Друга відкрита Івано-Франківська обласна олімпіада з математики для учнів 5 – 8 класів

Федак І. В., Базів Н. М., Партика Н. В., Радул А. М., Рендзяк Д. В., Савчин М. В., Самілів І.-А. В., Тугай О.О., Чоп'юк Ю. Ю.

(*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*)

23 березня 2019 року на базі факультету математики та інформатики ДВНЗ «Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника» відбулася II відкрита Івано-Франківська обласна олімпіада з математики для учнів 5-8 класів.

Наводимо умови та розв'язання задач олімпіади.

5 клас

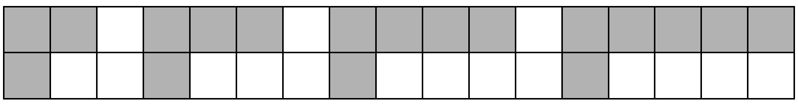
1. На паперовій стрічці записане число 121212…121, в якому 2019 цифр, і цифри 1, 2 чергуються. Чи можна цю стрічку розрізати на 50 частин так, щоб серед чисел, записаних на отриманих при цьому частинах, не виявилося двох однакових? Відповідь обґрунтуйте.

2. Скільки існує різних п'ятицифрових чисел вигляду $\overline{x0y0z}$, які діляться на 5, якщо цифри x, y, z не є обов'язково різними? Відповідь обґрунтуйте.

3. Незнайко хоче розрізати квадрат 5×5 на 5 менших квадратів або прямокутників, сума периметрів яких дорівнювала би 50, але не знає, як це зробити. Допоможіть йому або доведіть, що такого розрізання не існує.

4. У виразі 1*2*3*4*5 замініть зірочки знаками арифметичних дій так, щоб отримати 25. Вкажіть принаймні три способи, як цього добитися. За потреби можна використовувати дужки.

5. Миколка вирізав з паперу зафарбовані нижче фігурки і хоче викласти з них прямокутник. Допоможіть йому в цьому, якщо вирізані фігурки можна довільним чином повертати чи перевертати, але не можна згинати чи накладати одна на одну. Або ж доведіть, що його задум здійснити не вдасться.



6. У зображених нижче таблицях перша з них заповнена натуральними числами за певною закономірністю. Опишіть цю закономірність і, використовуючи її, заповніть другу таблицю, в якій два числа уже записані. Яку особливість можна помітити, порівнюючи рядки двох таких таблиць?

1	2	5	12	29
1	3	7	17	41

1				
2				

6 клас

1. На паперовій стрічці записане число 121212…121, в якому 2019 цифр, і цифри 1, 2 чергуються. Чи можна цю стрічку розрізати на 60 частин так, щоб серед чисел, записаних на отриманих при цьому частинах, не виявилося двох однакових? Відповідь обґрунтуйте.

2. Скільки існує різних п'ятицифрових чисел вигляду $\overline{x0y0z}$, які діляться на 6, якщо цифри x, y, z не є обов'язково різними? Відповідь обґрунтуйте.

3. Незнайко хоче розрізати квадрат 6×6 на 6 менших квадратів або прямокутників, сума периметрів яких дорівнювала би 60, але не знає, як це зробити. Допоможіть йому або доведіть, що такого розрізання не існує.

4. У виразі $1*2*3*4*5*6$ зірочки замінили знаками додавання або віднімання. Які додатні значення виразу могли при цьому отримати? Наведіть відповідні приклади і обґрунтуйте, що інших додатних значень отримати не вдасться.

5. Миколка вирізав з паперу зафарбовані нижче фігурки і хоче викласти з них прямокутник. Допоможіть йому в цьому, якщо вирізані фігурки можна довільним чином повертати чи перевертати, але не можна згинати чи накладати одна на одну. Або ж доведіть, що його задум здійснити не вдасться.

6. У зображених нижче таблицях перша з них заповнена натуральними числами за певною закономірністю. Опишіть цю закономірність і, використовуючи її, заповніть другу таблицю, в якій два числа уже записані. Яку особливість можна помітити, порівнюючи рядки двох таких таблиць?

1	2	5	12	29
1	3	7	17	41

				41
				58

7 клас

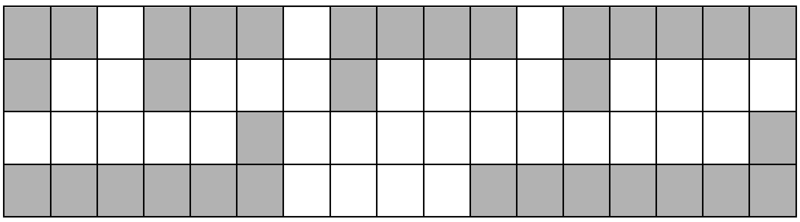
1. На паперовій стрічці записане число 121212…121, в якому 2019 цифр, і цифри 1, 2 чергуються. Чи можна цю стрічку розрізати на 70 частин так, щоб серед чисел, записаних на отриманих при цьому частинах, не виявилося двох однакових? Відповідь обґрунтуйте.

2. Скільки існує різних семицифрових чисел вигляду $\overline{x00y00z}$, які діляться на 9, якщо цифри x, y, z не є обов'язково різними? Відповідь обґрунтуйте.

