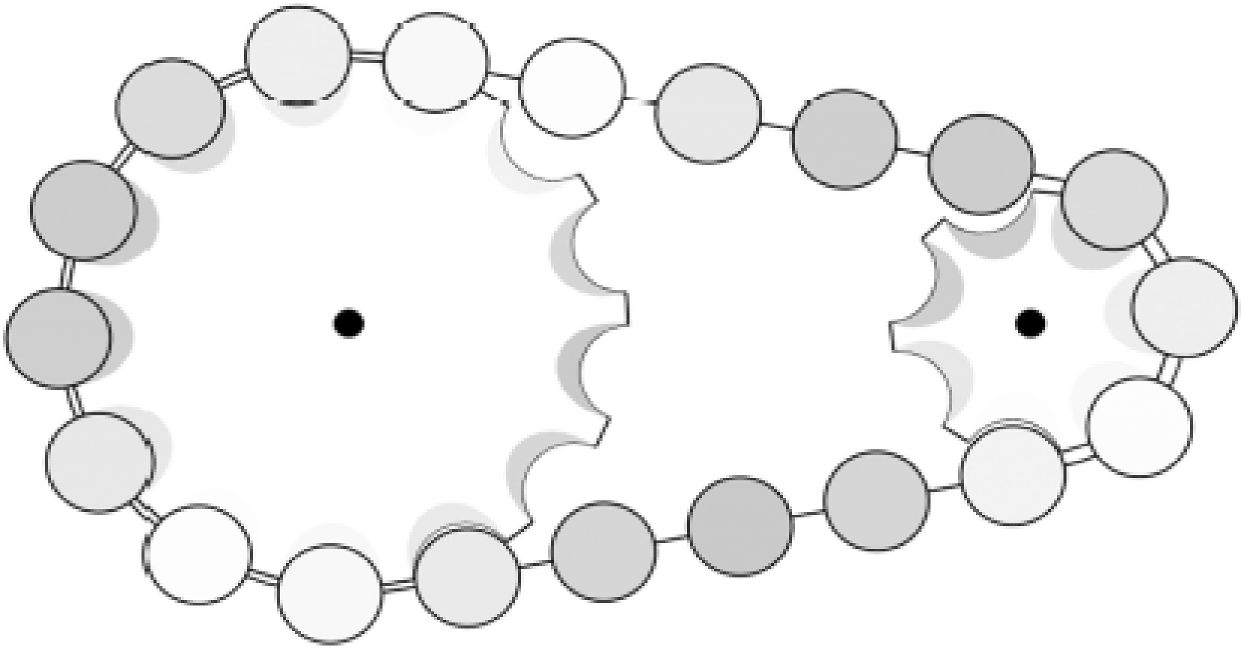
ISSN 2524-2407 (online), ISSN 1029-4171 (print)
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

У світі математики

2018 р., т. 2(24)



Зміст

Вибрані задачі Двадцятого турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка

Федак Іван Васильович
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

З 29 жовтня до 2 листопада 2017 року у Вінниці проходив XX Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М.Й. Ядренка. У ювілейному турнірі взяли участь 95 школярів, які представляли 20 команд із різних регіонів України: Волинь (2 команди), Житомир, Івано-Франківська обл. (2), Харків (3), Київ (2), Чернівці, Одеса, Хмельницька обл. (2), Львівська обл., Дніпропетровська обл., Вінниця (2), Краматорськ, Тернопільська обл.

Дипломами переможців турніру нагороджено 10 команд. Дві команди, «Харків-27» та «Харків-45», отримали дипломи першого ступеня. Дипломами другого ступеня нагороджені команди «Геліос» (збірна команда учнів м. Чернівці), «Волинь» (збірна команда Волинської області), «РПДМ» (збірна команда ліцеїв № 145 та № 208 м. Києва), «Технічний ліцей» (команда КЗ «Вінницький технічний ліцей»). Команди «ДОЛІФМП» (комунальний заклад освіти «Дніпропетровський обласний ліцей-інтернат фізико-математичного профілю»), «ОСНОва» (команда фізико-математичної гімназії № 17 м. Вінниця), «Альфа» (команда Івано-Франківського природничо-математичного ліцею), «Радикал» (команда Надвірнянського ліцею Надвірнянської міської ради) здобули дипломи третього ступеня. Абсолютним переможцем турніру стала команда «Харків-27» у складі: Крупчицький Олексій, Колупаєв Олексій, Ніколаєв Артем, Слободянюк Денис, Купріянов Михайло (керівник команди — канд. фіз.-мат. наук, заслужений вчитель України Щербина Олексій Сергійович).

Пропонуємо вашій увазі вибрані задачі турніру із розв'язками. Частину розв'язків люб'язно надано командою «Радикал» (м. Івано-Франківськ) командою «Геліос» (м. Чернівці).

З розв'язанням інших задач читачі можуть ознайомитися на офіційному сайті Всеукраїнських турнірів юних математиків імені професора М.Й. Ядренка http://www.tym.in.ua.

«Цілочисловий трикутник»

Укажіть хоч один прямокутний трикутник ABC із цілочисловими сторонами, всередині якого можна вказати таку точку M, що довжини відрізків MA, MB та MC є цілими. Чи існує безліч таких трикутників, жодні два з яких не є подібними?

Розв'язання. Нескладно переконатися, що таким є, наприклад, трикутник, вершини якого мають координати: A (80; 0), B (0; 84), C (0; 0). У ньому $AC = 80$, $BC = 84$ і за теоремою Піфагора $AB = 116$.

Якщо тепер $M(40; 9)$, то за тією ж теоремою Піфагора знаходимо $MA = MC = 41$, $MB = 85$.

Доведемо, що неподібних між собою прямокутних трикутників існує безліч. Нехай $A(4mn; 0)$, $B(0; 4m^2 - n^2)$, $C(0; 0)$, де m, n — такі натуральні числа, що $m > n > 1$. Тоді $AC = 4mn$, $BC = 4m^2 - n^2$ і за теоремою Піфагора $AB = 4m^2 + n^2$.

Взявши тепер точку $M(2mn; m^2 - n^2)$, отримаємо

$$MA = MC = m^2 + n^2$$

та

$$MB^2 = (3m^2)^2 + (2mn)^2 = \\ = m^2\left((3m)^2 + (2n)^2\right) = m^2\left(n^2+1\right)^2,$$

якщо $3m = n^2 - 1$.

Покладаючи, наприклад, $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, звідси знаходимо $m = k(3k+2)$, $k \in \mathbb{N}$.

