І.В. Федак

МЕТОДИ ОЛІМПІАДНОЇ МАТЕМАТИКИ В ПОЗАКЛАСНІЙ РОБОТІ З УЧНЯМИ

(*8 годин: 4 год. лекційних + 4 год. практичних занять*)

На математичних олімпіадах різних рівнів як правило пропонуються задачі з таких чотирьох розділів математики: теорія чисел, комбінаторика, алгебра, геометрія.

Зупинимося детальніше на аналізі основних методів розв’язування таких задач.

Частина з цих задач може бути розв’язана безпосередньо під час заняття, а решта – рекомендовані для самостійного опрацювання.

I. Теорія чисел

Теоретичні відомості

Задачі цього розділу вимагають від учнів знання ознак подільності та властивостей остач при діленні на різні натуральні числа. Крім того, багато цікавих задач з теорії чисел пов’язані з поняттям парності.

Основними ідеями, які використовуються при розв’язуванні олімпіадних задач, пов’язаних з парністю, є: чергування, парність як інваріант, метод групування, підрахунок двома способами.

Задачі, пов’язані з подільністю, ґрунтуються на тому, що кожне натуральне число, крім одиниці, єдиним способом розкладається у добуток простих множників. Це твердження називають *основною теоремою арифметики.* Зрозуміло, що число a ділиться на просте число p тоді і тільки тоді, коли p є одним із множників згаданого розкладу.

Два числа називаються взаємно простими, якщо у них немає спільних дільників, відмінних від одиниці. Легко довести такі очевидні твердження:

а) якщо деяке число ділиться на два взаємно прості числа m та n, то воно ділиться і на їх добуток mn;

б) якщо число pa ділиться на n, де p і n взаємно прості, то a ділиться на n.

Відзначимо також властивість спільного дільника кількох чисел бути й дільником їх суми чи різниці.

Крім того, при розв'язуванні задач, пов'язаних із подільністю чисел, важливу роль відіграють ознаки подільності.

Деякі з них добре відомі учням. Зокрема, число a ділиться на 3, якщо сума його цифр ділиться на 3; на 4 – якщо число, складене з двох останніх його цифр, ділиться на 4; на 8 – якщо число, складене з трьох останніх його цифр, ділиться на 8; на 9 – якщо сума цифр ділиться на 9 тощо.

Для подільності натурального числа a на 11 необхідно і достатньо, щоб сума цифр, які у десятковому записі числа a стоять на непарних місцях, мінус сума цифр, які стоять на парних місцях, ділилась на 11.

Для встановлення подільності числа $\overline{abcdeh}$ на 7, 11 та 13 достатньо перевірити, чи ділиться відповідно на 7, 11 чи 13 число $\overline{deh}-\overline{abc}$. Такий спосіб перевірки ґрунтується на рівностях

$$7\cdot 11\cdot 13=1001,\ \overline{abcdeh}=1001\cdot\overline{abc}+\left(\overline{deh}-\overline{abc}\right).$$

Звідси легко отримати й ознаки подільності довільних натуральних чисел на 7, 11 чи 13. Для цього достатньо розбити таке число справа наліво на розряди по три цифри в кожному, почергово присвоїти їм знаки «+» та «–», обчислити суму отриманих при цьому чисел з врахуванням присвоєних знаків і дослідити її на подільність на 7, 11 чи 13 відповідно.

Доводячи ознаки подільності на 3 та на 9, доцільно звернути увагу учнів на той факт, що натуральне число n і сума його цифр при діленні на 3 (чи на 9) дають відповідно одну й ту ж остачу.

З інших властивостей остач відзначимо наступні властивості дій над ними:

1). Сума будь-яких двох натуральних чисел і сума їх остач при діленні на натуральне число $m\geq 2$ дають однакові остачі;

2). Добуток будь-яких двох натуральних чисел і добуток їх остач при діленні на натуральне число $m\geq 2$ теж дають однакові остачі.

У багатьох олімпіадних задачах до успіху приводить знання того, що квадрати натуральних чисел при діленні на 3 та 4 можуть давати лише остачі 0 або 1, а при діленні на 8 – лише остачі 0, 1 або 4.

Цікавими є й властивості остач для вищих степенів. Зокрема, куби натуральних чисел при діленні на 7 можуть давати лише остачі 0, 1 та 6, а при діленні на 9 – лише остачі 0, 1, 8.

Такі властивості остач можуть, наприклад, використовуватися при розв'язуванні рівнянь у цілих числах. При цьому слід врахувати, що при діленні на будь-яке натуральне число ліва та права частина рівняння повинні давати однакові остачі.

Справедлива також наступна теорема, яку ще називають *малою теоремою Ферма:* якщо $p -$ просте число, то $n^p - n \vdots p$.

Відзначимо й так звану *“китайську теорема про лишки”:* для довільного набору попарно взаємно простих чисел $m_1, m_2, ..., m_n$ і цілих чисел $r_1, r_2, ..., r_n$, де $0 \le r_i < m_i$, існує таке число k, яке при діленні на m_i дає остачу r_i, $i = 1, 2, ..., n$.

Задачі для самостійного розв’язування

Задача 1.1. Автобусні квитки мають номери від 000000 до 999999. Квиток вважається щасливим, якщо сума перших трьох цифр його номера дорівнює сумі трьох останніх цифр. Доведіть, що:

а) загальна кількість щасливих квитків парна;

б) сума номерів щасливих квитків ділиться на 13.

Задача 1.2. Чи можна таблицю розмірами 5×5 заповнити числами 1, 2, 3, …, 25 так, щоб у кожному рядку таблиці сума перших двох чисел дорівнювала сумі трьох інших чисел цього рядка?

Задача 1.3. На дошці записані числа 1, 2, 3, ..., 2016. Дозволяється витерти з дошки довільні два числа, а замість них записати модуль їхньої різниці. Чи може після 2015-ьох таких кроків на дошці залишитися число 1 ?

Задача 1.4. Доведіть, що для простих чисел p та q, більших за 3, число $p^2 - q^2$ ділиться на 24.

Задача 1.5. Нехай $S(k)$ означає суму цифр натурального числа k. Знайдіть всі натуральні числа n, які задовольняють рівність:

а) $n + S(n) = 2015$; б) $n + S(n) + S(S(n)) = 2015$.

Задача 1.6. Якою максимальною кількістю нулів може закінчуватися число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$?

Задача 1.7. Всі двоцифрові числа від 32 до 86 включно виписали у деякому порядку одне за одним. Чи могли при цьому одержати запис простого числа?

Задача 1.8. Доведіть, що кожне з рівнянь: $x^2 + 2010 = y^2$ та $x^3 + 2010 = y^3$ не має розв’язків у натуральних числах.

Задача 1.9. Знайдіть усі трійки натуральних чисел x, y, z, для яких виконується рівність $105^x + 211^y = 106^z$.

Задача 1.10. Знайдіть найменше натуральне число, яке при діленні на 2 дає остачу 1, при діленні на 3 – остачу 2, на 4 – остачу 3, ... , на 10 – остачу 9.

ІІ. Комбінаторика

Теоретичні відомості

Комбінаторні задачі як правило пов’язані з підрахунком елементів у деякій множині або кількості способів виконання тих чи інших операцій.

