Федак І.В.

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2017-2018 навчального року в Івано-Франківській області.

21 січня 2018 року на факультеті математики та інформатики Державного вищого навчального закладу «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» проходив III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики за завданнями достатнього рівня, запропонованими МОН України.

Із завданнями усіх трьох рівнів, їх авторами та авторськими вказівками до розв’язування задач читачі можуть ознайомитися на сайті математичних олімпіад у м. Києві за електронною адресою www.matholymp.com.ua.

Пропонуємо вашій увазі завдання та вказівки до розв’язування задач достатнього рівня. До умов окремих задач внесені стилістичні правки та наведені розв’язання, альтернативні до авторських.

Умови задач

7 клас

1. Андрій написав чотирицифрове число. Олеся викреслила у ньому останню цифру і виявилося, що різниця початкового і отриманого чисел дорівнює 2018. Яке число написав Андрій? Вкажіть усі можливі відповіді.

2. Відомо, що на книжкову полицю можна поставити 9 однакових товстих книг, але десята така книга вже не поміститься. Так само на неї можна поставити 15 однакових тонких книг, але на шістнадцяту тонку книгу місця не вистачить. Чи можливо, щоб на полиці помістилися одночасно:

а) 6 товстих та 5 тонких книг?

б) 7 товстих та 5 тонких книг?

3. У клубі присутні декілька джентльменів. Кожні двоє – або друзі, або вороги. Відомо, що у кожного з джентльменів рівно 4 вороги. Крім того, для кожного з них ворог його друга є його ворогом. Яка кількість джентльменів може бути присутня в клубі?

4. У чотирикутнику $ABCD$ точка E – середина сторони AB, точка F – середина сторони BC, точка G – середина AD. Виявилося, що відрізок GE перпендикулярний до AB, а відрізок GF – до відрізка BC. Знайдіть величину кута GCD, якщо $\angle ADC = 70^\circ$.

8 клас

1. Для натуральних чисел m та n порівняйте два числа: $A = m^{526} + n^{526}$ та $B = (m+n)(m^2+n^2)(m^4+n^4)(m^8+n^8)...(m^{128}+n^{128})$.

2. Вчитель писав на дошці цифри 123...9123...9123... доки не утворилося 2018-цифрове число. Після цього Андрій та Олеся грали у таку гру. По черзі (розпочинає Андрій) вони викреслювали по дві цифри таким чином: або дві перші цифри числа, що залишилося після попереднього ходу, або дві останні цифри, або першу та останню цифри того числа. Гра закінчується, коли залишилося двоцифрове число. Перемагає Олеся, якщо це число ділиться на 3, інакше перемагає Андрій. Хто переможе за правильної гри обох гравців?

3. У рівнобедреному трикутнику ABC з вершиною у точці B проведені висоти BH та CL. Точка D така, що $BDCH$ – прямокутник. Знайдіть величину кута DLH.

4. Відомо, що на книжкову полицю можна поставити 9 однакових товстих книг, але десята така книга вже не поміститься. Так само на неї можна поставити 15 однакових тонких книг, але на шістнадцяту тонку книгу місця не вистачить. Чи можливо, щоб на полиці помістилися одночасно 7 товстих та 5 тонких книг?

5. Про натуральне число A відомо, що воно має рівно 2018 натуральних дільників (включно з 1 та самим числом A) та ділиться націло на 2018. Доведіть, що число A не ділиться націло на 2018^2.

9 клас

1. Розв’яжіть у натуральних числах x, y, z систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^3 - 6y^2 + 27z = 132, \\ y^3 - 9z^2 + 3x = 125, \\ z^3 - 3x^2 + 12y = -68. \end{cases}$$

2. Вчитель писав на дошці цифри 123...8123...8123... доки не утворилося 2018-цифрове число. Після цього Андрій та Олеся грали у таку гру. По черзі (розпочинає Андрій) вони викреслювали по дві цифри таким чином – перші дві цифри числа, що залишилося після попереднього ходу, або останні дві цифри, або першу та останню цифри того числа. Гра закінчується, коли залишилося двоцифрове число. Перемагає Олеся, якщо це число ділиться на 4, інакше перемагає Андрій. Хто переможе за правильної гри обох гравців?