Серед отриманих при цьому для різних $k \in \mathbb{N}$ прямокутних трикутників є нескінченна кількість таких, жодні два з яких не є подібними, бо відношення катетів

$$\frac{AC}{BC} = \frac{4mn}{4m^2 - n^2} = \\ = \frac{4k(3k+2)(3k+1)}{4k^2 - (3k+2)^2 - (3k+1)^2} = \\ = \frac{4k(3k+1)(3k+2)}{(k+1)(2k+1)(3k-1)(6k+1)}$$

прямує до нуля при $k \to \infty$, отже, або саме утворює спадну послідовність, або містить спадну підпослідовність.

Зокрема, при $k = 1$, $m = 5$, $n = 4$ отримуємо наведений першим приклад потрібного прямокутного трикутника.

Відзначимо, що можна було б також вибирати $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$. При цьому отримали би $m = (k+1)(3k+1)$, $k \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що точка M не обов'язково повинна знаходитися на середній лінії трикутника. Наприклад, для прямокутного трикутника з вершинами $A(69; 0)$, $B(0; 92)$, $C(0; 0)$ і точки $M(21; 20)$ будемо мати $AC = 69$, $BC = 92$, $AB = 115$, $MA = 52$, $MB = 75$, $MC = 29$. □

«Числа Фібоначчі та площі»

Послідовність Фібоначчі задається рівностями $F_1 = F_2 = 1$, $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

1. Доведіть, що для кожного $m \geq 0$ площа трикутника $A_1A_2A_3$ з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, $A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$ дорівнює 0,5.

2. Доведіть, що для кожного $m \geq 0$ чотирикутник $A_1A_2A_3A_4$ з вершинами у точках $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, $A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$, $A_4(F_{m+7}; F_{m+8})$ є трапецією, площа якої дорівнює 2,5.

3. Доведіть, що площа многокутника $A_1A_2...A_n$, $n \geq 3$, з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, $\ldots$, $A_n(F_{m+2n-1}; F_{m+2n})$ не залежить від вибору числа $m \geq 0$, та знайдіть цю площу.

Розв'язання. Спочатку доведемо, що $A_1A_4 \parallel A_2A_3$, тобто доведемо рівність

$$\frac{F_{m+7} - F_{m+1}}{F_{m+8} - F_{m+2}} = \frac{F_{m+5} - F_{m+3}}{F_{m+6} - F_{m+4}}.$$

Для її правої частини безпосередньо за означенням чисел Фібоначчі отримуємо

$$\frac{F_{m+5} - F_{m+3}}{F_{m+6} - F_{m+4}} = \frac{F_{m+4}}{F_{m+5}}.$$

Крім того, маємо

$$F_{m+7} - F_{m+1} = \\ = (F_{m+6} + F_{m+5}) - (F_{m+3} - F_{m+2}) = \\ = ((F_{m+4} + F_{m+5}) + F_{m+5}) - \\ - (F_{m+3} - (F_{m+4} - F_{m+3})) = \\ = 2F_{m+5} + 2F_{m+4} - 2F_{m+3} = 4F_{m+4}.$$

Аналогічно можемо довести рівність $F_{m+8} - F_{m+2} = 4F_{m+5}$. Тому також

$$\frac{F_{m+7} - F_{m+1}}{F_{m+8} - F_{m+2}} = \frac{F_{m+4}}{F_{m+5}}.$$

Нескладно також показати, що дві інші сторони не є паралельними.

З доведеного випливає, що всі чотирикутники $A_1A_2A_3A_4$ з вершинами $A_1\left(F_{m+1}; F_{m+2}\right), A_2\left(F_{m+3}; F_{m+4}\right), A_3\left(F_{m+5}; F_{m+6}\right)$, $A_4\left(F_{m+7}; F_{m+8}\right)$ є трапеціями з основами A_1A_4 та A_2A_3.

Отже, рівними є площі трикутників $A_1A_2A_3$ та $A_2A_3A_4$ як таких, що мають спільну основу A_2A_3 та рівні висоти, проведені до неї. Звідси випливає, що площі всіх трикутників $A_1A_2A_3$ дорівнюють площі трикутника з вершинами $A_1\left(F_1; F_2\right)$, $A_2\left(F_3; F_4\right)$, $A_3\left(F_5; F_6\right)$, тобто з вершинами $A_1\left(1; 1\right), A_2\left(2; 3\right), A_3\left(5; 8\right)$.

Якщо точки F_1, F_3, F_5 є проекціями точок A_1, A_2, A_3 відповідно на вісь абсцис, то площу цього трикутника виразимо через площі відповідних прямокутних трапецій:

$$S_{A_1A_2A_3} = S_{F_1A_1A_2F_3} + S_{F_3A_2A_3F_5} - S_{F_1A_1A_3F_5} =$$
$$= \frac{(1+3)\cdot 1}{2} + \frac{(3+8)\cdot 3}{2} - \frac{(1+8)\cdot 4}{2} = \frac{1}{2},$$

що й треба було довести в пункті 1.

Розглянемо тепер довільний многокутник $A_1A_2\ldots A_n$, $n \geq 3$, з вершинами $A_1\left(F_{m+1}; F_{m+2}\right)$, $A_2\left(F_{m+3}; F_{m+4}\right)$, $\ldots$, $A_n\left(F_{m+2n-1}; F_{m+2n}\right)$. З доведеної вище паралельності випливатиме, що його площа не залежить від вибору $m \geq 0$. Тому, покладаючи $m = 0$, обчислимо площу многокутника з вершинами $A_1\left(F_1; F_2\right)$, $A_2\left(F_3; F_4\right), \ldots, A_n\left(F_{2n-1}; F_{2n}\right)$.

Така задача була запропонована в журналі *The Fibonacci Quarterly* в розділі *Elementary problems and solutions* (Vol. 53.2, May 2015. – B-1167. Proposed by Atara Sriki and Opher Liba). Наводимо переклад її розв'язання, запропонованого професором Гаррісом Квонгом.

Такий многокутник є опуклим і його можна розбити на $n-2$ трикутників з вершинами $\left(F_1; F_2\right)$, $\left(F_{2k-1}; F_{2k}\right)$ та $\left(F_{2k+1}; F_{2k+2}\right)$, де $2 \leq k \leq n-1$. При цьому площа кожного трикутника з такими трьома вершинами може бути виражена через площі трьох прямокутних трапецій, які знаходяться під трьома його сторонами і обмежені знизу віссю абсцис.