Припустимо, що нам потрібно підрахувати кількість елементів деякої множини, які задовольняють певним умовам. Припустимо, що вибір довільного елемента такої множини можна розбити на декілька послідовних етапів. Нехай на першому етапі для вибору конкретного елемента у нас є n_1 можливостей. Далі, не залежно від результату першого вибору, на другому етапі для вибору того ж елемента є n_2 можливостей. Потім, не залежно від результатів перших двох етапів, на третьому етапі є n_3 можливостей, і т.д. Нарешті, на останньому k-тому етапі, не залежно від раніше здійсненого вибору, є n_k можливостей. Тоді загальна кількість елементів даної множини дорівнює $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$. Цей висновок називають *правилом множення.*

Наприклад, для визначення кількості трицифрових чисел, всі цифри яких різні, достатньо обчислити добуток $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. Тут враховано, що першою не може бути цифра 0, а наступні цифри не співпадають з записаними раніше.

За правилом множення знаходять також кількість можливих перестановок з n елементів заданої множини. Вона дорівнює $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$

Окремо виділимо випадок, коли елементи заданої множини повторюються. Наприклад, перестановкою букв слова «математика» можна отримати лише $\dfrac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$ різних слів, бо у ньому буква «а» зустрічається тричі, а букви «м» і «т» – двічі.

До основних комбінаторних формул відноситься і формула

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k-1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \; k = \overline{0,n}.$$

для числа комбінацій із n елементів по k елементів. При цьому вважають, що 0! = 1.

Очевидно, що $C_n^{n-k} = C_n^k$. Така рівність випливає як і з записаної формули, так і з того, що вибір k елементів рівносильний не вибору решти $n-k$ елементів.

Зауважимо, що числа C_n^k мають найрізноманітніші застосування. Зокрема, вони виступають в ролі коефіцієнтів у *формулі бінома Ньютона:*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Підставляючи тут $a = b = 1$, отримаємо рівність

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots C_n^k + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n,$$

якою визначається кількість усіх можливих підмножин множини, яка складається з n елементів.

Відзначимо також рівність $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$, яку можна довести як на підставі записаних формул, так і з допомогою логічних міркувань.

Водночас зауважимо, що в більшості олімпіадних задач комбінаторні обчислення часто носять лише допоміжний характер або поєднуються з іншими міркуваннями.

Крім того, відзначимо, що до комбінаторних олімпіадних задач відносять й багато інших задач логічного характеру: на використання принципу Діріхле, розфарбування, інваріанти, ігри двох осіб, зважування тощо.

На популярному рівні *принцип Діріхле* полягає в наступному: якщо m кроликів розмістити у n клітках і $m > n$, то принаймні в одній з кліток опиниться не менше двох кроликів.

Узагальнюючи його на випадок $m > nk$, отримаємо, що при цьому принаймні в одну з кліток доведеться помістити не менше $(k+1)$-го кролика.

Часто принцип Діріхле використовують також в геометричній формі, наприклад:

а) якщо на відрізку довжини l розташовано декілька відрізків, сума довжин яких більша l, то принаймні два з цих відрізків мають спільну точку;

б) якщо на колі радіуса R розташовано декілька дуг, сума довжин яких більша $2\pi R$, то принаймні дві з цих дуг мають спільну точку;

в) якщо всередині фігури з площею S розташовано декілька фігур, сума площ яких більша S, то принаймні дві з цих фігур мають спільну точку.

Багато олімпіадних задач пов’язані з шаховою дошкою та розфарбуваннями у шаховому порядку. Основна ідея їх розв’язування ґрунтується на чергуванні чорних та білих клітинок у процесі здійснюваних перетворень чи підрахунку кількості таких клітинок.

В олімпіадних задачах на розрізання дошки чи вирізання з неї окремих фігурок використовують також інші види розфарбовування, що буде проілюстровано для наведених нижче прикладів.

При розв'язуванні багатьох задач доводиться мати справу з такою ситуацією: задана система послідовно змінює свій стан, і необхідно визначити певну характеристику її кінцевого стану. Повністю прослідкувати за всіма переходами буває складно, а то й неможливо. Тоді знайти розв'язок допомагає обчислення деякої величини, що характеризує стан системи і зберігається при всіх її переходах. Таку величину називають *інваріантом* даної системи. При цьому значення інваріанта у початковому та кінцевому станах співпадають.

З застосуванням інваріантів ми вже мали справу при розв'язуванні задач 1.3 та 1.7.

Багато інваріантів зустрічаємо в геометрії: суми кутів довільного трикутника; суми квадратів катетів прямокутних трикутників; величини вписаних кутів, які спираються на одну дугу, тощо.

Корисними будуть інваріанти і в окремих задачах на зважування, побудову нестандартних конструкцій тощо.

Ще один клас олімпіадних задач, для розв'язування яких важливу роль відіграють інваріанти, утворюють задачі на ігри двох осіб. У кожній такій грі беруть участь двоє. Вони роблять ходи почергово. Вимагається встановити, у котрого з гравців (того, що починає гру, чи його суперника) є виграшна стратегія, тобто шлях, який неминуче приведе до перемоги незалежно від ходів суперника, і в чому вона полягає. Повний перебір усіх можливих ходів та ходів-відповідей, як правило, здійснити не вдається. Тому доводиться шукати деяку властивість-інваріант, на основі якої можна побудувати виграшну стратегію.

Часто таку стратегію вдається отримати, здійснюючи аналіз з кінця *виграшних позицій*. Насамперед, такою вважають кінцеву позицію, яка, згідно правил гри, відповідає перемозі одного із гравців. Всі позиції, з яких можна дістатися до кінцевої за один хід, називають програшними. Адже гравець, який займе їх своїм ходом, програє вже після наступного ходу суперника. В той же час позицію, після довільного ходу з якої суперник займе програшну позицію, знову можна вважати виграшною. А всі позиції, з яких хоч один хід веде у виграшну позицію, знову будуть програшними.

Таким чином, для здобуття перемоги при правильній грі гравцеві необхідно весь час займати виграшні позиції.

Якщо початкова позиція була програшною, то при правильній грі переможе перший гравець, а якщо виграшна – то його суперник.

У складніших ситуаціях доводиться також мати справу з так званими *умовно виграшними позиціями*.

Ефективними при розв’язуванні ігрових задач є також методи симетрії та взаємно однозначної відповідності.

Задачі для самостійного розв’язування

Задача 2.1. Яких семицифрових чисел більше: тих, у десятковому записі яких використовується цифра 7, чи тих, у десятковому записі яких вона відсутня?

Задача 2.2. Обґрунтуйте справедливість рівності $C_{n+1}^{k} = C_{n}^{k} + C_{n}^{k-1}$, не користуючись формулою для обчислення C_{n}^{k}.

Задача 2.3. Доведіть, що серед будь-яких десяти цілих чисел можна вибрати одне чи декілька, сума яких ділиться на 10.

Задача 2.4. У квадраті зі стороною 1 довільним чином вибрали 51 точку. Доведіть, що деякі три зі цих точок можна накрити кругом радіуса 1/7.

Задача 2.5. Доведіть, що у десятковому записі числа 1999^{6} принаймні одна цифра використовується не менше трьох разів.

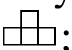
Задача 2.6. 8 шахістів провели турнір в одне коло. Виявилося, що серед будь-яких трьох шахістів принаймні двоє зіграли між собою внічию. Яка найменша можлива кількість нічиїх на цьому турнірі.

Задача 2.7. У кожній клітинці дошки 5×5 сидить жук. У деякий момент часу всі жуки переповзають у сусідні по горизонталі чи по вертикалі клітинки.

