Федак І.В. Розв'язання деяких задач
16-го Всеукраїнського турніру юних математиків

1. «Спрощення виразу». *Нехай задано многочлен* $Q(x)$ $n-$го *степеня з дійсними коефіцієнтами і набір дійсних чисел* $\lambda_1<\lambda_2<\ldots\lambda_{n+1}$. *Спростіть вираз*

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n+1}a_iQ(x+\lambda_i),$$

де $a_i=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(\lambda_i-\lambda_j)^{-1}$, $1\le i\le n+1$.

Розв'язання. Нехай $Q(x)=q_0x^n+q_1x^{n-1}+\ldots+q_{n-1}x+q_n$. Тоді

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n+1}a_i\sum_{k=0}^{n}Q_k(x)\lambda_i^k=\sum_{k=0}^{n}Q_k(x)\sum_{i=1}^{n+1}a_i\lambda_i^k=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n}Q_k(x)\sum_{i=1}^{n+1}b_i\lambda_i^k=\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{n}Q_k(x)\varphi_k,$$

де $a=\prod_{1\le i<j\le n+1}(\lambda_i-\lambda_j)$, $b_i=(-1)^{i-1}\prod_{\substack{1\le s<j\le n+1\\ s\neq i}}(\lambda_s-\lambda_j)$, $1\le i\le n+1$, $\varphi_k=\sum_{i=1}^{n+1}b_i\lambda_i^k$, $0\le k\le n$,

$Q_n(x)=q_0$, $Q_k(x)$, $0\le k\le n-1$, $-$ деякі многочлени.

Для $k\le n-1$ розглянемо допоміжні функції $\varphi_k(t)$, утворені з виразів φ_k заміною λ_{n+1} на t. Всі такі функції є многочленами від t не вище $(n-1)-$го степеня, причому $\varphi_k(\lambda_i)=0, 1\le i\le n.$ Справді, у виразах $\varphi_k(\lambda_i)=0,\ 1\le i\le n,$ два доданки відрізняються лише знаком, а решта доданків дорівнюють нулю. Тому $\varphi_k(t)\equiv 0, 0\le k\le n-1.$ Отже, також $\varphi_k=0,\ 0\le k\le n-1.$

Відносно виразу φ_n зауважимо, що $\varphi_n=0$ для всіх $\lambda_i=\lambda_j$. Крім того, всі його доданки одного степеня зі степенем виразу a, та коефіцієнт біля доданка $\lambda_1^n\lambda_2^{n-1}\ldots\lambda_{n-1}^2\lambda_n^1$ дорівнює 1, як і у виразі a. Тому, розклавши φ_n на множники, отримаємо $\varphi_n=a$.

Таким чином, остаточно знаходимо $\varphi(x)=\dfrac{1}{a}q_0a=q_0$.

Відповідь. $\varphi(x)$ тотожно дорівнює коефіцієнту при старшому степені заданого многочлена.

2. «*Нерівність з параметром*». *Знайдіть усі такі значення параметра* a, *для яких нерівність* x,y *виконується нерівність*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{a}{x+y}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}$$

має місце для всіх $x>0$ *та* $y>0$.

Розв'язання. Зауважимо, що для $x>0,\ y>0$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x+y}>\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\Leftrightarrow\frac{x^2+xy+y^2}{xy(x+y)}>\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+xy+y^2\right)^2>\left(x^2+y^2\right)(x+y)^2\Leftrightarrow x^2y^2>0.$$

З врахуванням доведеної нерівності для всіх $a\le 1,\ x>0,\ y>0$ маємо

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{1}{x+y}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}\ge\frac{a}{x+y}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}.$$

Якщо ж $a > 1$, то, покладаючи $x = 1$, $y = \frac{1}{a-1}$, отримуємо

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{a}{x+y} = 1, \ \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}} > 1.$$

Відповідь. $a \le 1$.

3. «Туристичний похід». Туристичний похід тривав T годин. Туристи вирушили з табору і спочатку рухалися горизонтальною ділянкою шляху. Потім подолали підйом, а після одногодинного привалу цим же шляхом повернулися до табору. Відомо, що горизонтальною ділянкою вони рухалися зі швидкістю u км/год, на підйомі – зі швидкістю v км/год, а на спуску – зі швидкістю w км/год. Знайдіть необхідні та достатні умови, за яких загальна відстань, пройдена туристами під час походу, визначається однозначно.