3. Доведіть для додатних чисел x, y, z нерівність

$$\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}\ge 1 .$$

4. Знайдіть усі пари натуральних чисел x, y, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} [x,y]+(x,y)=2018, \\ x+y=2018, \end{cases}$$

де через $[x,y]$ та (x,y) позначені НСК та НСД чисел x, y.

5. Задане коло Γ з центром у точці O та діаметром AB. $OBDE$ – квадрат, F – друга точка перетину прямої AD та кола Γ, C – середина відрізка AF. Знайдіть величину кута OCB.

10 клас

1. Розв'яжіть у цілих числах x, y систему рівнянь:

$$\begin{cases} x^4+4y^3+6x^2+4y=-137, \\ y^4+4x^3+6y^2+4x=472. \end{cases}$$

2. Для яких натуральних n квадрат $n\times n$ можна повністю покрити без накладання деякою кількістю прямокутників 4×1 та одним квадратиком 1×1?

3. Про натуральне число A відомо, що воно має рівно 2018 натуральних дільників (включно з 1 та самим числом A) та ділиться націло на 2018. Доведіть, що число A не ділиться націло на 2018^2.

4. Дано трикутник ABC. Серединний перпендикуляр до сторони AC перетинає бісектрису трикутника AK у точці P. M – така точка,

що $\angle MAC = \angle PCB$, $\angle MPA = \angle CPK$, і точки M та K лежать по різні боки від прямої AC. Доведіть, що пряма AK ділить відрізок BM навпіл.

5. Для натуральних чисел m та n порівняйте два числа: $A = m^{525} + n^{525}$ та $B = (m+n)(m^2+n^2)(m^4+n^4)(m^8+n^8)\ldots(m^{128}+n^{128})$.

11 клас

1. Чи існує таке значення $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, для якого числа $\sin x$, $\cos x$ та $\operatorname{tg} x$ утворюють геометричну прогресію?

2. Знайдіть усі пари натуральних чисел x, y, які задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases} [x, y] + (x, y) = 2018, \\ x + y = 2018, \end{cases}$$

де через $[x, y]$ та (x, y) позначені НСК та НСД чисел x, y.

3. Для яких натуральних n квадрат $n \times n$ можна повністю покрити без накладання деякою кількістю прямокутників $k \times 1$ та одним квадратиком 1×1, де: а) $k = 4$; б) $k = 8$?

4. У чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC є бісектрисою кута BAD та $\angle ADC = \angle ACB$. Точки X, Y – основи перпендикулярів, що проведені з точки A на прямі BC, CD відповідно. Доведіть, що ортоцентр трикутника AXY лежить на прямій BD.

5. Нехай x, y, z – додатні дійсні числа такі, що

$$x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \ .$$

Доведіть, що $xy + yz + zx \geq 3$.

Вказівки до розв’язування задач

7 клас

1. Нехай Андрій написав число $\overline{abcd}$. Тоді $\overline{abcd}-\overline{abc}=2018$, тобто $9\cdot\overline{abc}+d=9\cdot 224+2$. Оскільки a, b, c, d – цифри, то звідси отримуємо $\overline{abc}=224$, $d=2$. Таким чином, $\overline{abcd}=2242$.

2. Позначимо ширину полиці через l, товщину товстої книги через x, а тонкої – через y. З умов задачі отримуємо нерівності $9x\le l<10x$ та $15y\le l<16y$, або ж $\frac{l}{10}<x\le\frac{l}{9}$ та $\frac{l}{16}<y\le\frac{l}{15}$. Оскільки при цьому

$$6x+5y\le\frac{6l}{9}+\frac{5l}{15}=l\ ,\quad 7x+5y>\frac{7l}{10}+\frac{5l}{16}=\frac{81}{80}l\,,$$

то 6 товстих та 5 тонких книг помістити вдасться, а 7 товстих та 5 тонких книг – ні.

3. Нехай у клубі присутні n джентльменів. Оскільки у кожного з джентльменів рівно 4 вороги, то і друзів у них теж порівну – по $n-5$.

Позначимо конкретного джентльмена буквою A, а одного з його чотирьох ворогів – буквою B. В останнього, крім A, є ще рівно три вороги. Враховуючи, що кожен друг A є ворогом B, звідси отримуємо, що A може мати не більше трьох друзів.