а). Доведіть, що хоч одна клітинка залишиться порожньою.

б). Яка максимальна кількість клітинок може звільнитися?

Задача 2.8. Доведіть, що дошку 10×10 не можна покрити:

а) 25-ма плитками вигляду ;

б) 25-ма прямокутними плитками розмірами 1×4.

Задача 2.9. Хуліган вирізав із шахової дошки 8 квадратиків 2×2. Доведіть, що з решти цієї дошки вдасться вирізати ще принаймні один такий квадратик.

Задача 2.10. а). На столі лежать 24 сірники. Двоє по черзі беруть їх зі столу. За один хід можна взяти 1 або 2 сірники. Виграє той, хто візьме останній сірник. Котрий з гравців має виграшну стратегію?

б). Розв’яжіть аналогічну задачу за умови, що один і той же гравець не має права взяти 2 сірники двічі підряд.

III. Алгебра

Теоретичні відомості

Алгебраїчні задачі різноманітних математичних олімпіад як правило полягають у розв'язуванні алгебраїчних, трансцендентних та функціональних рівнянь, розв'язуванні чи доведенні нерівностей, використання елементів математичного аналізу.

Часто для розв'язування таких задач вдається скористатися властивостями квадратного тричлена ax^2+bx+c, $a\neq 0$, та формулами Вієта для його коренів: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Зауважимо, що для коренів многочлена ax^3+bx^2+cx+d, $a\neq 0$, третього степеня аналогічні формули мають вигляд:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a},\ x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}.$$

До застосування властивостей квадратного тричлена зводиться й доведення нерівності Коші-Буняковського:

$$\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2\leq\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right).$$

Справді, з того, що для кожного дійсного значення x виконуються нерівності $(a_kx-b_k)^2\geq 0,\ k=\overline{1,n},$ випливає нерівність

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)x+b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\geq 0.$$

Тому дискримінант квадратного тричлена у її лівій частині

$$D=4(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2-4(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\leq 0.$$

Зауважимо, що рівність у ній досягається, якщо набори чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ та $b_1,b_2,\ldots,b_n$ пропорційні, тобто, якщо існує таке x_0, що $a_kx_0=b_k$ або $b_kx_0=a_k$ для всіх k одночасно.

Покладаючи в нерівності Коші-Буняковського $b_i^2=x_i>0$, $a_i=\frac{y_i}{\sqrt{x_i}}$, $i=\overline{1,n}$, отримаємо нерівність

$$\frac{\left(y_1+y_2+\ldots+y_n\right)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}\leq\frac{y_1^2}{x_1}+\frac{y_2^2}{x_2}+\ldots+\frac{y_n^2}{x_n}..$$

А розглядаючи вектори $\vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, нерівність Коші-Буняковського запишемо у вигляді: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Така форма її запису дає змогу використовувати вектори для доведення нерівностей.

З квадратним тричленом тісно пов’язаний і розклад довільного многочлена на множники. У загальному випадку розклад многочлена $P_n(x)$ має вигляд:

$$a_0(x-c_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(x-c_m)^{\alpha_m}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_ex+q_e)^{\beta_e},$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_m$ – деякі дійсні числа, $\alpha_1+\ldots+\alpha_m+2(\beta_1+\ldots+\beta_e)=n$, причому записані у цьому розкладі квадратичні множники не мають дійсних коренів.

Існує багато способів отримати такий розклад. Серед них важливу роль відіграє метод невизначених коефіцієнтів.

Наприклад, для розв’язування рівняння $x^4+3x^3+3x^2-2=0$ можна скористатися тотожністю

$$x^4+3x^3+3x^2-2=\left(x^2+bx+c\right)\left(x^2+px+q\right)\equiv$$

$$\equiv x^4+(p+b)x^3+(c+q+pb)x^2+(bq+pc)x+cq.$$

Отже, коефіцієнти b, c, p, q задовольняють такі співвідношення: $b+p=3,\ c+q+bp=3,\ bq+pc=0,\ cq=-2.$ Починаючи з останнього рівняння, легко перевірити, що для цього підходять числа: $b=1,$ $c=-1,\ \ p=q=2.$ Тому початкове рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь: $x^2+x-1=0$ та $x^2+2x+2=0.$

Багато рівнянь зводиться до квадратних з використанням підстановок вигляду $y=ax^2+bx+c$ чи $y=ax+b+\dfrac{c}{x}.$

Ефективним може бути і розгляд рівняння як квадратного відносно параметра.

Відзначимо також, що для розв’язування рівнянь вигляду $f\left(x\right)=g\left(x\right)$, у яких одна з функцій є монотонно зростаючою, а друга – монотонно спадною, достатнім буде вгадати їх єдиний корінь, або довести відсутність розв’язків.

З монотонними функціями пов’язане і розв’язування рівнянь вигляду $f\left(f\ldots\left(x\right)\ldots\right)=x$. Частину його коренів (а іноді і всі) можна знайти, розв’язавши простіше рівняння $f\left(x\right)=x$.

Рівняння з радикалами іноді доцільно звести до системи рівнянь. Наприклад, покладаючи $\sqrt[3]{1+x}=u,$ $\sqrt{4-x}=v,$ з рівняння $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt{4-x}=3$ отримаємо систему рівнянь $u+v=3,\ \ u^3+v^2=5,$ яку вже нескладно розв’язати.

За наявності радикалів $\sqrt{a^2-x^2}$ чи $\sqrt{a^2+x^2}$ доцільно скористатися тригонометричними підстановками: $x=a\cdot\sin t,$ $x=a\cdot\cos t$ чи $x=a\cdot\text{tg}t,$ $x=a\cdot\text{ctg}t$ відповідно.

А для розв'язування рівняння $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}=\sqrt{2}$ ефективною буде його геометрична інтерпретація.

Зауваживши, що для $x\le 0$ ліва частина рівняння не менша двох, розглянемо прямокутний трикутник з катетами $AC=BC=1.$ Нехай $CX=x>0,$ $\angle XCA=60°,$ $\angle XCB=30°.$ За теоремою косинусів $\sqrt{x^2-x+1}=AX,$ $\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}=BX,$ $\sqrt{2}=AB.$ На основі заданого рівняння маємо, що $AX+BX=AB.$ Тому точка X лежить на відрізку $AB.$ З рівності для площ трикутників: $S_{ACB}=S_{ACX}+S_{BCX},$ тобто $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x\cdot\sin 60°+\frac{1}{2}x\cdot\sin 30°$, знаходимо $x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1.$

Відзначимо, що така ідея могла бути використана і для доведення нерівності $\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}\ge\sqrt{2}.$

Серед класичних нерівностей відзначимо нерівності між середніми степеневими, які часто зустрічаються при розв'язуванні олімпіадних задач.

Середнім степеневим додатних чисел $x_1,x_2,...,x_n$ порядку $k,$ де $k\ne 0$ – довільне дійсне число, називають число

$$C_k=\left(\frac{x_1^k+x_2^k+...+x_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

При $k=1$ число C_k є *середнім арифметичним*, при $k=2$ – середнім квадратичним, а при $k=-1$ – *середнім гармонійним* заданих чисел. Нагадаємо також, що число $G=\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$ називається їх *середнім геометричним*.

Для них справджуються такі нерівності: $C_{-1}\le G\le C_1\le C_2,$ рівність в яких досягається лише у разі $x_1=x_2=...=x_n.$ Нерівність $C_1\ge G\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$ називається *нерівністю Коші*.