Розв'язання. Нехай довжина горизонтальної частини маршруту туристів дорівнює S_1, а довжина похилої частини дорівнює S_2. З умови задачі отримуємо

$$\frac{2S_1}{u} + \frac{S_2}{v} + \frac{S_2}{w} + 1 = T.$$

Позначимо $x = \frac{1}{v} + \frac{1}{w} - \frac{2}{u}$. З врахуванням попередньої рівності виразимо загальну відстань, пройдену туристами під час походу

$$2(S_1 + S_2) = (T - S_2 x - 1)u.$$

Щоб ця відстань визначалася однозначно, необхідно і достатньо, щоб $x = 0$.

Відповідь. $\frac{1}{v} + \frac{1}{w} = \frac{2}{u}$.

4. «Пірати, скарб та математика». *Нехай N і k – задані натуральні числа. N піратів знайшли скарб, що складався з однакових золотих монет, і вирішили поділити його між собою, визначивши жеребкуванням порядок, за яким вони підходитимуть до скрині за скарбом. У встановленій послідовності пірати один за одним підходили до скрині, і кожен з них брав собі одну монету й після цього ще $k -$ту частину від решти монет. Коли у такий спосіб узяв свою долю останній з піратів, то з'ясувалось, що залишилась певна кількість монет, яку пірати змогли розділити між собою порівну.*

4.1. Для $N = 2027$ та $k = 2013$ знайдіть найменшу кількість монет у скарбі, за якої описаний поділ був би можливим.

4.2. Дослідіть величину $S(N,k) -$ найменшу кількість монет у скарбі, за якої описаний поділ був би можливим.

Розв'язання. Якщо $k = 1$, то вже після підходу першого пірата монет у скарбі не залишиться. Тому надалі вважаємо, що $k > 1$. Крім того, при $N = 1$ отримаємо, що умови задачі задовольняє мінімальна кількість монет у скарбі, яка дорівнює $k + 1$. Надалі вважатимемо, що й $N > 1$.

Нехай $m -$ найменша кількість монет у скарбі, за якої описаний поділ є можливим. Позначимо через $x_i, 1 \le i \le N,$ кількість монет, які залишаються у скарбі після того, як свою долю взяв $i -$тий пірат. Враховуючи умову задачі, послідовно знаходимо

$$x_1 = m - 1 - \frac{m-1}{k} = (m-1)\frac{k-1}{k},$$

$$x_2 = (x_1 - 1)\frac{k-1}{k} = \left((m-1)\frac{k-1}{k} - 1\right)\frac{k-1}{k} = (m-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 - \frac{k-1}{k},$$

$$x_3=(x_2-1)\frac{k-1}{k}=(m-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^3-\left(\frac{k-1}{k}\right)^2-\frac{k-1}{k},$$

....

$$x_N=(x_{N-1}-1)\frac{k-1}{k}=(m-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^N-\left(\frac{k-1}{k}\right)^{N-1}-\left(\frac{k-1}{k}\right)^{N-2}-\ldots-\frac{k-1}{k}.$$

Обчисливши тут суму скінченної кількості доданків геометричної прогресії, отримуємо

$$x_N=(m-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^N+k\left(\frac{k-1}{k}\right)^N-(k-1)=(m+k-1)\left(\frac{k-1}{k}\right)^N-(k-1).$$

Оскільки $k-1$ та $k-$ взаємно прості числа, то x_N, а разом з ним і всі попередні x_i, буде цілим, якщо $m+k-1=l\cdot k^N$ при деякому натуральному $l.$ При цьому отримаємо, що

$$x_N=l(k-1)^N-(k-1).$$

Вибравши найменше з таких $l,$ для якого $x_N>0$ і ділиться на $N,$ знайдемо розв’язок

$$m=l\cdot k^N-k+1.$$

Проаналізуємо отримані тут результати:

а) Зрозуміло, що для $k=2$ найменшим є $l=N+1.$ Тоді $m=(N+1)2^N-1.$

б) Якщо $k-1>1$ і ділиться на $N,$ то, очевидно, $l=1$ та $m=k^N-k+1.$

в) Якщо $N-$ просте число, то при кожному $k>2$ внаслідок теореми Ферма ($a^p-a\equiv 0(\operatorname{mod} p),$ $a\in\mathbb{Z},$ $p-$просте число) також отримуємо $l=1$ та $m=k^N-k+1.$ Звідси, зокрема, випливає, що $S(2027,2013)=2013^{2027}-2012.$

