Точні квадрати і задача Ойлера

І.В. Федак

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Ще понад 250 років тому, у 1749 році, Леонард Ойлер у листі до петербурзького академіка Хрістіана Гольдбаха писав, що витратив чимало зусиль для розв'язання однієї задачі. Її суть полягала у знаходженні трійок натуральних чисел $a, b, c,$ для яких $a+b+c,$ $ab+bc+ca$ та abc є квадратами натуральних чисел, причому $(a, b, c)=1.$

Максимальна знайдена Ойлером трійка натуральних чисел (a, b, c) містила два 13-цифрові та одне 12-цифрове число. Але досі залишалося нерозв'язаним питання – скінченною чи нескінченною є множина таких трійок.

Доведемо тут дещо сильніше твердження.

Теорема. Множина трійок натуральних чисел $a, b, c,$ для яких $a+b+c,$ $ab+bc+ca,$ abc та $a^2+b^2+c^2$ є квадратами натуральних чисел, причому $(a, b, c)=1,$ є нескінченною.

Доведення. Умови теореми задовольняє трійка чисел:

$$a=136=8\cdot(8+9),\quad b=153=9\cdot(8+9),\quad c=72=8\cdot 9.$$

Справді, $a+b+c=19^2,$ $ab+bc+ca=204^2,$ $abc=1224^2,$ $a^2+b^2+c^2=217^2.$

Покладемо $a=x(x+y),$ $b=y(x+y),$ $c=xy,$ $x, y\in\mathbb{N}.$ Тоді

$$abc=\left(xy(x+y)\right)^2,\ a^2+b^2+c^2=\left(x^2+xy+y^2\right)^2,$$

$$ab+bc+ca=2xy(x+y)^2,\ a+b+c=x^2+3xy+y^2.$$

Тому достатньо знайти такі натуральні числа $x, y,$ для яких $2xy$ та $x^2+3xy+y^2$ є квадратами натуральних чисел та $(x, y)=1.$

Нехай для натуральних чисел $x, y,$ де $(x, y)=1,$ виконуються рівності

$$2xy=r^2,\ x^2+3xy+y^2=t^2,\ r, t\in\mathbb{N}.$$

Позначимо $|x-y|=q,$ $x+y=s$ і покладемо $X=2r^2t^2>x,$ $Y=q^2s^2>y.$ Тоді

$$2XY=(2qrst)^2,\quad X^2+3XY+Y^2=\left(X+Y+q^2r^2\right)^2.$$

Доведемо, що $(X, Y)=1.$ З рівності $2xy=r^2$ і умови $(x, y)=1$ випливає, що числа x та y різної парності. Тому числа q та s – непарні.

Крім того,

$$q^2+2r^2=s^2,\ 2s^2+r^2=2t^2,\ q^2+4t^2=5s^2.$$

Припустивши, що $(X,Y)\neq 1$, звідси для кожного з можливих при цьому чотирьох випадків: $(q,r)\vdots p$, $(s,r)\vdots p$, $(q,t)\vdots p$, $(s,t)\vdots p$, де $p-$ деяке просте число, отримаємо, що $(q,s)\vdots p$. Тоді й $(x,y)\vdots p$, що суперечить умові $(x,y)=1$.

Нехай тепер

$$x_1=8,\ \ y_1=9,$$
$$x_{n+1}=4x_ny_n\left(x_n^2+3x_ny_n+y_n^2\right),$$
$$y_{n+1}=\left(x_n-y_n\right)^2\left(x_n+y_n\right)^2,\quad n\in\mathbb{N}.$$

З доведеного випливає, що трійки чисел

$$a_n=x_n\left(x_n+y_n\right),\quad b_n=y_n\left(x_n+y_n\right),\quad c_n=x_ny_n$$

задовольняють умови теореми для кожного натурального n, причому $\left(a_n,b_n,c_n\right)=1$, $n\in\mathbb{N}$. Теорема доведена.

Були знайдені також усі пари натуральних чисел x,y різної парності (x – парне, $y-$ непарне), для яких значення виразу $x^2+3xy+y^2$ є квадратом натурального числа, причому $(x,y)=1$:

1) $x=8k,\ y=20k^2-12k+1,\ \ x^2+3xy+y^2=\left(20k^2-1\right)^2$;

2) $x=8k,\ y=4k^2-12k+5,\ k\geq 3,\ k\neq 5l,\ \ x^2+3xy+y^2=\left(4k^2-5\right)^2$;

3) $x=4\left(5k^2+k\right),y=4k+1,\ \ x^2+3xy+y^2=\left(20k^2+10k+1\right)^2$;

4) $x=4\left(k^2-k\right),y=4k+1,\ \ k\geq 2,\ x^2+3xy+y^2=\left(4k^2+2k-1\right)^2$.

Зокрема, з 1) для $k=1$ чи з 4) для $k=2$ отримуємо $x_1=8,\ y_1=9,$ а з 3) для $k=72$ знайдемо $x_2=103968,\ \ y_2=289.$ Такі пари чисел є першими двома елементами послідовності пар $\left(x_n,y_n\right)$, яку ми побудували при доведенні теореми.

Але виявити хоч одну пару чисел (x,y), відмінну від елементів побудованої вище послідовності пар $\left(x_n,y_n\right)$, для якої $2xy$ також є квадратом натурального числа, так і не вдалося.

Відкритим залишається і питання про існування трійок a,b,c, які задовольняють умови теореми, але не представляються у вигляді

$$a=x\left(x+y\right),\ \ b=y\left(x+y\right),\ \ c=xy,\quad x,y\in\mathbb{N}.$$

Федак І.В. Несподівані точні квадрати і задача Ойлера // У світі математики. – 2011. – Т.17, вип.4. – С. 5 – 8.