З неї легко отримати відомі нерівності для додатних взаємно обернених чисел: $a+\frac{1}{a}\ge 2$ та $\left(x_1+x_2+...+x_n\right)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)\ge n^2.$

Серед інших методів доведення нерівностей виділимо *метод підсилення*. Його суть полягає в тому, що замість нерівності вигляду $a > b$ доводять дві нерівності: $a > c$ та $c > b$. Іноді таких проміжних нерівностей може бути і більше.

Корисною при доведенні нерівностей є й нерівність $(a-b)^2 \geq 0$, яка для $b > 0$ рівносильна нерівності $\frac{a^2}{b} \geq 2a - b$. З неї, зокрема, для додатних чисел a, b, c отримуємо $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$.

З нерівності Коші випливає й загальніша нерівність такого роду:

$$\frac{x^n}{y^{n-1}} \geq nx - (n-1)y, \ x > 0, y > 0, n \in N.$$

Вкажемо також на доцільність заміни заданої нерівності рівносильною їй нерівністю. Наприклад, $a > b \Leftrightarrow 1 - a < 1 - b$, чи $a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ для додатних a, b.

У деяких випадках рівносильні нерівності можуть мати і дещо хитрішу структуру: $A \geq B \Leftrightarrow A \geq 2B - A$, $A \geq B \Leftrightarrow A + A \geq 2B$ тощо.

Серед інших методів доведення нерівностей виділимо застосування похідної для доведення нерівності Бернуллі: $(1+x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x$, якщо $x > -1, \alpha \notin (0,1)$, чи $(1+x)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x$, якщо $x > -1, \alpha \in (0,1)$.

Цікавими є й геометричні міркування при доведенні нерівностей, пов'язані з властивостями функцій, або ж довжин, площ чи об'ємів.

Зокрема, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ опукла вгору, то

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}$$

для будь-яких точок $x_1, x_2, ..., x_n$ з цього відрізка (*нерівність Єнсена*). Для опуклої вниз функції знак цієї нерівності змінюється на протилежний.

Відзначимо також специфіку застосування методу математичної індукції для доведення деяких нерівностей:

а) якщо $a_0 \geq b_0$, $a_n - a_{n-1} \geq b_n - b_{n-1}$, $n \in N$, то $a_n \geq b_n$, $n \in N$;

б) якщо $a_0 \geq b_0 > 0$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} \geq \frac{b_n}{b_{n-1}} > 0$, $n \in N$, то $a_n \geq b_n$, $n \in N$.

Для обґрунтування справедливості сформульованих тверджень досить відповідно додати нерівності

$$a_0 \ge b_0,\ a_1 - a_0 \ge b_1 - b_0,\ \dots,\ a_n - a_{n-1} \ge b_n - b_{n-1}$$

чи перемножити нерівності

$$a_0 \ge b_0 > 0,\ \frac{a_1}{a_0} \ge \frac{b_1}{b_0} > 0,\ \dots,\ \frac{a_n}{a_{n-1}} \ge \frac{b_n}{b_{n-1}} > 0.$$

Задачі для самостійного розв'язування

<u>Задача 3.1.</u> Петрусь виписав на дошці 2016 зведених квадратних рівнянь і переконався, що жодне з них не має дійсних коренів. Потім він додав усі ці рівняння. Доведіть, що і отримане у такий спосіб рівняння також не має дійсних коренів.

<u>Задача 3.2.</u> Корені рівняння $x^2 + ax + b + 1 = 0$ є натуральними числами. Доведіть, що число $a^2 + b^2$ складене.

<u>Задача 3.3.</u> Розв'яжіть рівняння:

а) $x(x+1)(x^2+7x+12) = 2016$; б) $x^4 - 2\sqrt{5}x^2 + x + 5 - \sqrt{5} = 0$.

<u>Задача 3.4.</u> Використовуючи метод суперпозиції функцій, розв'яжіть рівняння $\sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{3-x}}} = x$.

<u>Задача 3.5.</u> Розв'яжіть рівняння $\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x$, звівши його до:

а) системи рівнянь;

б) рівняння, квадратного відносно параметра.

<u>Задача 3.6.</u> Доведіть нерівності: а) $513^{18} > 623^{17}$;

б) $\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}} < 5$,

якщо в обох доданках використано по 2016 радикалів.

<u>Задача 3.7.</u> Для $a, b, c \ge 1$ знайдіть найменше значення виразу

$$\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}.$$

<u>Задача 3.8.</u> Для кутів трикутника ABC доведіть нерівність

$$\sin\angle A + \sin\angle B + \sin\angle C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

<u>Задача 3.9.</u> Числа x, y, z належать інтервалу $(0;1)$. Доведіть нерівності:

а) $x(1-y) + y(1-x) < 1$, б) $x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1$.

<u>Задача 3.10.</u> Обґрунтуйте нерівність $n^n \ge (n+1)^{n-1}$, $n \in N$.

IV. Геометрія

Теоретичні відомості

Методів розв’язування геометричних задач є так багато, що намагання охопити їх усіх є безперспективним. У зв’язку з цим акцентуємо увагу на тих властивостях геометричних об’єктів, які в більшій чи меншій мірі використовуються при розв’язування більшості планіметричних задач.

Спочатку ми коротко перерахуємо їх, а потім проілюструємо на конкретних прикладах.

Чи не найважливішою з них, яка дає змогу розв’язувати цілком змістовні задачі, є наступна властивість: сума двох сторін трикутника більша його третьої сторони. Вона може використовуватися як безпосередньо, так і в задачах на найменше та найбільше значення.

Серед часто використовуваних властивостей є також ознаки рівності трикутників, властивості рівнобедрених та прямокутних трикутників, властивості подібних фігур.

Зокрема, відповідні лінійні елементи подібних фігур пропорційні, а відношення площ таких фігур дорівнює квадрату відношень відповідних лінійних вимірів.

У багатьох олімпіадних задачах доводиться враховувати рівність вписаних кутів, які спираються на одну дугу, чи властивість кута між хордою і дотичною.

З цією властивістю тісно пов’язана й необхідна та достатня умова, щоб навколо чотирикутника можна було описати коло: суми протилежних кутів такого чотирикутника повинні дорівнювати 180°.

Відзначимо також й окремі властивості деяких цікавих ліній та точок у трикутнику:

1). Медіани трикутника перетинаються в одній точці і діляться нею у відношенні $2:1$, рахуючи від вершин трикутника. Кожна медіана ділить площу трикутника пополам, а всі три разом – на 6 рівновеликих частин.

2). Висоти трикутника перетинаються в одній точці. Точки, симетричні до неї відносно сторін трикутника, лежать на описаному колі цього трикутника.

3). Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці – центрі описаного кола цього трикутника.

4). Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці – центрі вписаного у цей трикутник кола. Кожна бісектриса точкою перетину ділиться у відношенні, рівному відношенню суми прилеглих сторін трикутника до його протилежної сторони. Протилежну ж сторону бісектриса ділить у відношенні, рівному відношенню прилеглих сторін. Щодо бісектриси довільного кута, то, крім того, що вона ділить цей кут пополам, доцільно не забувати, що така лінія є геометричним місцем точок рівновіддалених від сторін кута.

5). Відрізки дотичних до кола, проведені з однієї точки поза цим колом, рівні між собою. Звідси, зокрема отримуємо: у чотирикутник можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли суми його протилежних сторін рівні.