г) Якщо $k>2$ і $(k-1,N)=1,$ то знайдемо найменше натуральне число s таке, що $q=s\varphi(N)-N+1\geq 0,$ де $\varphi(N)-$кількість невід’ємних цілих чисел, менших від N і взаємно простих з N (функція Ейлера). За теоремою Ейлера ($a^{\varphi(N)}-1\equiv 0(\operatorname{mod} N),$ $N>1,$ $(a,N)=1$) , покладаючи $a=k-1,$ $l=(k-1)^q,$ отримаємо

$$x_N=l(k-1)^N-(k-1)=(k-1)\left(\left((k-1)^{\varphi(N)}\right)^s-1\right)\equiv(k-1)^{\varphi(N)}-1\equiv 0(\operatorname{mod} N).$$

При цьому $m=k^{s\varphi(N)+1}-k+1.$

д) Якщо $k>2$ і $(k-1,N)=d>1,$ то розглянемо всі прості дільники p числа $d.$

Якщо хоч один з них входить у розклад на множники числа $k-1$ з максимальним степенем n нижчим, ніж у розклад на множники числа $N,$ то описаний розподіл скарбу виявиться неможливим. Справді, при цьому $x_N=l(k-1)^N-(k-1)$ не ділиться на p^{n+1} при всіх натуральних $l,$ а $N-$ ділиться. Наприклад, при $k=3,$ $N=4.$

У протилежному разі після ділення на d задача зводиться до дослідження подільності числа $l(k-1)^{N-1}-1$ на $M=\dfrac{N}{d},$ $(k-1,M)=1.$ Вибравши найменше натуральне число s таке, що $q=s\varphi(M)-N+1\geq 0,$ покладемо $a=k-1,$ $l=(k-1)^q.$ Міркуючи аналогічно, як у пункті г), отримаємо $\dfrac{x_N}{d}\equiv 0(\operatorname{mod} M),$ тобто $x_N\equiv 0(\operatorname{mod} N).$ Відповідно знаходимо $m=k^{s\varphi(M)+1}-k+1.$

Відповідь.

4.1. $2013^{2027}-2012.$

4.2. $k=1-$умову задачі не задовольняє;

$S(1,k)=k+1,\ k>1;$

$S(N,2)=(N+1)2^N-1,\ \ N>1;$

$S(N,k)=k^{s\varphi\left(\frac{N}{d}\right)+1}-k+1,\ \ k>2,\ \ N>1,\ \ (k-1,N)=d,\ \left(d,\dfrac{N}{d}\right)=1,$

де $\varphi(n)$ – функція Ейлера, s – найменше натуральне число таке, що $s\varphi\left(\dfrac{N}{d}\right)-N+1\geq 0$ (зокрема, $s=1,\ S(N,k)=k^N-k+1,$ якщо N – просте число, $k>2$);

$k>2,\ N>1,\ \ (k-1,N)=d,\ \left(d,\dfrac{N}{d}\right)>1,$ – описаний поділ неможливий.

5. «Многочлен».

5.1. Чи існує такий многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність

$$P\left(x+x^2\right)=x+x^2+...+x^{2013}+x^{2014}?$$

5.2. Чи існує такий многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що для деяких дійсних чисел a і b та для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність

$$P\left(x+x^2+x^3\right)=x+x^2+x^3+...+x^{2010}+ax^{2011}+bx^{2012}+x^{2013}?$$

Розв'язання.

5.1. Підставивши $x=1,$ отримуємо $P(2)=2014.$ А, підставивши $x=-2,$ будемо мати $P(2)=(-2+4)+(-8+16)+...+\left(-2^{2013}+2^{2014}\right)=2+8+...+2^{2013}\neq 2014.$ Отримана суперечність доводить, що такого многочлена $P(x)$ не існує.

5.2. Скористаємося комплексними числами. Підставляючи $x=-1$ та $x=i,$ отримуємо $P(-1)=-a+b-1$ та $P(-1)=i-1-ai+b+i$ відповідно. Прирівнюючи дійсні та уявні частини отриманих значень, приходимо до системи рівнянь $-a+b-1=b-1$ та $2-a=0,$ яка не має розв'язків. Отже, такого многочлена $P(x)$ не існує.

Відповідь. В обох випадках такого многочлена не існує.