Оскільки $\left(F_1; F_2\right) = (1; 1)$, то ми отримуємо:

$$\begin{aligned}2\Delta_k &= \left(F_{2k-1} - 1\right)\left(F_{2k} + 1\right) + \\ &+ \left(F_{2k+1} - F_{2k-1}\right)\left(F_{2k} + F_{2k+2}\right) - \\ &- \left(F_{2k+1} - 1\right)\left(F_{2k+2} + 1\right) = \\ &= F_{2k}F_{2k+1} - F_{2k-1}F_{2k+2} + F_{2k-1} + \\ &+ \left(F_{2k+2} - F_{2k+1} - F_{2k}\right) = \\ &= \frac{L_{4k+1} - 1}{5} - \frac{L_{4k+1} + 4}{5} + F_{2k-1} = \\ &= F_{2k-1} - 1.\end{aligned}$$

Отже,

$$2\sum_{k=2}^{n-1} \Delta_k = \sum_{k=2}^{n-1} F_{2k-1} - (n-2) =$$
$$= \left(F_{2n-2} - 1\right) - (n-2),$$

і площа многокутника дорівнює

$$S_n = \frac{F_{2n-2} - n + 1}{2}.$$

Тут через L_{4k+1} позначені числа Люка з індексом $4k+1$, означення яких сформульоване в наступній задачі.

Покладаючи $n = 4$, отримаємо, що площі всіх трапецій $A_1A_2A_3A_4$ дорівнюють

$$\frac{F_6 - 3}{2} = \frac{5}{2},$$

що дає відповідь на п. 2.

Справедливе й загальніше від доведеного вище твердження: площа многокутника $A_1A_2 \ldots A_n$, $n \geq 3$, з вершинами $A_1\left(F_{m+k}; F_{m+2k}\right)$, $A_2\left(F_{m+3k}; F_{m+4k}\right), \ldots,$

$A_n\left(F_{m+(2n-1)k};F_{m+2nk}\right)$, $k\in\mathbb{N}$, не залежить від вибору чисел $m\geq 0$ і дорівнює

$$\frac{F_k\left(F_{2k(n-1)}-(n-1)F_{2k}\right)}{2}.$$

Ще більш загальний результат доведено автором цієї статті при розв'язуванні задачі B-1195 з журналу *The Fibonacci Quarterly* (Vol. 55.3, August 2017. Elementary problems and solutions).

Нехай послідовність визначена рівностями:

$$G_0=a,\ G_1=b,\ G_{k+1}=G_k+G_{k-1},\ k\in\mathbb{N}.$$

Тоді площа многокутника з вершинами $A_1\left(G_{m+k};G_{m+2k}\right)$, $A_2\left(G_{m+3k};G_{m+4k}\right)$, $\ldots$, $A_n\left(G_{m+(2n-1)k};G_{m+2nk}\right)$, $k\in\mathbb{N}$, не залежить від вибору чисел $m\geq 0$ і дорівнює

$$\frac{|\mu|\,F_k\left(F_{2k(n-1)}-(n-1)F_{2k}\right)}{2},$$

де $\mu=a^2+ab-b^2$. □

«Числа Фібоначчі та Люка»

Числа Люка задаються рівностями $L_1=1$, $L_2=3$, $L_{k+2}=L_k+L_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$. Числа Фібоначчі позначені F_k.

1. Для кожного $n\geq 1$ доведіть, що

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n+1}}+\frac{F_{2n+1}}{F_{2n-1}}+\frac{1}{F_{2n-1}F_{2n+1}}=$$
$$=\frac{L_{2n-1}}{L_{2n+1}}+\frac{L_{2n+1}}{L_{2n-1}}-\frac{5}{L_{2n-1}L_{2n+1}}.$$

2. Запропонуйте і доведіть аналогічну рівність для чисел Фібоначчі та Люка з парними індексами.

Розв'язання. а) Використовуючи формули Кассіні

$$F_{2n}^2+1=F_{2n-1}F_{2n+1}$$

та

$$L_{2n}^2-5=L_{2n-1}L_{2n+1},$$

отримаємо рівності

$$F_{2n-1}^2+F_{2n+1}^2+1=$$
$$=\left(F_{2n+1}-F_{2n-1}\right)^2+1+2F_{2n-1}F_{2n+1}=$$
$$=\left(F_{2n}^2+1\right)+2F_{2n-1}F_{2n+1}=3F_{2n-1}F_{2n+1}$$

та

$$L_{2n-1}^2+L_{2n+1}^2-5=$$
$$=\left(L_{2n+1}-L_{2n-1}\right)^2-5+2L_{2n-1}L_{2n+1}=$$
$$=\left(L_{2n}^2-5\right)+2L_{2n-1}L_{2n+1}=3L_{2n-1}L_{2n+1}.$$

Тому для всіх натуральних n обидві частини заданої рівності дорівнюють 3.

б) Аналогічна рівність для чисел Фібоначчі та Люка з парними індексами має вигляд

$$\frac{F_{2n}}{F_{2n+2}}+\frac{F_{2n+2}}{F_{2n}}-\frac{1}{F_{2n}F_{2n+2}}=$$
$$=\frac{L_{2n}}{L_{2n+2}}+\frac{L_{2n+2}}{L_{2n}}+\frac{5}{L_{2n}L_{2n+2}}.$$

Для всіх натуральних n обидві її частини також дорівнюють 3. Для доведення використовуємо аналогічні перетворення і формули Кассіні у вигляді

$$F_{2n+1}^2-1=F_{2n}F_{2n+2}$$

та

$$L_{2n+1}^2+5=L_{2n}L_{2n+2}.$$ □

«Система з числами Фібоначчі»

Розв'яжіть систему рівнянь:

$$x_1^3+x_1+x_2=F_1x_1^2+F_3,$$
$$x_2^5+x_2+x_3=F_2x_2^4+F_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{2016}^{4033}+x_{2016}+x_{2017}=F_{2016}\,x_{2016}^{4032}+F_{2018},$$
$$x_{2017}^{4035}+\frac{F_{2019}-1}{F_{2017}}\,x_{2017}+x_1=$$
$$=F_{2017}\,x_{2017}^{4034}+F_{2019}.$$

Розв'язання. Скориставшись рівностями $F_1 = F_2 = 1, F_{k+2} = F_k + F_{k+1}, k \in \mathbb{N}$, запишемо задану систему рівнянь у вигляді:

$$
\begin{gathered}
(x_1 - F_1)\left(x_1^2 + 1\right) = F_2 - x_2,\\
(x_2 - F_2)\left(x_2^4 + 1\right) = F_3 - x_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(x_{2016} - F_{2016})\left(x_{2016}^{4032} + 1\right) = F_{2017} - x_{2017},\\
(x_{2017} - F_{2017})\left(x_{2017}^{4034} + \frac{F_{2019} - 1}{F_{2017}}\right) = F_1 - x_1.
\end{gathered}
$$

Звідси отримуємо єдиний розв'язок: $x_k = F_k$, $k = 1,2,...,2017$.