Згадаємо також деякі формули для площ. До основних формул, за якими обчислюють площу трикутника, відносяться:

$$S=\frac{1}{2}ah_a,\ S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle A,\ S=pr,$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ – формула Герона.

Аналогічно для опуклого чотирикутника маємо $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, де d_1, d_2 – діагоналі, φ – кут між ними, $S=pr$. А для вписаного чотирикутника $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, де $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Зауважимо, що площа часто використовується як допоміжний елемент для розв’язування задач, у яких вона явно не фігурує, зокрема, для доведення *теореми Чеви*: для того, щоб відрізки AA_1, BB_1, CC_1 перетиналися в одній точці всередині трикутника ABC, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність $\dfrac{AB_1}{B_1C}\cdot\dfrac{CA_1}{A_1B}\cdot\dfrac{BC_1}{C_1A}=1$.

Обмежуючись перерахованими вище властивостями, перейдемо до розв’язування задач.

Задачі для самостійного розв’язування

<u>Задача 4.1.</u> Для сторін довільного трикутника доведіть нерівність $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$. Чи завжди з відрізків, які задовольняють цю нерівність, вдасться скласти трикутник?

<u>Задача 4.2.</u> Задана пряма і дві точки з однієї сторони від неї. Знайдіть на цій прямій таку точку M, щоб сума відстаней від неї до заданих точок була найменшою.

Задача 4.3. На рівній галявині росло 11 ялинок, всі попарні відстані між якими були різними. Під кожною ялинкою сидів заєць. Коли завив вовк, кожен заєць перебіг до найближчої ялинки. Доведіть, що: а) принаймні під однією ялинкою опинилося не менше двох зайців; б) під жодною ялинкою не опинилося більше 5 зайців.

Задача 4.4. Пряма AK ділить медіану BM трикутника ABC пополам. У якому відношенні вона ділить сторону BC?

Задача 4.5. Точку M всередині квадрата з'єднали з його вершинами. При цьому одержали чотири трикутники, один з яких – рівнобедрений з кутом $150°$. Визначити кути трьох інших трикутників.

Задача 4.6. Задано коло, вершина A вписаного у нього трикутника ABC та: а) точка H перетину висот; б) точка I перетину бісектрис цього трикутника. Знайти дві інші вершини трикутника.

Задача 4.7. Відрізок MN, паралельний до основ трапеції $AD = a$, $BC = b$, $a > b$, ділить її площу пополам. Виразіть довжину цього відрізка через довжини основ трапеції.

Задача 4.8. Через точку K на стороні трикутника проведіть пряму, яка ділить площу цього трикутника пополам.

Задача 4.9. Доведіть, що у правильному трикутнику сума відстаней від довільної внутрішньої точки до сторін трикутника є сталою.

Задача 4.10. У колі проведено діаметр CD. Хорда AB перетинає його у точці M під кутом $45°$. Доведіть, що сума $AM^2 + BM^2$ не залежить від розташування точки M на діаметрі.

Задача 4.11. Кут B трикутника ABC дорівнює $60°$. Бісектриси AE та CD перетинаються у точці O. Доведіть, $OE = OD$.

Задача 4.12. Нехай CK – бісектриса трикутника ABC. Доведіть, що $AC \cdot BC - AK \cdot BK = CK^2$.

Задача 4.13. Доведіть, що якщо центри вписаного та описаного кіл трикутника співпадають, то цей трикутник правильний.

Задача 4.14. Знайдіть висоту дерева, якщо його з відстаней a, b, c видно під кутами, сума яких дорівнює $90°$.

Задача 4.15. Сторони трикутника поділили на 15 рівних частин і з'єднали відрізками точки поділу з протилежними вершинами. Доведіть, що знайдуться такі три з проведених відрізків, які перетинаються в одній точці всередині трикутника. Чи залишиться справедливим це твердження у разі поділу сторін на 17 рівних частин?

Відповіді та вказівки до розв'язування задач

1.1. Згрупуйте квитки у пари: перший з останнім, другий з передостаннім і так далі, та доведіть, що у кожній парі кількість щасливих квитків парна, а сума їх номерів ділиться на 13.

1.2. Не можна. Сума всіх заданих чисел є непарною, а сума чисел кожного рядка мала би бути парною.

1.3. Не може. Числа $x+y$ та $|x-y|$ – однієї парності, тому число, яке залишиться, матиме ту ж парність, що й сума всіх записаних спочатку чисел, отже, також буде парним. Можна міркувати ще й так. При кожній заміні кількість непарних чисел або не змінюється, або зменшується на 2. Спочатку було 1008 непарних чисел, то й вкінці на дошці залишиться парне число.

1.4. $p^2-q^2=\left(p^2-1\right)-\left(q^2-1\right)$, $24=3\cdot 8$ і числа 3 та 8 взаємно прості. Тому достатньо окремо довести подільність на 3 та на 8 чисел вигляду $p^2-1=\left(p-1\right)\left(p+1\right)$.

1.5. а). $n=1993$ та $n=2011$. Справді, $n<2015$, $S(n)\le 28$. Тому $n\ge 2015-28=1987$. Оскільки n та $S\left(n\right)$ при діленні на 9 дають однакові остачі, то для отримання в сумі числа 2015 з остачею 8, необхідно, щоб $n=9k+4$. Отже, достатньо перевірити лише числа 1993, 2002, 2011 з проміжку $\left[1987;\ 2015\right)$.

б). Таких n не існує, бо при діленні на 3 кожен доданок лівої частини рівності дає одну і ту ж остачу. Отже, для кожного натурального n вираз зліва ділиться на 3, а 2015 на 3 не ділиться.

1.6. Двома. Наприклад, якщо $n=3$. Більшої кількості нулів отримати не вдасться, бо число 1000 ділиться на 8, а, аналізуючи доданки заданої суми, отримаємо, що її остачі від ділення на 8 можуть дорівнювати лише 2 або 4.

1.7. Не могли. Переконайтеся, що у кожному такому числі різниця між сумою цифр, записаних на непарних позиціях, і сумою цифр, записаних на парних позиціях, ділиться на 11.

1.8. Проаналізуйте можливі остачі обох частин записаних рівнянь при діленні на 4 та на 9 відповідно.

1.9. $x=2$, $y=1$, $z=2$. Врахуйте, що при $z\ge 3$ число 106^z ділиться на 8, а остачі лівої частини рівняння при цьому можуть дорівнювати лише 2 або 4. При $z=1$ маємо нерівність $211^y>106^z$. А для $z=2$ знаходимо $y=1$ та $x=2$.

1.10. 2519. Якщо збільшити шукане число на 1, то отримане число буде ділитися на 2, 3, 4, ..., 10 без остачі. Найменшим натуральним числом, яке має таку властивість, є $2520 = 8\cdot 9\cdot 5\cdot 7$.

2.1. Перших чисел більше. Справді, всіх семицифрових чисел є $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 9\cdot 10^6$. З них чисел, в записі яких відсутня цифра 7, буде $8\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 8\cdot 9^6$. Отже, чисел, в записі яких вона використовується, є $9\cdot 10^6 - 8\cdot 9^6$. Залишилось зауважити, що

$$(9\cdot 10^6 - 8\cdot 9^6) - 8\cdot 9^6 = 9\cdot (10^6 - 16\cdot 9^5) = 9\cdot 16\cdot (100\cdot 5^4 - 9^5) =$$
$$= 9\cdot 16\cdot (62500 - 59049) > 0$$

2.2. Припустимо, що нам треба сформувати команду із k учнів класу, в якому навчається $n+1$ учень. Візьмемо довільного учня цього класу. Якщо він не входить у таку команду з k учнів, то вона сформована з решти n учнів класу, для чого існує C_n^k можливостей. Якщо ж він входить до неї, то інших $(k-1)$-го члена команди можна вибрати із решти n учнів класу. Тому кількість способів формування такої команди з одного боку дорівнює C_{n+1}^k, а з іншого – сумі $C_n^k + C_n^{k-1}$.