7. «Сума степенів та зростання послідовності». *Знайдіть усі такі трійки додатних дійсних чисел $a,b,c,$ для яких послідовність $u_n=a^n+b^n+c^n,\ n\geq 1,$ зростає.*

Розв'язання. З нерівності $u_2>u_1$ маємо необхідну умову зростання послідовності

$$a^2+b^2+c^2>a+b+c\Leftrightarrow\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Доведемо, що ця умова є й достатньою. Припустивши, що це не так, знайдемо таке найменше $n,$ для якого $u_{n+1}\leq u_n,$ але $u_n>u_{n-1}.$ Тоді повинна виконуватися нерівність

$$\left(a^n+b^n+c^n\right)^2>\left(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}\right)\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^{n-1}b^{n-1}(a-b)^2+b^{n-1}c^{n-1}(b-c)^2+a^{n-1}c^{n-1}(a-c)^2<0.$$

Отримане протиріччя й доводить достатність необхідної умови.

З геометричної точки зору трійки a,b,c можна трактувати, як координати тих точок першого октанту, які лежать поза сферою радіуса $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ з центром у точці $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right).$

Відповідь. Шуканою є множина трійок додатних чисел $a,b,c,$ які задовольняють нерівність $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

Зауваження. Отриманий результат допускає таке природне узагальнення: для зростання послідовності $u_n=a_1^n+a_2^n+...+a_m^n,\ n\ge 1,\ m\ge 1,\ a_i>0,\ 1\le i\le m,$ необхідно і достатньо, щоб виконувалася нерівність

$$\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a_2-\frac{1}{2}\right)^2+...+\left(a_m-\frac{1}{2}\right)^2>\left(\frac{\sqrt{m}}{2}\right)^2.$$

8. «Функціональне рівняння». *Знайдіть усі такі монотонні на відрізку* $[1;2]$ *функції* $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},$ *що для довільних дійсних* $r\ge 0$ *і* $\varphi\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$ *виконується рівність*

$$f(r\cos\varphi)+f(r\sin\varphi)=f(r).$$

Розв'язання. Підставимо $r=0.$ Тоді $f(0)+f(0)=f(0),$ отже, $f(0)=0.$

Підставимо $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Тоді для всіх $r\ge 0$ послідовно отримаємо рівності:

$$f\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)+f\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)=f(r),\ f(r)=2f\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right),\ f\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)=2f\left(\frac{r}{2}\right),\ f(r)=4f\left(\frac{r}{2}\right).$$

Звідси випливає, що $f\left(r\cdot 2^k\right)=2^{2k}f(r),\ k\in\mathbb{Z}.$ Тому функція f буде монотонною не лише на відрізку $[1;2],$ а й на всіх відрізках $\left[2^k;2^{k+1}\right],\ k\in\mathbb{Z}.$ А отже, функція f – монотонна на $(0;\infty)$.

Визначимо функцію $f:[0;\infty)\to\mathbb{R},$ таку, що $g(x)=f\left(\sqrt{x}\right).$ Тоді $g(0)=0$ та $f(x)=g\left(x^2\right).$ При цьому з монотонності функції f на інтервалі $(0;\infty)$ випливає, що й функція g – монотонна на $(0;\infty)$.

З умови задачі отримуємо, що $g\left(r^2\cos^2\varphi\right)+g\left(r^2\sin^2\varphi\right)=g\left(r^2\right)$ для довільних дійсних $r\ge 0$ і $\varphi\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}\right]$. Отже, $g(u)+g(v)=g(u+v)$ для всіх додатних чисел u та v таких, що $1\le\frac{u}{v}\le 3.$

Доведемо методом математичної індукції, що $g(nx)=ng(x),\ n\in\mathbb{N}.$

Для $n=1$ маємо $g(x)=g(x).$ Припустимо, що $g(nx)=ng(x)$ для всіх $n<k.$ Тоді, покладаючи $u=v=mx,$ для парних $k=2m$ отримаємо

$$g(kx)=g(mx+mx)=g(mx)+g(mx)=2g(mx)=2mg(x)=kg(x).$$

А, покладаючи $u=(m+1)x,\ v=mx,$ для непарних $k=2m+1$ будемо мати

$$g(kx)=g((m+1)x+mx)=g((m+1)x)+g(mx)=(m+1)g(x)+mg(x)=kg(x).$$

Звідси випливає справедливість рівності $g(nx)=ng(x)$ для всіх $n\in\mathbb{N}.$

Нехай $g(1)=c.$ Тоді, поклавши у доведеній рівності $x=\frac{1}{n},$ отримаємо $g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{c}{n}.$ Тому $g\left(\frac{m}{n}\right)=mg\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}c$ для всіх натуральних чисел m та $n.$