Дійсно, якщо, наприклад, $x_1 > F_1$, то з рівнянь системи послідовно отримуємо суперечність

$$
\begin{gathered}
x_1 > F_1 \Rightarrow x_2 < F_2 \Rightarrow x_3 > F_3 \Rightarrow \ldots\\
\Rightarrow x_{2017} > F_{2017} \Rightarrow x_1 < F_1.
\end{gathered}
$$

Аналогічно приходимо до суперечності, припустивши $x_1 < F_1$. □

«Рівняння з біноміальними коефіцієнтами»

Знайдіть всі такі натуральні числа n та k, що $\binom{n-1}{k+1} = \binom{n+1}{k-1}$.

Розв'язання. З умови задачі отримуємо рівність

$$
\begin{gathered}
n(n+1)k(k+1) = (n-k-1)\times\\
\times(n-k)(n-k+1)(n-k+2).
\end{gathered}
\qquad (1)
$$

Позначимо $p = n - k$.

Якщо $p = 2$, то (1) зведеться до рівняння

$$k(k+1)(k+2)(k+3) = 4!,$$

яке має один корінь $k = 1$. Тоді $n = 3$.

Якщо $p > 2$, то виконаємо такі перетворення рівності (1):

$$
\begin{gathered}
4n^2k^2 + 4nk(n+k) + 4nk =\\
= 4(p-1)p(p+1)(p+2),\\
(2nk + n + k)^2 - (n+k)^2 + 4nk =\\
= 4(p^2 + p - 2)(p^2 + p),\\
(2nk + n + k)^2 - (n-k)^2 =\\
= (2p^2 + 2p - 2)^2 - 4,\\
(2nk + n + k)^2 = (2p^2 + 2p - 2)^2 + p^2 - 4.
\end{gathered}
$$

Оскільки при $p > 2$ маємо

$$
\begin{gathered}
(2p^2 + 2p - 2)^2 <\\
< (2p^2 + 2p - 2)^2 + p^2 - 4 <\\
< (2p^2 + 2p - 1)^2,
\end{gathered}
$$

то число $(2p^2 + 2p - 2)^2 + p^2 - 4$ не може бути повним квадратом. Отже, в такому разі інших розв'язків початкового рівняння не отримаємо.

Для повноти розв'язання розглянемо також випадки, коли $p = n - k \leq 1$. При цьому врахуємо, що для $l > m$ прийнято вважати $\binom{m}{l} = 0$. Це цілком логічно, бо вибрати із множини більше елементів, ніж вона містить, не можна.

Відповідно, при $p = -2, -1, 0, 1$ для всіх натуральних чисел n та k у лівій частині рівності $\binom{n-1}{k+1} = \binom{n+1}{k-1}$ отримаємо нуль, а її права частина буде додатною. Тому у цих випадках рівняння не матиме розв'язків.

Якщо ж $p = n - k \leq -3$, то в обох частинах заданого рівняння отримаємо нулі. Звідси знаходимо нескінченну множину його розв'язків з довільними натуральними n та k, які задовольняють нерівність $k \geq n + 3$. □

«Сума кубів»

Знайдіть хоч одну четвірку таких натуральних чисел a, b, c, d, що

$$a^3 + b^3 + c^3 = d^3. \qquad (2)$$

Скінченною чи нескінченною є множина таких четвірок за умови, що жодна четвірка цієї множини не утворюється з іншої множенням усіх її чисел на одне і те ж число?

Розв'язання. Наведене в умові рівняння досліджувалося багатьма вченими, починаючи з Діофанта, який, за власним свідченням, у своїй книзі «Порізми» довів теорему, що різниця двох кубів раціональних чисел є сумою кубів двох раціональних чисел; на жаль, книга до нас не дійшла. У 1591 році Франсуа Вієт довів теорему Діофанта: він підставив у (2)

$$a = d - x, b = \frac{d^2x}{c^2} - c,$$

знайшов, що $x = \frac{3c^3d}{c^3+d^3}$, та отримав звідси нескінченну серію розв'язків рівняння (2) у раціональних числах:

$$a = \frac{d(d^3 - 2c^3)}{c^3 + d^3}, b = \frac{c(2d^3 - c^3)}{c^3 + d^3}, \quad (3)$$

c,d – довільні раціональні числа. Леонард Ейлер у 1770 році довів, що всі раціональні розв'язки рівняння (2) задаються формулами

$$a = tF(x,y,z), b = tF(-x,y,-z),$$
$$c = tF(-x,-y,z), d = tF(-x,y,z),$$

де x,y,z – довільні раціональні числа, а

$$F(x,y,z) = 9x^3 + 3x^2(3y + z) +$$
$$+ 3x(y - z)^2 + (3y^2 + z^2)(y + z);$$

Варто зауважити, що рівносильні формули були незалежно знайдені Срінівасою Рамануджаном. За допомогою цих формул можна отримати нескінченну серію цілих розв'язків рівняння (2), підставляючи цілі x,y,z,t. (Більше того, цими формулами задаються всі цілі розв'язки рівняння, але x,y,z,t при цьому не обов'язково будуть цілими.)

З формул Вієта та Ейлера можна отримати нескінченну серію натуральних розв'язків, що не утворюються один з іншого множенням на одне і те саме число. Наприклад, можна підставити в формулу Вієта (2)

$$c = xt, d = (2x + 1)t, t = x^3 + (2x + 1)^3.$$

Такий підхід не є систематичним, він не працюватиме з іншими рівняннями такого вигляду. Тому ми покажемо, як за допомогою модифікації стандартного для діофантових рівнянь методу раціональних січних можна знайти нескінченну серію натуральних розв'язків рівняння (2).