Розглянемо кожен з можливих при цьому випадків окремо:

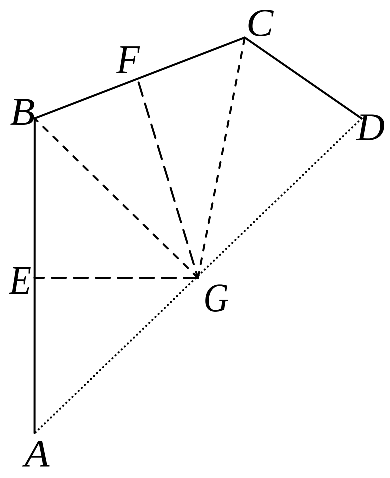
1). В A є 3 друзі. Тоді $n=8$. Розіб’ємо цих джентльменів на 2 групи по 4. Умову задачі задовольняє ситуація, коли у кожній групі джентльмени дружать між собою, а з різних груп – ворогують.

2). В A є 2 друзі. Тоді $n=7$. При цьому 4 вороги A є й ворогами його друзів. Між собою ці четверо повинні мати по 2 друзі та по одному ворогу. Це неможливо, бо обидва друзі котрогось з них мали би бути ворогами його ворога. Але у такому разі останній не мав би друзів взагалі.

3). В A є 1 друг. Тоді $n=6$. Умову задачі задовольняє ситуація, коли ці джентльмени розбиті на 3 пари друзів, а джентльмени з різних пар ворогують між собою.

4). В A немає друзів. Тоді $n=5$. Умову задачі задовольняє ситуація, коли всі джентльмени ворогують між собою.

Таким чином, у клубі могло бути 8, 6 або 5 джентльменів.



4. Оскільки (див. рисунок) відрізок GE є у трикутнику AGB і висотою, і медіаною, то цей трикутник є рівнобедреним, і $GB=GA$. Аналогічно рівнобедреним є трикутник CGB, і $GC=GB$. Крім того, за умовою $GD=GA$. Тому $GD=GC$, $\angle GCD=\angle ADC=70^\circ$.

Можна міркувати ще й так. G – перетин серединних перпендикулярів до двох сторін трикутника ABC. Тому G – центр описаного навколо нього кола. Отже, $GD=GA=GC$ та $\angle GCD=\angle ADC=70^\circ$.

8 клас

1. Розв'яжемо загальнішу задачу, покладаючи $A=m^k+n^k$, де $k\geq 263$. Якщо $m=n=1$, то $A=2<B=2^8$, а для $m=n\geq 2$ маємо нерівність $A=2n^k>B=2^8 n^{1+2+4+8+...+128}=2^8 n^{255}$.

Нехай тепер $m\neq n$, для конкретності будемо вважати, що $m>n$. Скориставшись формулами скороченого множення отримуємо:

$$B\leq B(m-n)=(m-n)(m+n)\left(m^2+n^2\right)\left(m^4+n^4\right)\left(m^8+n^8\right)...\left(m^{128}+n^{128}\right)=$$
$$=m^{256}-n^{256}<m^{263}+n^{263}\leq A=m^k+n^k,\ k\geq 263.$$

2. Оскільки $2018=2\cdot 1008+2$ і 1008 ділиться на 9, то посередині записаного вчителем числа знаходиться двоцифрове число 12, кратне 3. Саме воно залишиться вкінці, якщо Олеся гратиме так, щоб за кожну пару ходів (Андрій – Олеся) і зліва, і справа були викреслені по дві цифри. Дотримуючись такої стратегії, Олеся переможе.

3. Оскільки за умовою задачі $\angle BLC=90^\circ$, то точка L лежить на колі з діаметром BC. Це коло описане навколо прямокутника $BDCH$. Тому його діаметром є також DH. Отже, й $\angle DLH=90^\circ$.

Випадок з прямим кутом при вершині B тривіальний, оскільки при цьому точки L та B збігаються.

4. Ні. Див. розв'язання задачі 2 за 7 клас.

5. Нехай $A = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$ – канонічний розклад числа A на прості множники. З формули про кількість усіх натуральних дільників числа A можна записати, що $(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_n+1) = 2018$.

Оскільки $2018 = 2 \cdot 1009$ і 1009 – просте число, то можливі лише два випадки: 1) $n=1,\ k_1+1 = 2018$ та 2) $n=2,\ (k_1+1)(k_2+1) = 2 \cdot 1009$.