Таким чином, $g(x)=cx$ для всіх додатних раціональних значень аргумента $x.$

Нехай тепер x_0 – довільне додатне ірраціональне число. З доведеного випливає, що $g(x_n)=cx_n \to cx_0$ для довільної послідовності (x_n) додатних раціональних чисел такої, що $x_n \to x_0.$ Тому нерівність $g(x_0)\neq cx_0$ суперечитиме умові монотонності функції g на інтервалі $(0;\infty).$

Отже, враховуючи ще й рівність $g(0)=0,$ ми довели, що $g(x)=cx,\ x\geq 0.$ Відповідно $f(x)=cx^2,\ x\geq 0.$

Перевірка показує, що для довільних дійсних значень $c\neq 0$ всі такі функції задовольняють умови задачі.

Відповідь. $f(x)=cx^2,\ c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$

10. «Нова мова дикунів». *Нехай $a_1<a_2<...<a_k$ – алфавіт дикунів племені Мумбо, а $b_1<b_2<...<b_m$ – алфавіт дикунів племені Юмбо (запис « $x<y$ » означає, що літера x передує літері y). Ці алфавіти (позначимо їх через A і B відповідно) не мають жодної спільної літери. Обидва племені вирішили об'єднатись та створити нову мову. Словом мови племені Мумбо-Юмбо вважатиметься послідовність літер $c_1c_2...c_n$, $c_i\in A\bigcup B, 1\leq i\leq n,$ яка задовольняє такі чотири умови:*

а) якщо для $i<j,$ $c_i\in A$ і $c_j\in A$, то $c_i<c_j$ або $c_i=c_j$;

б) якщо для $i<j,$ $c_i\in B$ і $c_j\in B$, то $c_i<c_j$ або $c_i=c_j$;

в) $c_i\neq c_{i+1}$ для всіх $i,$ $1\leq i\leq n-1$;

г) $c_i\neq c_{i+2}$ для всіх $i,$ $1\leq i\leq n-2$.

Яку найбільшу довжину можуть мати слова нової мови?

Розв'язання. Зауважимо, що для отримання найдовшого слова в об'єднаній мові необхідно використати всі літери кожного з алфавітів та найбільшу сумарну кількість повторень таких літер. З умов задачі випливає, що між двома літерами одного алфавіту, які повторюються, повинні знаходитися не менше двох різних літер, взятих з іншого алфавіту. З них надалі повторитися зможе тільки остання літера. Тому найдовше слово в об'єднаному алфавіті отримаємо, якщо між двома однаковими літерами буде рівно дві літери іншого алфавіту. Таким чином, кожній літері, яка повторюється, відповідатиме пара двох літер іншого алфавіту, яка передує повторюваній літері.

Для конкретності будемо вважати, що $k\leq m.$ Тоді з літер алфавіту A можна утворити максимум $k-1$ пар сусідніх літер: $a_1a_2, a_2a_3,...a_{k-1}a_k$. Це означає, що з алфавіту B може повторитися не більше $k-1$ літери, тобто разом з повтореннями у найдовше слово об'єднаного алфавіту увійде максимум $m+k-1$ символів алфавіту $B.$ Разом вони можуть утворити не більше $\left[\frac{m+k-1}{2}\right]$ пар, які передують повторюваним літерам алфавіту $A,$ з якого внаслідок цього у найдовше слово об'єднаного алфавіту увійдуть максимум $k+\left[\frac{m+k-1}{2}\right]$ символів, де $[a]$ означає найбільше ціле число, яке не перевищує $a.$ Отже, довжина слова об'єднаного алфавіту не може перевищувати

$$m+2k-1+\left[\frac{m+k-1}{2}\right]=\left[\frac{3m+5k-1}{2}\right].$$

Слова такої максимальної довжини в об’єднаному алфавіті існують і мають вигляд

$$a_1b_1b_2a_1a_2b_2b_3a_2a_3...b_{k-1}b_ka_{k-1}a_kb_kb_{k+1}a_kb_{k+2}b_{k+3}a_kb_{k+4}b_{k+5}a_k...a_kb_{m-2}b_{m-1}a_kb_m,\ m+k=2l,\ l\in\mathbb{N},$$

або

$$a_1b_1b_2a_1a_2b_2b_3a_2a_3...b_{k-1}b_ka_{k-1}a_kb_kb_{k+1}a_kb_{k+2}b_{k+3}a_kb_{k+4}b_{k+5}a_k...a_kb_{m-1}b_ma_k,\ m+k=2l+1,\ l\in\mathbb{N}.$$

Аналогічно розглядається випадок $m\le k.$

Відповідь. $\min\left\{\left[\frac{3m+5k-1}{2}\right],\left[\frac{3k+5m-1}{2}\right]\right\}.$

11. «Прості числа й точні квадрати». Знайдіть усі такі прості числа $p,$ для яких $37p^2-47p+4$ є квадратом натурального числа.