Поділивши (2) на d^3, отримаємо рівняння

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1 \quad (4)$$

в раціональних числах. З розв'язку (3,4,5,6) рівняння (2) отримаємо розв'язок $O = (x_0,y_0,z_0) = (1/2,2/3,5/6)$ рівняння (4), який буде нашою «відправною точкою». Метод раціональних січних полягає в проведенні через O прямих із раціональними коефіцієнтами до перетину з поверхнею (4). Якби поверхня була квадратною, то другі точки перетину прямих з поверхнею давали б раціональні розв'язки (4). Для кубічної поверхні у загальному випадку буде ще дві точки перетину та буде складно забезпечити раціональність координат. Трюк полягає в тому, щоб провести пряму так, щоб вона перетинала поверхню в точці O «двічі», тобто щоб вона дотикалася до поверхні. Використовуючи формули аналітичної геометрії, маємо, що рівняння дотичних до поверхні у точці O мають вигляд

$$y - y_0 = t(x - x_0), z - z_0 = s(x - x_0),$$

де t,s – фіксовані числа, такі, що

$$16t + 25s + 9 = 0.$$

Підставляючи це у рівняння, одержимо розв'язки

$$x = \frac{1}{2} - u, \; y = \frac{2}{3} - tu, \; z = \frac{5}{6} - su,$$
$$u = \frac{3 + 4t^2 + 5s^2}{1 + t^3 + s^3}.$$

Якщо брати s,t раціональними (так, щоб $16t + 25s = 9$), то з них можна одержати цілі розв'язки рівняння (2). Натуральні розв'язки одержимо у тих випадках, коли всі числа x,y,z додатні або рівно два з них від'ємні. Неважко переконатися, що другу умову виконано при $1 \le t \le 10$. Довести, що серед отриманих розв'язків нескінченно багато принципово різних, залишаємо читачу як вправу. Також пропонуємо замислитися, чому вказаний підхід не працює, якщо у якості «відправної» взяти точку $(1,0,0)$ або $(1,1,-1)$. $\square$

«Рахуємо перестановки»

Для множини $\{1,2,\ldots,n\}$ позначимо через U_k кількість її перестановок, в яких рівно k елементів залишаються на своїх місцях.

1. Доведіть, що

$$\sum_{k=1}^{n} kU_k = n!$$

Для $n \ge 3$ доведіть нерівність

$$\frac{n!}{2} \le \sum_{k=2}^{n} kU_k \le \frac{2 \cdot n!}{3}.$$

2. Доведіть, що $\sum_{k=1}^{n} k^2 U_k = 2 \cdot n!$

Розв'язання. Для доведення рівностей з умови використаємо «підрахунок двома способами». Позначимо S_n множину перестановок елементів множини $\{1,2,\ldots,n\}$; для $\sigma \in S_n$ та $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ покладемо $\mathbf{1}_{\sigma,i} = 1$, якщо i є нерухомим елементом σ. Тоді $s(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\sigma,i}$ є кількістю нерухомих елементів σ і

$$\sum_{k=1}^{n} kU_k = \sum_{\sigma\in S_n} s(\sigma) = \sum_{\sigma\in S_n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\sigma,i} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n} \mathbf{1}_{\sigma,i}.$$

Оскільки сума $\sum_{\sigma\in S_n} \mathbf{1}_{\sigma,i}$ – кількість перестановок, які не рухають i, то вона дорівнює $(n-1)!$. Отже,

$$\sum_{k=1}^{n} kU_k = \sum_{i=1}^{n}(n-1)! = n \cdot (n-1)! = n!.$$

Подібним чином доводиться друга рівність:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2U_k = \sum_{\sigma\in S_n} s(\sigma)^2 = \sum_{\sigma\in S_n}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\sigma,i}\right)^2 =$$
$$\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{1}_{\sigma,i}\mathbf{1}_{\sigma,j} = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n} \mathbf{1}_{\sigma,i}\mathbf{1}_{\sigma,j}.$$

Для $i = j$ маємо

$$\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n} \mathbf{1}_{\sigma,i}\mathbf{1}_{\sigma,j} = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n} \mathbf{1}_{\sigma,i} = (n-1)!;$$

для $i \neq j$ ця сума – це кількість перестановок, які не рухають i та j, тобто $(n-2)!$. Отже,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2U_k = \sum_{i=1}^{n}(n-1)! \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}(n-2)! =$$
$$= n\cdot(n-1)! + n(n-1)\cdot(n-2)! = 2n!.$$

Залишається довести нерівність з умови задачі. Оскільки $\sum_{k=1}^{n} kU_k = n!$, то вона рівносильна такій:

$$\frac{n!}{3} \le U_1 \le \frac{n!}{2}.$$

Доведемо явну формулу

$$U_k = \frac{n!}{k!}\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\right).$$

Її можна вивести за допомогою комбінаторної формули включення-виключення, але ми використаємо індуктивний підхід. Для цього перепозначимо $U_k = U_{k,n}$ кількість перестановок n елементів із k нерухомими точками. Зрозуміло, що

$$U_{k,n} = C_n^k U_{0,n-k}.$$

Справді, кожну перестановку, яка має k нерухомих точок, можна однозначно задати її набором нерухомих точок, який можна вибрати C_n^k способами, та перестановкою $n-k$ елементів, яка не має нерухомих точок. Отже, будемо доводити за індукцією, що

$$U_{0,n} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Це є очевидним для $n = 1$. Припускаючи, що ця формула справедлива для всіх менших значень, доведемо її для $n \geq 2$. Використовуючи припущення індукції та очевидну тотожність $\sum_{k=0}^{n} U_{k,n} = n!$, запишемо

$$U_{0,n} = n! - \sum_{k=1}^{n} U_{k,n} = n! - \sum_{k=1}^{n} C_n^k U_{0,n-k} =$$
$$= n! - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} =$$
$$= n!\left(1 - \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{k!j!}\right).$$

Помітимо, що

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{k!j!} = 1.$$

Справді, групуючи у сумі доданки однаковою сумою $m = k + j$ та використовуючи біном Ньютона, маємо

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{k!j!} = 1 + \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}}{k!(m-k)!} =$$
$$= 1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k (-1)^{m-k} =$$
$$= 1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!}(1-1)^m = 1.$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{k!j!} = 1 - \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!},$$

тому

$$U_{0,n} = n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!},$$

що й потрібно було довести. Оскільки знаки членів у сумі чергуються, а їхні модулі спадають, то легко бачити, що при $n \geq 2$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \leq 1 - 1 + \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\frac{n!}{3} \leq U_{0,n} \leq \frac{n!}{2}$. Звідси, використовуючи рівність $U_{1,n} = C_n^1 U_{0,n-1}$, одержуємо потрібну нам нерівність

$$\frac{n!}{3} \leq U_{0,n} \leq \frac{n!}{2}. \qquad \square$$

Зауваження 1. Ця задача є пов'язаною із відомою задачею про неуважного листоношу, якому треба доставити n відправлень за n адресами, але він, забувши, яке відправлення кому призначене, доставляє їх навмання. Тоді, в позначеннях розв'язку, $\frac{U_{k,n}}{n!}$ — це ймовірність того, що рівно k адресатів одержать свої відправлення. Зокрема, ймовірність того, що жоден з адресатів одержить призначене йому відправлення

$$\frac{U_{0,n}}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!}$$

прямує, при $n \to \infty$, до сталої додатної величини $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} = \frac{1}{e}$.