У першому з них отримуємо $A = p_1^{2017}$, що суперечить умові подільності на 2018.

А у другому випадку, не порушуючи загальності, можна вважати, що $k_1 = 1,\ k_2 = 1008$, тобто $A = p \cdot p_2^{1008}$. При цьому з умови подільності A на 2018 випливає, що або $A = 2 \cdot 1009^{1008}$, або $A = 1009 \cdot 2^{1008}$. Жодне з цих чисел не ділиться на 2018^2.

9 клас

1. Додамо ці три рівняння:

$$\left(x^3 - 6y^2 + 27z\right) + \left(y^3 - 9z^2 + 3x\right) + \left(z^3 - 3x^2 + 12y\right) = 189 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) + \left(y^3 - 6y^2 + 12y - 8\right) + \left(z^3 - 9z^2 + 27z - 27\right) = 153 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3 + (y-2)^3 + (z-3)^3 = 153.$$

Нескладно переконатися, що число 153 єдиним чином подається у вигляді суми кубів трьох натуральних чисел: $153 = 5^3 + 3^3 + 1^3$. Далі, зауваживши, що для цілих чисел $n^3 \equiv n \pmod 3$, з рівнянь системи послідовно отримуємо: $x \equiv 0 \pmod 3$, $y \equiv 2 \pmod 3$, $z \equiv 1 \pmod 3$. Таким чином, будемо мати: $x-1=5$, $y-2=3$, $z-3=1$, тобто $x=6$, $y=5$, $z=4$. Але $6^3 - 6 \cdot 5^2 + 27 \cdot 4 = 174 \neq 132$. Тому задана система рівнянь розв'язків у натуральних числах не має.

2. Оскільки $2018 = 2 \cdot 1008 + 2$ і 1008 ділиться на 8, то посередині записаного вчителем числа знаходиться двоцифрове число 12, кратне 4. Саме воно залишиться вкінці, якщо Олеся гратиме так, щоб за кожну пару ходів (Андрій – Олеся) і зліва, і справа були викреслені по дві цифри. Дотримуючись такої стратегії, Олеся переможе.

3. Задана нерівність випливає з очевидної нерівності

$$\frac{y}{2x+y}+\frac{z}{2y+z}+\frac{x}{2z+x}-1=$$

$$=\frac{2\left(xy^2+yz^2+zx^2-3xyz\right)}{(2x+y)(2y+z)(2z+x)}\ge\frac{2\left(3\sqrt[3]{xy^2yz^2zx^2}-3xyz\right)}{(2x+y)(2y+z)(2z+x)}=0$$

для додатних чисел $x,\ y,\ z$.

4. Позначимо $(x,y)=d$ і помножимо обидві частини першого рівняння системи на (x,y). Оскільки $[x,y]\cdot(x,y)=xy$, то задану систему рівнянь можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} xy=2018d-d^2, \\ x+y=2018. \end{cases}$$

Таким чином, числа $x,\ y$ є коренями квадратного рівняння

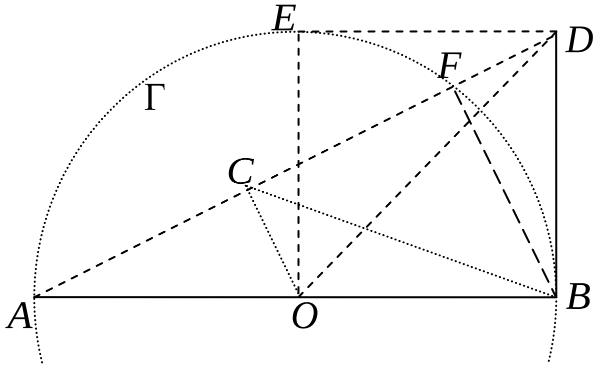
$$t^2-2018t+2018d-d^2=0.$$

Знайдемо ці корені: $t_1=d<2018,\ t_2=2018-d$. Оскільки один з них співпадає з (x,y), то другий корінь ділиться на нього. Отже, d – дільник числа 2018, тобто може дорівнювати 1, 2 або 1009.

Звідси отримуємо такі пари (x,y) розв'язків: $(1,2017)$, $(2,2016)$, $(1009,1009)$, $(2017,1)$, $(2016,2)$.