Розв’язання. Нехай $37p^2-47p+4=n^2,\ n\in\mathbb{N}.$ Тоді $p(37p-47)=(n-2)(n+2).$ Отже, $n-2$ або $n+2$ ділиться на просте число $p.$

Якщо $n-2=kp,\ k\in\mathbb{Z}_+,$ то з отриманої рівності послідовно знаходимо $n+2=kp+4,$ $p(37p-47)=kp(kp+4),$ $\left(37-k^2\right)p=4k+47.$ Звідси випливає, що $k\le 6.$ Перебором таких k знаходимо два розв’язки: $p=3$ при $k=4$ та $p=71$ при $k=6.$

Якщо ж $n+2=lp,\ l\in\mathbb{N},$ то аналогічно маємо $n-2=lp-4,$ $\left(37-l^2\right)p=47-4l.$ Для $l\le 6$ перебором знаходимо ще один розв’язок $p=23$ при $l=6.$ А для $l>6$ відсутність інших розв’язків випливає з нерівності $\left(l^2-37\right)p>6l-37>4l-47.$

Відповідь. $p=3,$ $p=23$ і $p=71.$

13. «Рекурентне співвідношення та подільність». *Розглянемо послідовність*

$$\{a_n\}_{n\ge1}:a_1=0,\ a_2=\alpha,\ a_n=\lambda a_{n-1}+\mu a_{n-2},\ n\ge 3.$$

Чи існують такі натуральні числа $\alpha,\ \lambda,\ \mu,$ що для кожного простого числа $p>2$ число a_{p^2} ділиться без остачі на p?

Розв’язання. Нехай $\alpha=2^k\left(2^k+1\right),$ $\lambda=2^k-1,$ $\mu=2^k,$ де k – довільне натуральне число. Методом математичної індукції доведемо, що

$$a_n=2^{nk}+(-1)^n2^k,\ n\ge1.$$

Для $n=1$ та $n=2$ така рівність справджується, тобто маємо $a_1=0,\ a_2=2^k\left(2^k+1\right)=\alpha.$ Припустимо, що вона правильна для $n=m$ та $n=m+1.$ Тоді для $n=m+2$ отримаємо

$$a_{m+2}=\lambda a_{m+1}+\mu a_m=\left(2^k-1\right)\left(2^{(m+1)k}+(-1)^{m+1}2^k\right)+2^k\left(2^{mk}+(-1)^m2^k\right)=2^{(m+2)k}+(-1)^{m+2}2^k.$$

Звідси випливає справедливість записаної формули загального члена послідовності для всіх натуральних $n.$ Покладаючи $n=p^2,\ p>2,$ за теоремою Ферма одержуємо

$$a_{p^2}=2^{p^2k}+(-1)^{p^2}2^k=2^k\left(\left(2^{p-1}\right)^{k(p+1)}-1\right)\equiv 2^{p-1}-1\equiv 0\pmod p,$$

що і треба було довести.

Зауважимо, що й для $p=2$ число $a_{p^2}=2^{4k}+2^k$ ділиться без остачі на $p.$

Відзначимо також, що, міркуючи аналогічно, для побудованої послідовності можна довести загальніше твердження: для кожного простого числа $p>2$ та довільного натурального числа m числа a_{p^m} діляться без остачі на $p.$

Відповідь. Таких трійок натуральних чисел є нескінченна кількість.

14. «Планарні графи». *Знайдіть найменше* k, *для якого довільний планарний простий скінченний граф можна було б орієнтувати так, щоб півстепінь виходу кожної з його вершин* (*тобто кількість стрілок, що виходять з цієї вершини*) *не перевищувала* k.

Розв'язання. Нагадаємо, що планарним називається граф, який може бути зображений на площині без перетину ребер. Для зв'язного плоского графа справедливе наступне відношення між кількістю вершин V, ребер R та граней H:

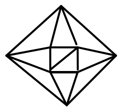
$$V - R + H = 2 \quad \text{(формула Ейлера).}$$

Якщо кожна грань графа обмежена принаймні трьома ребрами (за умови, що у графі більше двох ребер), то з формули Ейлера отримаємо, що $3H \le 2R$, звідки випливає, що

$$R \le 3V - 6.$$

Остання нерівність є необхідною (хоч і не є достатньою) умовою планарності графа.