2.3. Складемо такі 11 сум: 0, a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \ldots$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$. Принаймні дві з них при діленні на 10 дають однакові остачі. Їхня різниця буде шуканою сумою, яка ділиться на 10.

2.4. Розіб’ємо квадрат на 25 однакових менших квадратиків зі стороною 0,2. Оскільки $51 > 25\cdot 2$, то принаймні в одному з них опиниться не менше трьох зі цих точок. Круг радіуса 1/7 з центром у центрі такого квадратика, також покриє ці три точки.

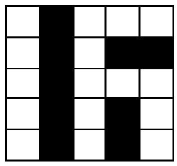
2.5. Оскільки $1900^6 < 1999^6 < 2000^6$, і кожне з двох крайніх чисел двадцятицифрове, то й число 1999^6 теж є двадцятицифровим. Якщо жодна цифра не повторюється тричі, то отримаємо, що кожна з цифр використана рівно два рази, і сума цифр цього числа дорівнює 90. Та цього бути не може, бо 1999^6 не ділиться на 3.

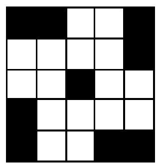
2.6. Дванадцять. Розіб’ємо шахістів на дві групи по чотири учасники. Яких би трьох шахістів ми не взяли, принаймні два з них попадуть в одну групу. Припустимо, що в кожній з груп усі шахісти зіграли між собою внічию. Тоді кількість нічиїх дорівнює $C_4^2 + C_4^2 = 12$. Зауважимо, що при цьому кожен шахіст зіграв внічию тричі. Меншою кількість нічиїх могла би бути лише тоді, коли б хтось зіграв внічию не більше двох разів.

Припустимо, що таким є гравець A. Якщо він зіграв внічию двічі, то знайдуться 5 шахістів, з якими він не розійшовся миром. Складемо трійку, в яку входить A та довільні два гравці з цих п'яти. Оскільки A з вибраними гравцями не зіграв внічию, то вони мусили зіграти внічию між собою. Отже, всі партії в цій п'ятірці завершилися внічию. Таких нічиїх було $C_5^2 = 10$, і разом маємо не менше 12-ти нічийних зустрічей. Аналогічно розглядаються випадки, коли A зіграв внічию 1 чи 0 разів.

2.7. а). Розфарбуємо дошку у шаховому порядку. Переповзаючи в сусідню клітинку, жук опиняється в клітинці протилежного кольору. Тому 12 жуків, які спочатку були у клітинках білого кольору, не зможуть зайняти всі 13 клітинок чорного кольору.

б). 16. Всі жуки після переповзань можуть зібратися, наприклад, на дев'яти клітинках, виділених на мал. 1. Щоб довести, що ця кількість є мінімальною розглянемо мал. 2. Жодні два жуки із виділених на ньому клітинок після переповзання не можуть опинитися в одній і тій же клітинці дошки. Тому ними будуть зайняті не менше дев'яти різних клітинок.

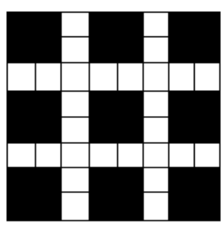

Мал. 1


Мал. 2

2.8. а). Розфарбуємо дошку у шаховому порядку. Тоді кожна така фігурка з 25-ти виставлених покриє непарну кількість клітинок як білого, так і чорного кольору, і ми отримаємо суперечність з тим, що всіх покритих клітинок кожного кольору має бути по 50.

б). Розфарбуємо дошку у чотири кольори так, щоб кожен такий прямокутник покривав 4 клітинки різного кольору. Для розрізання необхідно, щоб кожного кольору було по 25 клітинок. Проте клітинок одного з кольорів виявиться 24, а ще одного – 26.

2.9. Виділимо на дошці 9 квадратиків 2×2 так, як показано на мал. 3. Як не був би вирізаний з дошки квадратик 2×2 за вказаними в умові правилами, він не перекриється більше, ніж з одним із виділених квадратиків. Тому 8 вирізаних квадратиків не можуть пошкодити більше, ніж 8 виділених. Отже, принаймні на місці одного із виділених квадратиків вдасться вирізати ще один квадратик 2×2.


Мал. 3

2.10. а). Переможе другий гравець. Нескладно побачити, що виграшними є позиції, кратні числу 3. Тому другому гравцеві для перемоги достатньо на взяття суперником одного сірника відповідати забиранням двох сірників, і навпаки.

б). Проведемо аналіз з кінця. Число 0 є виграшною позицією. Число 1, безумовно, програшна позиція. Адже, взявши 1 сірник, виграє суперник. З числами 2 та 3 однозначно визначитися не вдається. Справді, 2 буде виграшною позицією, якщо суперник у даний час не має права брати 2 сірники, і програшною – якщо в нього таке право є. Аналогічно, число 3 буде виграшною позицією лише при одній додатковій умові, що своїм попереднім ходом було взято 1 сірник. Таким чином, пошук наступної виграшної позиції необхідно продовжити. Число 4 – програшна позиція. Адже, взявши 1 сірник, суперник має змогу зайняти уже точно виграшну для себе позицію 3. Оцінимо тепер число 5. Якщо суперник забирає 1 сірник, то він попадає у програшну позицію 4, а якщо забирає 2 сірники, то позиція 3 для нього теж є програшною. Адже, якщо перед наступним його ходом залишити 2 сірники, то взяти обидва з них він уже не має права. Отже, число 5 є виграшною позицією. Аналогічно встановлюємо, що наступною виграшною позицією є число 10, а потім – і всі числа, кратні 5, тобто 15 та 20. Відповідно, всі позиції вигляду $5n+1$ та $5n+4$ будуть програшними, зокрема, і початкова позиція 24. Таким чином, виграшна стратегія є у першого гравця. Для перемоги йому достатньо у кожній парі з двох своїх послідовних ходів першим ходом завжди забирати 1 сірник, а другим ходом, у залежності від гри суперника, забирати 1 чи 2 сірники так, щоб після цього кількість сірників, які залишаються на столі, була кратною 5.

3.1. Оскільки коефіцієнти біля x^2 у всіх рівняннях дорівнюють одиниці і рівняння не мають дійсних коренів, то їх ліві частини набувають лише додатних значень. Отже, і ліва частина отриманого рівняння також набуватиме лише додатних значень. Тому таке рівняння не матиме дійсних коренів.

3.2. Оскільки $x_1+x_2=-a,\ x_1\cdot x_2=b+1,$ то

$$a^2+b^2=\left(x_1+x_2\right)^2+\left(x_1x_2-1\right)^2=\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right),$$

причому обидва множники, які входять у цей добуток, більші від одиниці натуральні числа. Отже, число a^2+b^2 складене.

3.3. а) $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$. Згрупувавши множники у лівій частині рівняння відповідним чином, запишемо його у вигляді $(x^2+4x)(x^2+4x+3)=2016$. Заміна $y=x^2+4x$ приведе нас до рівняння $y^2+3y-2016=0$, яке вже нескладно розв'язати.