5. Оскільки AB – діаметр, то $\angle AFB=90^\circ$ (див. рисунок). Тоді $CO\,||\,FB$ як середня лінія. Отже, $OC\perp CD$ і чотирикутник $OBDC$ вписаний. Тому

$$\angle OCB=\angle ODB=45^\circ.$$



10 клас

1. З першого рівняння системи видно, що x – непарне, а y – від'ємне. Додамо ці рівняння:

$$\left(x^4+4y^3+6x^2+4y\right)+\left(y^4+4x^3+6y^2+4x\right)=335\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x+1)^4+(y+1)^4=337.$$

Нескладно побачити, що число 337 єдиним чином подається у вигляді суми четвертих степенів двох натуральних чисел: $337 = 4^4 + 3^4$. Тому, враховуючи сказане вище, $x+1 = \pm 4$, $y+1 = -3$.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що лише пара $x = 3$, $y = -4$ задовольняє задану систему.

2. Зрозуміло, що n має бути непарним. Якщо $n = 1$, то буде використаний лише квадратик 1×1, а для $n = 3$ покриття неможливе.

Для $n = 5$ достатньо буде поставити квадратик 1×1 у куті квадрата 5×5, а потім покрити фігурками 4×1 два прилеглі до нього прямокутники 4×1 та квадрат 4×4.

Для $n = 7$ достатньо буде поставити квадратик 1×1 у центрі квадрата 7×7, а потім покрити фігурками 4×1 чотири межуючі з ним прямокутники 4×3.

Нехай тепер $n = 4m+5, m\in\mathbb{N}$. Виділимо у куті квадрата $n\times n$ квадрат 5×5 і покриємо його як описано вище. Ще два прилягаючі до нього прямокутники $5\times 4m$ та квадрат $4m\times 4m$ можна покрити фігурками 4×1.

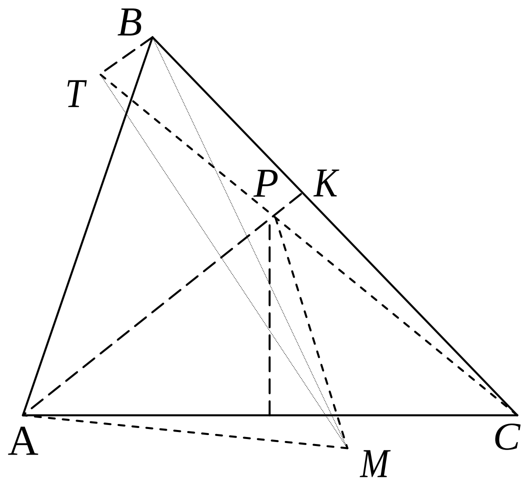
Аналогічно для $n = 4m+7, m\in\mathbb{N}$, покриваємо у куті квадрата $n\times n$ квадрат 7×7. Ще два прилягаючі до нього прямокутники $7\times 4m$ та квадрат $4m\times 4m$ вдасться покрити фігурками 4×1.

Таким чином, всі непарні $n \geq 5$ задовольняють умову задачі.

3. Див. розв’язання задачі 5 за 8 клас.

4. Нехай T – точка, симетрична до точки M відносно AK (див. рисунок). Тоді пряма AK ділить відрізок TM навпіл, і досить довести, що $BT \parallel AK$.

З рівності $\angle TPA = \angle MPA = \angle CPK$ випливає, що точки T, P, C лежать на одній прямій. Отже, отримуємо $\angle TAB = \angle MAC = \angle TCB$, звідки маємо, що чотирикутник $BCAT$ вписаний.



Тоді $\angle TBA = \angle TCA = \angle PAC = \angle PAB$, тобто $BT \parallel AK$.

5. Див. розв’язання задачі 1 за 8 клас для $k = 525$.

11 клас

1. Існує. Достатньо довести, що на цьому проміжку рівняння $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \cos^2 x$ має принаймні один дійсний корінь. Справді, на ньому функція $f(x) = \sin x \cdot \operatorname{tg} x - \cos^2 x$ неперервна і $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} > 0$.

2. Див. розв'язання задачі 4 за 9 клас.