Розглянемо простий планарний граф, зображений на рисунку.



У ньому 8 вершин та 17 ребер. Оскільки $17 > 2 \cdot 8$, то півстепінь виходу принаймні однієї з його вершин більший, ніж 2. Отже, $k > 2$.

Нехай тепер маємо довільний простий скінченний планарний граф. Якщо у кожній його вершині сходиться не більше трьох ребер, то для довільної орієнтації цього графа півстепінь виходу кожної з вершин не перевищує 3. А за наявності вершини, в якій сходиться більше трьох ребер, вилучимо цю вершину із графа разом з довільними трьома ребрами, які виходили з неї, вважаючи, що вони були орієнтовані у напрямі від вилученої вершини. Аналогічно поступаємо з вершинами графа, який утворився після такого вилучення, у яких сходиться більше трьох ребер (якщо такі вершини є) і т.д. З необхідної умови планарності випливає, що за скінченне число таких вилучень вершин, у яких сходиться більше трьох ребер, не залишиться. Орієнтуючи отриманий у такий спосіб граф довільним чином і відновлюючи вилучені раніше вершини та орієнтовані від них ребра, отримаємо орієнтацію вихідного графа, для якого півстепінь кожної з вершин не перевищує 3.

Відповідь. $k = 3$.

18. «Кола на площині». *Визначте, яку найбільшу кількість кіл одиничного радіуса можна розташувати на площині так, щоб виконувалися такі дві умови:*

а) *відстань між центрами будь-яких двох кіл не більша за 10;*

б) *для кожного з кіл знайдеться така пряма, що це коло лежить по один бік від неї, а решта кіл – по інший.*

Розв'язання. Зрозуміло, що центри таких кіл повинні знаходитися у вершинах опуклого многокутника, найбільша діагональ якого не перевищує 10. Розглянемо правильний $n-$кутник $A_1A_2...A_n$ з найбільшою діагоналлю 10 і вершинами на колі радіуса R з центром у точці O. Побудуємо одиничні кола з центрами у його вершинах і проведемо дотичні до них, які перетинають радіуси OA_i, $1 \le i \le n$, під прямим кутом. Дотичні, проведені до трьох послідовно розміщених одиничних кіл, обмежують деякий рівнобедрений трикутник ABC з кутом $\varphi = \dfrac{2\pi}{n}$ при основі AC. Оскільки

$$\frac{1}{2}AC = (R-1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{n},$$

то радіус вписаного у цей трикутник кола

$$r=\frac{1}{2}AC\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}=(R-1)\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}.$$

Умови задачі будуть виконані, якщо $r\geq 1.$

Для $n=6$ маємо $R=5,\ r=4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}>1,$ а, отже, 6 кіл розмістити таким чином вдасться.

Для $n=7$ знаходимо $R=5\Big/\cos\frac{\pi}{14}$ і переконуємося, що $r=\left(\left(5\Big/\cos\frac{\pi}{14}\right)-1\right)\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{7}<1.$ Тому розташувати 7 кіл з центрами у вершинах правильного семикутника так, щоб виконувалися умови задачі, не можна.

Відповідь. 6 кіл.

19. «Дві функції». *Знайдіть усі множини $A\subset[0;1]$, для кожної з яких існують функції $f:[0;1]\to[0;1]$ і $g:[0;1]\to[0;1]$, що задовольняють такі умови:*

а) g – монотонна функція, множина значень якої – відрізок $[0;1]$;

б) для всіх $u\in[0;1]$ і $v\in[0;1]$ виконується нерівність $|f(u)-f(v)|\leq|g(u)-g(v)|$;

в) $A=\{x\in[0;1]: f(x)=g(x)\}$.

Розв'язання. Умову задачі задовольняють всі одноелементні підмножини відрізка $[0;1]$. Справді, якщо $A=\{\alpha\},\ \alpha\in[0;1],$ то шуканими будуть, наприклад, функції $f(x)=\alpha,\ g(x)=x.$

Крім того, якщо множина $A\subset[0;1]$ містить точки α та $\beta,\ \alpha<\beta,$ то $(\alpha;\beta)\subset A.$ Припустивши протилежне, тобто $f(\gamma)\neq g(\gamma)$ для деякого $\gamma\in(\alpha;\beta),$ внаслідок монотонності функції $g(x)$ отримаємо невиконання однієї з нерівностей: $|f(\gamma)-f(\alpha)|\leq|g(\gamma)-g(\alpha)|$ або $|f(\beta)-f(\gamma)|\leq|g(\beta)-g(\gamma)|.$ Отже, такого типу множини $A\subset[0;1]$ є суцільними проміжками з цього відрізка.

