевірте ортогональність у просторі l_2 системи елементів

$$x_n=\left(\underbrace{1,\dots,1}_{2^{n-1}},\underbrace{-1,\dots,-1}_{2^{n-1}},0,0,\dots\right),\ n\in N.$$

7. Доведіть ортогональність у просторі $L_2[-1;1]$ системи функцій

$$x_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left(t^2 - 1\right)^n,\ n \in N.$$

8. Доведіть ортогональність многочленів Чебишова у просторі $L_2[-1;1]$ відносно ваги $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
9. Обґрунтуйте, що ортогональне доповнення $H_0^{\perp}$ до підпростору H_0 гільбертового простору H також є замкненим підпростором простору H.
10. Знайдіть ортогональне доповнення до підпростору $H_0 \subset l_2$, який складається з елементів вигляду $y = (y_1, y_2, 0, 0, \ldots)$, де y_1, y_2 пробігають множину всіх дійсних чисел.

Типові завдання для контрольної роботи №2 з функціонального аналізу та теорії міри

1. Розв'язати методом послідовних наближень задачу Коші для заданого лінійного диференціального рівняння першого порядку.
2. Розв'язати методом послідовних наближень задане лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду.
3. Дослідити на збіжність в одному з нормованих просторів $C[a,b]$, $C_1[a,b]$, $L_1[a,b]$ задану послідовність.
4. Дослідити на збіжність в одному з евклідових просторів $C_2[a,b]$, $L_2[a,b]$ задану послідовність.

Варіант №__

1. Розв'язати методом послідовних наближень задачу Коші

$$\begin{cases} y' = x - 2y + 2, \\ y(0) = 0. \end{cases}.$$

2. Розв'язати методом послідовних наближень лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду $y(x) = \int_0^1 xt^3 y(t)\,dt + 4x$.

3. Дослідити на збіжність у просторі $C_1[a,b]$ послідовність функцій

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, \; t \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, \quad t \notin \left[0, \frac{1}{n}\right]. \end{cases}.$$

4. Дослідити на збіжність у просторі $L_2[a,b]$ послідовність функцій

$$x_n(t) = \begin{cases} n^2 t, \; t \in \left[0, \frac{1}{n}\right), \\ \frac{nt}{n^2+1}, \; t \notin \left[0, \frac{1}{n}\right). \end{cases}.$$

Список рекомендованої літератури

1. *Антоневич А.Б., Радыно Я.В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Учебник. – Минск: БГУ, 2006. – 430с.
2. *Антоневич А.Б., Ваткина Е.И., Мазель М.Х. и др.* Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лаб. практикум: Учеб. пособие. / Под редакцией А.Б. Антоневича и Я.В. Радыно. – Минск: БГУ, 2006. – 179с.
3. *Василишин Т.В., Гой Т.П., Федак І.В.* Інтегральні рівняння. – Івано-Франківськ: Голіней, 2016. – 224с.
4. *Кадец В.М.* Курс функционального анализа. – Х.: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2006. – 607с.
5. *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, 1974. – 456с.
6. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа. – М.: Высш. шк., 1982. – 272с.
7. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 588с.
8. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука. ГРФМЛ, 1980. – 496с.
9. *Федак І.В*. Елементи теорії міри та інтеграла Лебега. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 168с.
10. *Федак І.В*. Функціональний аналіз. – Івано-Франківськ: Сімик, 2011. – 120с.