Наведені в умові рівності набувають відповідного ймовірнісного сенсу: перша рівність означає, що математичне сподівання кількості правильно доставлених листів дорівнює 1, друга — що дисперсія цієї кількості дорівнює 2. Маючи таку інтерпретацію, дуже легко обґрунтувати першу рівність: у середньому кожен адресат одержить $\frac{1}{n}$ свого відправлення, тому всі разом в середньому одержать одне відправлення; насправді, використаний нами підрахунок двома способами відштовхується саме від таких міркувань.

«Розбиття на доданки»

Доведіть, що існує таке число n, що кожне натуральне число, яке перевищує n, можна розбити на п'ять попарно взаємно простих доданків, які більші одиниці.

Розв'язання. Більшість учасників запропонували розв'язки, які базуються на постулаті Бертрана (між числами n та $2n$ знайдеться просте число) або його модифікаціях. Цей факт є доволі нетривіальним, жоден з учасників, хто посилався на нього, не зміг розповісти хоча б ідею доведення, що призводило до заниження балів деякими членами журі. Тому ми розглянемо розв'язок, заснований на простіших ідеях.

Розглянемо спочатку парні числа.

Для $n = 8k$, де $k \geq 5$, розглянемо його розбиття $n = 8 + (2k - 5) + (2k - 3) + (2k - 1) + (2k + 1)$. У цьому розбитті лише пара крайніх непарних доданків може мати спільний дільник 3. Якщо це так, то у розбитті $n = 16 + (2k - 7) + (2k - 5) + (2k - 3) + (2k - 1)$ всі доданки взаємно прості.

Така сама ідея працює для чисел вигляду $n = 8k + b$, де $b \in \{2,4\}, 3 \nmid k \geq 4$: їх можна подати у вигляді $b + (2k - 3) + (2k - 1) + (2k + 1) + (2k + 3)$.

Представлення для решти парних чисел такі:

- $n = 24k + 4, k \geq 1$, подамо як $2 + (6k - 3) + (6k - 1) + (6k + 1) + (6k + 5)$;
- $n = 24k + 6, k \geq 1$, подамо як $4 + (6k - 3) + (6k - 1) + (6k + 1) + (6k + 5)$;
- $n = 24k + 2, k \geq 2$, подамо як $12 + (6k - 7) + (6k - 5) + (6k + 1) + (6k + 5)$;
- $n = 24k + 14, k \geq 1$, подамо як $4 + (6k - 1) + (6k + 1) + (6k + 5) + (6k + 7)$;
- $n = 24k + 22, k \geq 1$, подамо як $12 + (6k - 1) + (6k + 1) + (6k + 5) + (6k + 7)$.

Як неважко бачити, одним із указаних способів можна подати довільне парне число $n \geq 40$.

З непарними числами ситуація складніша, оскільки всі доданки мають бути непарними. Ми використовуватимемо розклади вигляду

$$n = 3^k + 5^l + \\ +(30m + \alpha) + (30m + \beta) + (30m + \gamma),$$

де $k \leq 4, l \leq 3$, α, β, γ взаємно прості з 30 та такі, що різниця будь-яких двох не має простих дільників, крім 2, 3, 5. Зрозуміло, що у такому розкладі числа є попарно взаємно прості. Перебираючи різні значення $k, l, \alpha, \beta, \gamma$ можна переконатися, що число $3^k + 5^l + \alpha + \beta + \gamma$ може мати будь-який парний залишок від ділення на 90. Насправді, достатньо брати комбінації α, β, γ, сума яких порівняна з числами від -13 до 13 за модулем 90. Таким чином можна розкласти усі непарні числа, починаючи з $3^4 + 5^3 + 90 - 13 = 283$.

Отриману нижню межу можна зменшити. А саме, за допомогою комп'ютерного перебирання або в інший спосіб можна переконатися, що довільне натуральне число $n \geq 42$ (і довільне парне число $n \geq 28$) можна подати як суму п'яти попарно взаємно простих чисел, більших 1. □

«Цікава послідовність»

Про збіжну послідовність $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, a_2, a_3, … відомо, що її члени з непарними номерами спадають, а з парними номерами – зростають і, крім того, для всіх $n \geq 1$ справджується нерівність $2 \leq \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \leq 3$.

Знайдіть межі, в яких може знаходитись границя цієї послідовності.

Розв'язання. Оскільки послідовність a_{2k} є монотонно зростаючою, послідовність a_{2k+1} – монотонно спадною, то для існування границі необхідно, щоб всі елементи з непарними номерами були більшими кожного елемента з парним індексом.

З нерівності

$$2 \leq \frac{a_1 - a_0}{a_1 - a_2} \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{1 - 0}{1 - a_2} \leq 3$$

отримуємо, що $\frac{3}{6} \leq a_2 \leq \frac{4}{6}$.

Враховуючи сказане вище, з нерівностей

$$2 \leq \frac{a_{2k} - a_{2k-1}}{a_{2k} - a_{2k+1}} \leq 3$$

та

$$2 \leq \frac{a_{2k+1} - a_{2k}}{a_{2k+1} - a_{2k+2}} \leq 3$$

отримаємо оцінки

$$\frac{a_{2k-1} + 2a_{2k}}{3} \leq a_{2k+1} \leq \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}$$

та

$$\frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{2} \leq a_{2k+2} \leq \frac{a_{2k} + 2a_{2k+1}}{3}$$

відповідно.

Зокрема, при $k = 1$ знайдемо, що $\frac{4}{6} \leq a_3 \leq \frac{5}{6}$.