Доведемо, що й, навпаки, з включення $(\alpha;\beta)\subset A$ випливає, що $\alpha\in A$ та $\beta\in A.$ Для цього зауважимо, що всяка монотонна функція, значення якої заповнюють деякий проміжок, є неперервною. Далі, припустивши, що $\alpha\notin A,$ тобто $f(\alpha)\neq g(\alpha),$ покладемо $v=\alpha,\ \ u\in(\alpha;\beta).$ Перейшовши до границі при $u\to\alpha,$ отримаємо

$$|f(u)-f(v)|=|g(u)-f(\alpha)|\to|g(\alpha)-f(\alpha)|>0,$$
$$|g(u)-g(v)|=|g(u)-g(\alpha)|\to 0.$$

Отже, для $u\in(\alpha;\beta)$ достатньо близьких до α умова в) задачі не виконується. Отримали суперечність, з якої випливає, що $\alpha\in A.$ Аналогічно доводиться, що й $\beta\in A.$

Таким чином, множини $A,$ які містять більше одного елемента, можуть бути лише відрізками вигляду $[\alpha;\beta]\subset[0;1].$ Всі такі відрізки задовольняють умову задачі, наприклад, для функцій $g(x)=x,\ \ f(x)=\begin{cases}\alpha,\ 0\leq x\leq\alpha,\\ x,\ \alpha<x<\beta,\\ \beta,\ \beta\leq x\leq 1.\end{cases}$

Відповідь. $A=[\alpha;\beta],$ де α,β – довільні дійсні числа такі, що $0\leq\alpha\leq\beta\leq 1.$

21. «Найбільше значення». *Нехай $n\geq 2$. Знайдіть найбільше значення виразу*

$$\frac{\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

для додатних $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *які задовольняють умову* $a_1a_2\ldots a_n = 1$.

Розв'язання. Доведемо, що найбільше значення заданого виразу дорівнює $\sqrt{2}$, тобто треба довести нерівність:

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots+\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right).$$

Для цього, розглянемо функцію

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln x,\ \text{де}\ x>0.$$

Її похідна дорівнює

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}x}.$$

Знайдемо її критичні точки при $x>0$. Оскільки при $x>0$ похідна $f'(x)$ існує, то критичні точки функції $f(x)$ знаходимо з умови $f'(x)=0$, тобто з рівняння

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}x}=0.$$

Зауважимо, що при $x>0$

$$f''(x)=\frac{1}{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}x^2}=\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}-\frac{1}{\sqrt{2}x^2}<0,$$

бо

$$\left(x^2+1\right)^3=x^6+3x^4+3x^2+1>2x^4.$$

Тому функція $f'(x)$ на інтервалі $(0,+\infty)$ спадає. Отже, рівняння $f'(x)=0$ може мати на цьому інтервалі не більше одного кореня. Легко побачити, що ним є $x=1$.

Отже, $x=1$ – єдина критична точка функції $f(x)$. Оскільки $f'(x)>0$ при $0<x<1$ та $f'(x)<0$ при $x>1$, то при $x>0$ виконується нерівність $f(x)\le f(1)=0$, тобто при $x>0$

$$\sqrt{x^2+1}\le\sqrt{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln x.$$

Це означає, що для додатних $a_1, a_2, \ldots, a_n$ виконуються нерівності:

$$\sqrt{a_1^2+1}\le\sqrt{2}a_1-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln a_1,$$

$$\sqrt{a_2^2+1}\le\sqrt{2}a_2-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln a_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}a_n-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln a_n.$$

Додавши ці нерівності, одержуємо:

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots.+\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(a_1a_2\ldots a_n\right).$$

Оскільки $a_1a_2\ldots a_n=1$, то

$$\sqrt{a_1^2+1}+\sqrt{a_2^2+1}+\ldots.+\sqrt{a_n^2+1}\le\sqrt{2}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right),$$

що і треба було довести. Рівність досягається для $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$.

Відповідь. $\sqrt{2}$.