3. а). Див. розв'язання задачі 2 за 10 клас;

б). Міркуючи аналогічно, встановимо, що n має бути непарним. Якщо $n = 1$, то буде використаний лише квадратик 1×1, а для $n = 3$, $n = 5$ та $n = 7$ покриття, очевидно, неможливі.

Для $n = 9$ достатньо буде поставити квадратик 1×1 у куті квадрата 9×9, а потім покрити фігурками 8×1 два прилеглі до нього прямокутники 8×1 та квадрат 8×8.

Для $n = 15$ достатньо буде поставити квадратик 1×1 у центрі квадрата 15×15, а потім покрити фігурками 8×1 чотири межуючі з ним прямокутники 8×7.

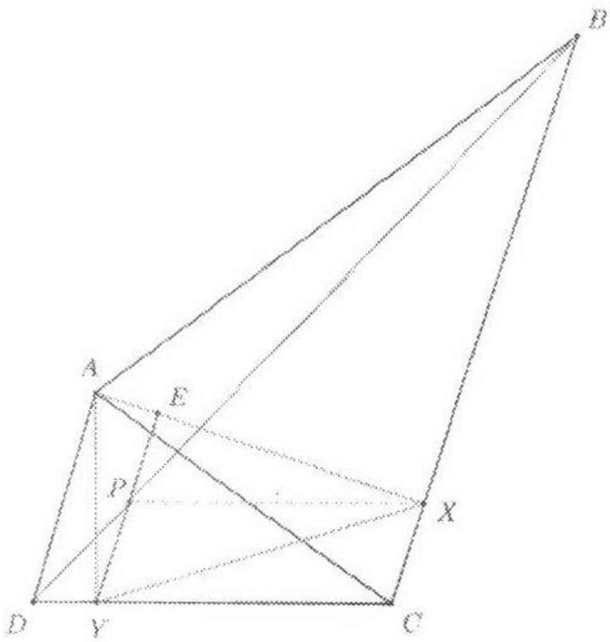
Нехай тепер $n = 8m + 9, m \in \mathbb{N}$. Виділимо у куті квадрата $n\times n$ квадрат 9×9 і покриємо його як описано вище. Ще два прилягаючі до нього прямокутники $9\times8m$ та квадрат $8m\times8m$ можна покрити фігурками 8×1.

Аналогічно для $n = 8m + 15, m \in \mathbb{N}$, покриваємо у куті квадрата $n\times n$ квадрат 15×15. Ще два прилягаючі до нього прямокутники $15\times8m$ та квадрат $8m\times8m$ вдасться покрити фігурками 8×1.

Залишається довести, що для $n = 8m + 3, m \in \mathbb{N}$, та для $n = 8m + 5, m \in \mathbb{N}$, вказане покриття здійснити не вдасться. Для цього, починаючи з лівого нижнього кута, будемо розфарбовувати у шаховому порядку квадрат $n\times n$ квадратиками 4×4. До правого та верхнього країв цього квадрата замість квадратиків прилягатимуть деякі прямокутники менших розмірів, ніж 4×4. При цьому у кожному з випадків одиничних квадратиків якогось одного кольору виявиться на 9 більше, ніж таких квадратиків іншого кольору.

Але кожен поставлений прямокутник 8×1 покриває по 4 клітинки кожного з кольорів, тому для можливості покриття така різниця мала би дорівнювати 1.

4. Нехай E – основа перпендикуляра, проведеного з точки Y на AX, $YE \cap BD = P$ (див. рисунок). Тепер достатньо довести, що $XP \perp AY$, а це рівносильне доведенню, що $XP \parallel CD$. Оскільки $YE \parallel CB$, то $\frac{DY}{YC} = \frac{DP}{PB}$. З іншого боку, оскільки $\Delta ADC \sim \Delta ACB$, то основи їх відповідних висот, ділять протилежні сторони на пропорційні відрізки: $\frac{DY}{YC} = \frac{CX}{XB}$. З одержаних рівностей маємо, що $\frac{DP}{PB} = \frac{CX}{XB} \Rightarrow XP \parallel CD$, що й треба було довести.



5. Справді, внаслідок заданої рівності маємо

$$xy + yz + zx = xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{xyz\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}{x + y + z} =$$

$$= \frac{xyz\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) + 2\left(x + y + z\right)}{x + y + z} \geq \frac{xyz\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right)}{x + y + z} + 2 = 3.$$

.