б) Введемо параметр $\sqrt{5}=a$ і розглянемо задане рівняння як квадратне відносно цього параметра: $a^2-(2x^2+1)a+x^4+x=0$.

Його дискримінант $D=(2x^2+1)^2-4(x^4+x)=(2x-1)^2\geq 0$. Тому $a_{1,2}=\dfrac{(2x^2+1)\pm(2x-1)}{2}$. Отже, залишається розв'язати таку сукупність квадратних рівнянь: $x^2+x=\sqrt{5}$ та $x^2+x+1=\sqrt{5}$.

3.4. На області визначення функції $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{3-x}}}$ послідовно одержимо: функція $\sqrt{3-x}$ – спадає, функція $\sqrt{3-\sqrt{3-x}}$ – зростає, а $f(x)=\sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{3-x}}}$ – знову спадає. А оскільки функція $y=x$ – зростаюча, то це рівняння має не більше одного кореня. Нехай x_0 – корінь рівняння $\sqrt{3-x}=x$. Тоді $\sqrt{3-x_0}=x_0$, і послідовно отримуємо

$$\sqrt{3-\sqrt{3-\sqrt{3-x_0}}}=\sqrt{3-\sqrt{3-x_0}}=\sqrt{3-x_0}=x_0.$$

Отже, $x_0=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$ – єдиний корінь заданого рівняння.

3.5. а) Позначимо $\sqrt{a+x}=y$. Тоді $\sqrt{a-y}=x$. Підносячи обидві частини одержаних різностей до квадрата, одержимо таку систему рівнянь: $\begin{cases} a+x=y^2 \\ a-y=x^2 \end{cases}$. Віднімаючи від першого рівняння системи друге, знайдемо: $x+y=y^2-x^2$, звідки $x+y=0$ або $y-x=1$. Враховуючи, що $x\geq 0$, $y\geq 0$, з першої з цих рівностей знаходимо $x=y=0$, що можливо лише при $a=0$. Далі, з другої рівності, маємо: $y=x+1$. Підставляючи це значення в друге рівняння системи, дістанемо $a-x-1=x^2$. Оскільки $x\geq 0$, то при $a\geq 1$ одержуємо розв'язок $x=\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$. А при інших a таке рівняння не має дійсних коренів.

б) Переконайтеся, що це рівняння зводиться до рівняння $a^2-\left(2x^2+1\right)a+x^4+x=0$, яке розглядалося в задачі 3.3 б). Не забудьте відкинути сторонні корені.

3.6. а) $513^{18}>512^{18}=2^{162}>2^{161}=128^{23}>125^{23}=5^{69}>5^{68}=625^{17}>623^{17}$.

б) $$\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}<$$
$$<\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{8}}}}=3+2=5.$$

3.7. Позначимо $A=\dfrac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}$. Оскільки $A>0$, то розглянемо $\dfrac{1}{A}=\dfrac{a+2b+c}{(a+b)(b+c)}=\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}$. Маємо $\dfrac{1}{A}\le\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{1}{1+1}=1$. Тому $A\ge 1$. Рівність досягається для $a=b=c=1$.

3.8. Оскільки функція $y=\sin x$ на відрізку $[0;\pi]$. опукла вгору, то за нерівністю Єнсена маємо:
$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\le\sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Звідси й отримуємо потрібну нерівність.

3.9. а). Розглянемо квадрат зі стороною 1 і поділимо дві його суміжні сторони на відрізки з довжинами $x, 1-x$ та $y, 1-y$ відповідно. Прямі, проведені через точки поділу, розіб'ють квадрат на чотири прямокутники, площі двох з яких чисельно дорівнюють доданкам лівої частини нерівності. Тому сума цих доданків менша за площу одиничного квадрата, тобто менша за 1.

б). Достатньо записати нерівність у вигляді
$$x\cdot(1-y)\cdot 1+1\cdot y\cdot(1-z)+(1-x)\cdot 1\cdot z<1$$
і розглядати доданки її лівої частини як об'єми трьох прямокутних паралелепіпедів, поміщених у куб з ребром 1 так, щоб їх ребра з довжиною 1 були попарно перпендикулярними.

3.10. Нехай $a_n=n^n$, $b_n=\left(n+1\right)^{n-1}$. Очевидно, що $a_1\ge b_1$. Крім того,
$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n^n}{\left(n-1\right)^{n-1}}\ge\frac{\left(n+1\right)^{n-1}}{n^{n-2}}=\frac{b_n}{b_{n-1}},$$
бо $n^{2n-2}\ge\left(n+1\right)^{n-1}\left(n-1\right)^{n-1}\Leftrightarrow\left(n^2\right)^{n-1}\ge\left(n^2-1\right)^{n-1}$. Отже, задана нерівність справедлива для всіх натуральних n.

4.1. Оскільки $0<a<b+c,\ 0<b<c+a,\ 0<c<a+b,$ то $a^2<a(b+c),$ $b<b(a+c),\quad c^2<c(a+b).$ Залишається лише додати три останні нерівності. Проте з того, що довжини відрізків задовольняють вказану нерівність, ще не випливає, що з таких відрізків вдасться скласти трикутник. Наприклад, трикутника зі сторонами $a=b=1,\ c=3$ не існує.

4.2. Нехай точка B_1- симетрична до точки B відносно заданої прямої $l,$ а відрізок AB_1 перетинає пряму l у точці M. Тоді $AM+BM=AM+MB_1=AB_1.$ Для всякої іншої точки M_1 цієї прямої виконується нерівність $AM_1+M_1B=AM_1+M_1B_1>AB_1,$ тому точка $M-$ шукана.

4.3. а). Нехай A та $B-$ дві найближчі між собою ялинки. Зрозуміло, що зайці, які були під ними, помінялися місцями. Якщо до однієї з цих ялинок прибіг ще один заєць, то твердження задачі доведене. Якщо ні, то ялинки A та B можна вилучити з розгляду. Міркуючи далі аналогічно, прийдемо вкінці до трьох ялинок. Зрозуміло, що заєць, який був під третьою ялинкою, обов'язково прибіжить або до першої, або другої ялинки, відстань між якими є найкоротшою.

б). Припустимо, що під ялинку A прибігло не менше шести зайців. Виберемо такі дві ялинки B та $C,$ з під яких зайці прибігли до $A,$ щоб кут BAC був найменшим. Тоді такий кут не перевищує 60°. А враховуючи, що всі попарні відстані були різними, у трикутнику ABC знайдеться кут, більший за 60°. Але у такому разі сторона напроти цього кута буде більшою за сторону BC. Тому вздовж неї заєць пробігти до ялинки A не міг. Отримане протиріччя доводить, що більше п'яти зайців під однією ялинкою зібратися не могли.

4.4. Проведемо через точку M пряму $MN \parallel AK,\ (N\in BC,\ K\in BC).$ Оскільки $AM=MC,$ то $KN=NC.$ Нехай $P-$ точка перетину прямих AK та BM. Оскільки $BM=PM$, то $BK=KN$. Отже, AK ділить BC у відношенні $BK:KC=1:2.$

4.5. Побудуємо на стороні AD рівносторонній трикутник AKD з вершиною K всередині квадрата. Тоді $\angle KAB=\angle KDC=30^\circ$. А оскільки $AK=DK=AD=AB=CD$, то трикутники KAB та KDC рівнобедрені. Тому $\angle KBA=\angle KCD=75^\circ,\quad \angle KBC=\angle KCB=15^\circ$. Але також $\angle CBM=\angle BCM=15^\circ$. Отже, точка K лежить на прямих MB та MC, тому вона співпадає з точкою M. Звідси випливає, що кути трьох інших трикутників є такими:

(60°, 60°, 60°); (75°, 75°, 30°) та (75°, 75°, 30°).