Далі, припускаючи, що $\frac{3x_k}{6^k} \leq a_{2k} \leq \frac{4y_k}{6^k}$ та $\frac{2z_k}{6^k} \leq a_{2k+1} \leq \frac{t_k}{6^k}$, з отриманих вище оцінок будемо мати

$$\frac{3\,(3x_k + 2z_k)}{6^{k+1}} \leq a_{2k+2} \leq \frac{4\,(t_k + 2y_k)}{6^{k+1}}$$

та

$$\frac{2\,(3x_k + 4z_k)}{6^{k+1}} \leq a_{2k+3} \leq \frac{5t_k + 4y_k}{6^{k+1}}$$

відповідно.

Таким чином, для знаходження чисел x_k, y_k, z_k, t_k отримуємо такі дві системи рекурентних співвідношень:

$$\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 2z_k, \\ z_{k+1} = 3x_k + 4z_k, \end{cases}$$

та

$$\begin{cases} y_{k+1} = 2y_k + t_k, \\ t_{k+1} = 4y_k + 5t_k, \end{cases}$$

причому, враховуючи оцінки для a_2 та a_3, маємо $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $z_1 = 2$, $t_1 = 5$. А з записаних систем одержуємо також $x_2 = 7$, $y_2 = 7$, $z_2 = 11$, $t_2 = 29$.

З другого рівняння першої системи знаходимо $x_k = \frac{z_{k+1} - 4z_k}{3}$. Тоді $x_{k+1} = \frac{z_{k+2} - 4z_{k+1}}{3}$. Підставляючи їх у перше рівняння цієї системи, отримаємо різницеве рівняння $z_{k+2} - 7z_{k+1} + 6z_k = 0$, для якого коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ є числа $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_2 = 6$. Тому $z_k = C_1 + C_2 \cdot 6^k$. Враховуючи значення $z_1 = 2$ та $z_2 = 11$, з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + 6C_2 = 2, \\ C_1 + 36C_2 = 11, \end{cases}$$

знайдемо $C_1 = \frac{2}{10}$ та $C_2 = \frac{3}{10}$. Отже, остаточно отримуємо $z_k = \frac{2+3\cdot 6^k}{10}$ та далі знаходимо $x_k = \frac{-2+2\cdot 6^k}{10}$.

Так само, виражаючи з першого рівняння другої системи $t_k = y_{k+1} - 2y_k$, прийдемо до аналогічного різницевого рівняння $y_{k+2} - 7y_{k+1} + 6y_k = 0$. Тому

$y_k = C_1 + C_2 \cdot 6^k$. Враховуючи значення $y_1 = 1$ та $y_2 = 7$, з системи рівнянь

$$\begin{cases} C_1 + 6C_2 = 1, \\ C_1 + 36C_2 = 7, \end{cases}$$

знайдемо $C_1 = -\frac{2}{10}$ та $C_2 = \frac{2}{10}$. Тоді $y_k = \frac{-2+2\cdot6^k}{10}$ і також знаходимо $t_k = \frac{2+8\cdot6^k}{10}$.

Повертаючись до нерівностей

$$\frac{3x_k}{6^k} \le a_{2k} \le \frac{4y_k}{6^k}$$

та

$$\frac{2z_k}{6^k} \le a_{2k+1} \le \frac{t_k}{6^k},$$

отримуємо наступні оцінки для елементів заданої послідовності:

$$\frac{3 \cdot \frac{-2+2\cdot6^k}{10}}{6^k} \le a_{2k} \le \frac{4 \cdot \frac{-2+2\cdot6^k}{10}}{6^k}$$

та

$$\frac{2 \cdot \frac{2+3\cdot6^k}{10}}{6^k} \le a_{2k+1} \le \frac{\frac{2+8\cdot6^k}{10}}{6^k}.$$

Перейшовши в цих подвійних нерівностях до границі при $k \to \infty$, отримуємо

$$\frac{3}{5} \le \lim_{k\to\infty} a_{2k} \le \frac{4}{5}$$

та

$$\frac{3}{5} \le \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} \le \frac{4}{5}.$$

У цих же ж межах буде знаходитися і границя заданої послідовності.

Для кожного $a \in \left[\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right]$ нескладно навести приклад такої послідовності, яка збігається до a і задовольняє умови задачі: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{2n} = a - \frac{a}{6^n}$ та $a_{2n+1} = a + \frac{1-a}{6^n}$.

Зауважимо, що для аналогічної послідовності, елементи якої при всіх $n \ge 1$ задовольняють нерівність $m \le \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n - a_{n+1}} \le M$, $1 < m \le M$, її границя $a \in \left[\frac{Mm-M}{Mm-1}, \frac{Mm-m}{Mm-1}\right]$.

Якщо a — довільне число з цього проміжку, то прикладом послідовності, яка збігається до a і задовольняє вказану нерівність, є така $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{2n} = a - \frac{a}{(Mm)^n}$ та $a_{2n+1} = a + \frac{1-a}{(Mm)^n}$. □

«Фарбуємо клітинки»

Клітинки дошки 8×8 розфарбовані в шаховому порядку. За один хід можна вибрати клітинку дошки та одночасно перефарбувати в протилежний колір усі клітинки, що мають із нею спільну сторону, при цьому сама клітинка не перефарбовується. Чи можна за декілька ходів перефарбувати в протилежний колір усі клітинки дошки?

Розв'язання. Набір клітинок дошки назвемо гарним, якщо поруч із кожною клітинкою дошки знаходиться рівно клітинка набору. Для того, щоб зробити вказане в умові перефарбування, достатньо знайти гарний набір. Справді, вибираючи в довільному порядку по одному разу клітинки з набору, ми зможемо перефарбувати всі клітинки дошки у протилежний колір.

Ми розв'яжемо цю задачу для квадратних дошок розміру $2n \times 2n$ та прямокутних розміру $2n \times 2(n+1)$. Спочатку помітимо, що для «ламаного куту» парної висоти виділений, як показано на рис. 1, набір клітинок є гарним.

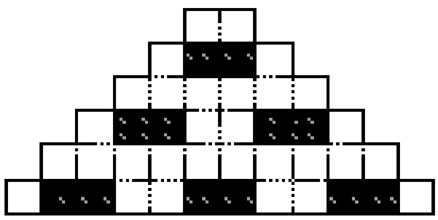


Рис. 1

Більше того, якщо відкинути від кута одну або дві крайні нижні клітинки, виділений набір залишиться гарним. Після цього залишається лише поділити дошку на чотири такі кути різної орієнтації (можливо, без крайніх клітинок). З наведених на рис. 2 прикладів такого поділу для квадратів 10×10 і 12×12 та прямокутників 8×10 і 10×12 неважко бачити, як такий поділ робиться для квадратів $2n \times 2n$ та прямокутників розміру $2n \times 2(n+1)$.