4.6. а). Продовжимо відрізок AH до перетину з колом у точці K. Серединний перпендикуляр до HK перетинає коло в двох інших вершинах трикутника.

б). Нехай серединний перпендикуляр до AI перетинає коло у точках M та N. Тоді прямі MI та NI перетинають коло в двох інших вершинах трикутника. Можна було також продовжити відрізок AI до перетину з колом у точці K. Тоді коло з центром у точці K радіуса KI також перетне задане коло в двох інших вершинах трикутника.

4.7. Продовжимо сторони AB та CD трапеції до перетину у точці K. Тоді $S_{\Delta BKC} = kb^2$, $S_{\Delta MKN} = kx^2$, $S_{\Delta AKD} = ka^2$ при деякому k. Тому $kx^2 - kb^2 = ka^2 - kx^2$. Отже, $x = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$.

4.8. Якщо K – середина сторони AC, то медіана BK ділить площу трикутника ABC пополам. Якщо ж K не є серединою AC, то проведемо медіану BM. Тоді $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta CBM}$. Припустимо, що пряма KP ділить площу трикутника ABC пополам і перетинає медіану BM у точці D. Тоді повинна виконуватись рівність $S_{\Delta KDM} = S_{\Delta BDP}$, яка можлива лише за умови $MP \parallel KB$, що й дає нам спосіб для побудови прямої KP.

4.9. Нехай M – довільна внутрішня точка трикутника ABC зі стороною a; h_1, h_2, h_3 – відстані від точки M до сторін AB, BC та CA відповідно. Тоді

$$S_{\Delta ABM} + S_{\Delta BCM} + S_{\Delta CAM} = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_2 + \frac{1}{2}ah_3 = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah,$$

де h – висота трикутника ABC. Отже, $h_1 + h_2 + h_3 = h = const$.

4.10. Нехай точка E – симетрична до точки B відносно діаметра CD. Тоді $AM^2 + BM^2 = AM^2 + EM^2 = AE^2$, бо $\angle AME = 90°$. Незалежно від розташування точки M вписаний кут ABE дорівнює $45°$. Отже, довжина хорди AE, а з нею і сума $AM^2 + BM^2$, від розташування M не залежить.

4.11. Оскільки $\angle ABC = 60°$, то маємо $\angle BAC + \angle ACB = 120°$, $\angle OAC + \angle OCA = 60°$, $\angle AOC = 120°$. Отже, $\angle DBE + \angle DOE = 180°$, і навколо чотирикутника $BEOD$ можна описати коло. Але $\angle OBE = \angle OBD$, то й хорди OE та OD цього кола також рівні.

4.12. Продовжимо CK до перетину з описаним навколо ABC колом у точці D і скористаємося рівністю $AK \cdot BK = CK \cdot KD$ для відрізків хорд цього кола. З подібності трикутників KCB та ACD випливає, що $CK : AC = BC : CD,$ тобто $AC \cdot BC = CK \cdot CD.$ Віднімаючи тепер від цієї рівності отриману вище рівність, і враховуючи, що $CK = CD - KD,$ одержуємо справедливість твердження задачі.

4.13. Сторони такого трикутника є рівними хордами описаного кола, оскільки вони рівновіддалені від спільного центра на радіус вписаного кола.

4.14. Оскільки $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, то $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$. Отже, висоту цього дерева можна трактувати як радіус вписаного кола у трикутник зі сторонами $a+b$, $b+c$, $c+a$. Отже, $h = r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$. Тут площа S знайдена за формулою Герона.

4.15. Скориставшись теоремою Чеви, зауважимо, що рівність $\frac{m}{15-m} \cdot \frac{n}{15-n} \cdot \frac{k}{15-k} = 1$ задовольняють, наприклад, числа $m = n = 10,$ $k = 3.$ Для непарних простих чисел p натуральних чисел $m, n, k,$ менших за p, для яких справджується рівність $\frac{m}{p-m} \cdot \frac{n}{p-n} \cdot \frac{k}{p-k} = 1$, не існує. Тому у разі поділу сторін на 17 рівних частин точок перетину жодних трьох проведених відрізків всередині трикутника не виявиться.

Список рекомендованої літератури

1. Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И.. Сборник задач Киевских математических олимпиад. – К.: Вища школа., 1984. – 240 с.
2. Вишенський В.А., Карташов М.В., Михайловський В.І., Ядренко М.Й.. Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр. Збірник задач: Навчальний посібник. – К.: Либідь, 1993. – 144 с.
3. Вишенський В.А., Ганюшкін О.Г., Карташов М.В., Михайловський В.І., Призва Г.Й., Ядренко М.Й. Українські математичні олімпіади. Довідник. – К.: Вища школа., 1993. – 415 с.
4. Київські міські математичні олімпіади 2003–2011 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). — Харків: Гімназія, 2011. – 192 с.
5. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 1991–2000 рр. – Київ: Техніка, 2003. – 541 с.
6. Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. А. Математичні олімпіади школярів України: 2001–2006 рр. – Львів: Каменяр, 2008. – 348 с.
7. Математичні олімпіадні змагання школярів. 2006–2007. Анікушин А. В., Арман А. Р. та ін – К.: Літера, 2008. – 224 с.
8. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2006–2007. Анікушин А. В., Арман А. Р. та ін – К.: Літера, 2008. – 135 с.
9. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007–2008 та 2008–2009 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Львів: Каменяр, 2010. — 549 с.
10. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2009–2010 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2011. – 320 с.
11. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2010–2011 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2013. – 368 с.
12. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2011–2012 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2013. – 416 с.
13. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2012–2013 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2014. – 401 с.

14. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2013–2014 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2015. – 465 с.
15. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики. – Кам’янець-Подільський: Абетка, 2006. – 420 с.
16. Федак І.В. Івано-Франківські математичні олімпіади 1988 – 1997 рр. – Івано-Франківськ: Плай, 1997. – 56 с.
17. Федак І.В. Обласні олімпіади з математики 1987–2005рр. – Івано-Франківськ: ОІППО, 2005. – 164 с.
18. Федак І.В. Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2001–2010рр. – Івано-Франківськ: Голіней, 2010. – 84 с.
19. Федак І.В. Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2011–2015рр. – Івано-Франківськ: Голіней, 2015. – 64 с.
20. Федак І.В. Івано-Франківська обласна олімпіада з математики 2014-2015 навчального року. – У світі математики. – 2015. – Т.21, вип. 1 – С. 64 – 70.
21. Федак І.В. Розв’язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс. – Івано-Франківськ: Голіней, 2010. – 100 с.
22. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.

Електронні ресурси

1. http://www.matholymp.com.ua – сайт київських та всеукраїнських олімпіад та турнірів з математики.
2. http://www.mif.pu.if.ua – сайт факультету математики та інформатики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника».

* ***Готується до друку*** навчальний посібник:

Федак І.В. Математичні олімпіади: тридцять років разом. – Харків: Вид. гр. «Основа», 2016. – 256 с.

Посібник містить матеріали ІІІ етапу Всеукраїнських олімпіад 1987 – 2016 років в Івано-Франківській області.