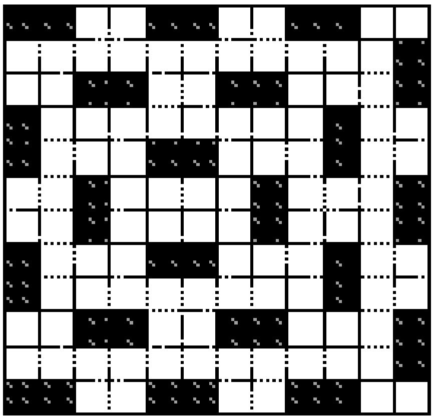


Рис. 2

У якості ще одного узагальнення доведемо, що для квадратної дошки непарного розміру вказане в умові перефарбування неможливо. Справді, на кожному кроці перефарбовується парна кількість клітинок на головній діагоналі (0 або 2). Оскільки кількість клітинок на головній діагоналі непарна, то всіх їх перефарбувати не вдасться. □

«Безконфліктні фішки»

1. На деяких клітинках дошки $n \times n$ стоять фішки (не більше однієї фішки на клітинці) так, що жодні чотири фішки не знаходяться у вершинах прямокутника. Доведіть, що кількість фішок не перевищує $n(\sqrt{n}+1)$.

2. Для яких n ви зможете розмістити $n([\sqrt{n}]+1)$ фішок на дошці $n \times n$ так, щоб жодні чотири фішки не стояли у вершинах прямокутника? (Тут $[x]$ позначає цілу частину числа x.)

Зауваження. Автори задачі мали на увазі такі прямокутники, сторони яких паралельні сторонам дошки. Було б цікаво розв'язати пункт 2 задачі без цього припущення.

Доведення. Максимальна кількість фішок, яку можна поставити на дошку, щоб виконувалася умова, називається *числом Заранкевіча* Z_n. У пункті 1 задачі пропонується довести, що

$$Z_n \le n(\sqrt{n}+1).$$

У кожній горизонталі пронумеруємо клітинки зліва направо числами від 1 до n. Нехай A_i – множина номерів клітинок i-ї горизонталі, у яких стоять фішки. Умова задачі рівносильна тому, що кожна пара чисел входить щонайбільше в одну з множин A_i, тому загальна кількість пар у цих множинах допускає оцінку

$$\sum_{i=1}^{n} C^2_{|A_i|} \le C^2_n. \qquad (5)$$

З іншого боку, за нерівністю Єнсена

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C^2_{|A_i|} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} |A_i|(|A_i|-1) \ge \ge \frac{d}{2}(d-1), \qquad (6)$$

де $d = \frac{1}{n}(|A_1| + \cdots + |A_n|)$ — середня кількість елементів у множинах. Враховуючи (5), приходимо до нерівності

$$d^2 - d \le n-1,$$

розв'язуючи яку, одержимо

$$d \le \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{4n-3}\right) \le \sqrt{n}+1,$$

що й треба довести в першому пункті.

У другому пункті питається, для яких n виконано нерівність

$$Z_n \ge n([\sqrt{n}]+1). \qquad (7)$$

Повна відповідь на це питання є відкритою математичною проблемою, тому ми наведемо лише деякі часткові результати.

Почнемо з необхідної умови. Використовуючи отриману в попередньому пункті нерівність, маємо, що коли $k^2 \le n <$

$k^2 + k + 1$ для певного цілого k, то кількість фішок менша за

$$\frac{n}{2}\left(1+\sqrt{4k^2+4k+1}\right) = \\ = n(k+1) = n([\sqrt{n}]+1).$$

Отже, для виконання (7) необхідно, щоб

$$k^2 + k + 1 \leq n \leq k^2 + 2k$$

для певного $k \geq 1$ (ця умова рівносильна тому, що $\{\sqrt{n}\} \geq 1/2$).

Розглянемо тепер частковий випадок $n = k^2 + k + 1$. У ньому нерівність (7) може бути лише рівністю. Більше того, рівностями також мають бути (5) та (6), звідки нескладно довести, що мають виконуватися наступні властивості:

- кожна пара чисел міститься рівно в одній з множин A_l;
- кожні дві множини з A_l мають рівно один спільний елемент;
- кожна з множин A_l містить $k + 1$ елемент;
- кожне число від 1 до n належить $k + 1$ множині.

Перші дві властивості нагадують властивості точок і прямих: через кожні дві точки проходить рівно одна пряма, а кожна пара непаралельних прямих перетинаються рівно в одній точці. Тому такий набір з n елементів і складених з них «прямих» A_l називають *скінченною проективною площиною* (площина проективна, бо довільні дві прямі перетинаються).

Досі немає повної відповіді на питання, для яких k існує скінченна проективна площина. Необхідною умовою є те, що коли k при діленні на 4 дає залишок 1 або 2, то воно має бути сумою двох повних квадратів, зокрема, $k = 6$ не підходить. Щодо достатньої умови, існування проективної площини доведено у випадку, коли k – степінь простого числа.

Для повноти наведемо конструкцію у випадку, коли k просте. Нехай $\mathbb{Z}_k = \{0, \ldots, k-1\}$ – множина залишків від ділення на k. «Точки» нашої площини – це, по-перше, пари залишків (x, y), $x, y \in \mathbb{Z}_k$, по-друге, «нескінченно віддалені» точки $\infty, \infty_0, \infty_1, \ldots, \infty_{k-1}$; всього $k^2 + k + 1$ точок. «Прямі» нашої площини такі:

- k^2 прямих вигляду $y = ax + b$:
$$\{(x, y) : y \equiv ax + b \pmod{k}\} \cup \{\infty_a\},$$
$a, b \in \mathbb{Z}_k$;
- k прямих вигляду $x = a$:
$$\{(a, y), y \in \mathbb{Z}_k\} \cup \{\infty\},$$
$a \in \mathbb{Z}_k$;
- нескінченно віддалена пряма
$$\{\infty, \infty_0, \infty_1, \ldots, \infty_{k-1}\}.$$

Пропонуємо читачу переконатися, що такі точки та прямі задовольняють вказані вище властивості. Називаючи прямі рядками таблиці, точки – стовпчиками, та ставлячи фішки на клітинки тоді, коли точки належать прямим, одержимо бажану розстановку. □

Література

[1] Федак І.В. *XIII Івано-Франківський обласний турнір юних математиків*. Режим доступу: http://tym.in.ua/2017/11/08/xiii-if-tym/