3. Незнайко вибрав на сторонах AB, BC, CA рівностороннього трикутника ABC точки M, N, K відповідно такі, що $AM:MB=BN:NC=CK:KA=7$. Він виміряв транспортиром кути трикутника MNK і стверджує, що їхні величини дорівнюють 59^{O}, 60^{O} та 61^{O}. Якими ж насправді могли бути величини цих кутів? Вкажіть усі можливі варіанти. Відповідь обґрунтуйте.

4. Цілі числа x та y задовольняють умову $xy=x+y+1$. Знайдіть усі пари таких чисел і обґрунтуйте, що інших таких пар немає.

5. Миколка вирізав з паперу зафарбовані нижче фігурки і хоче викласти з них прямокутник. Допоможіть йому в цьому, якщо вирізані фігурки можна довільним чином повертати чи перевертати, але не можна згинати чи накладати одна на одну. Або ж доведіть, що його задум здійснити не вдасться.



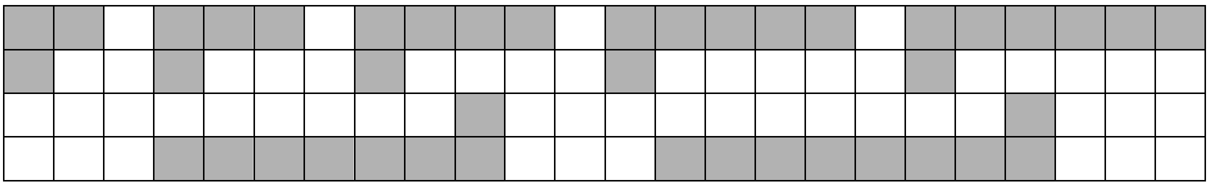
6. У зображених нижче таблицях перша з них заповнена натуральними числами за певною закономірністю. Опишіть цю закономірність і, використовуючи її, заповніть другу таблицю, в якій два числа уже записані. Яку особливість можна помітити, порівнюючи рядки двох таких таблиць?

1	3	10	34	116
1	4	14	48	164

1				
2				

8 клас

1. На паперовій стрічці записане число 121212…121, в якому 2019 цифр, і цифри 1, 2 чергуються. Чи можна цю стрічку розрізати на 80 частин так, щоб серед чисел, записаних на отриманих при цьому частинах, не виявилося двох однакових? Відповідь обґрунтуйте.
2. Скільки існує різних семицифрових чисел вигляду $\overline{x00y00z}$, які діляться на 27, якщо цифри x, y, z не є обов'язково різними? Відповідь обґрунтуйте.
3. З вершини A гострого кута паралелограма $ABCD$ проведені висоти AE та AH. Незнайко виміряв транспортиром кут між ними і стверджує, що його величина становить 88°. Чи можуть слова Незнайки бути правдою? Якщо так, то знайдіть величину гострого кута такого паралелограма.
4. Дійсні числа x та y задовольняють умову $x^3 + y^3 = 2019$. Чи можуть вони обидва одночасно бути цілими? Якщо так, то знайдіть усі пари таких чисел.
5. Миколка вирізав з паперу зафарбовані нижче фігурки і хоче викласти з них прямокутник. Допоможіть йому в цьому, якщо вирізані фігурки можна довільним чином повертати чи перевертати, але не можна згинати чи накладати одна на одну. Або ж доведіть, що його задум здійснити не вдасться.



6. У зображених нижче таблицях перша з них заповнена натуральними числами за певною закономірністю. Опишіть цю закономірність і, використовуючи її, заповніть другу таблицю, в якій два числа уже записані. Яку особливість можна помітити, порівнюючи рядки двох таких таблиць?

1	3	10	34	116
1	4	14	48	164

				164
				232

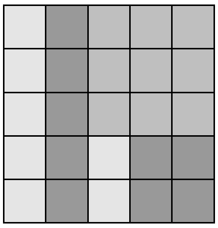
Розв'язання задач

5.1. Можна. Будемо відрізувати послідовно частини зліва направо так, щоб на перших сорока дев'яти з них була різна кількість цифр – від однієї до сорока дев'яти відповідно. Разом на цих частинах буде відрізано $1+2+3+...+49=1225$ цифр початкового числа, а число, яке залишиться на останній, 50-тій, частині буде 794-цифровим. Зрозуміло, що при цьому двох частин з однаковими записаними на них числами не виявиться.

5.2. Щоб таке число ділилося на 5, його остання цифра z має бути або 0, або 5. Для кожного з цих випадків цифра x може набувати 9 різних значень від 1 до 9, а цифра y – 10 різних значень від 0 до 9. Тому всього отримаємо $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ шуканих чисел.

Можна було міркувати ще й так. Такі ж умови задовольняють і трицифрові числа вигляду $\overline{xyz}$, які діляться на 5. Найбільшим з них є число 995. Віднімемо від нього 95 – найбільше двоцифрове число, яке ділиться на 5. Враховуючи, що кратним 5 є кожне п’яте натуральне число, отримаємо, що кількість шуканих чисел дорівнює $(995-95):5=180$.

5.3. Приклад потрібного розрізання наведено на малюнку справа. При розв’язуванні задачі врахуйте, що кожен проведений всередині квадрата 5×5 відрізок шуканого розбиття збільшує суму периметрів на його подвоєну довжину.



5.4. Наприклад: $1\times2+3+4\times5=25$; $(1\times2+3)\times4+5=25$; $((1+2)\times3-4)\times5=25$.

5.5. Оскільки сума площ вирізаних фігурок дорівнює 18, то з них можна пробувати викладати лише прямокутники розмірами 1×18, 2×9 чи 3×6. Перші два з них викласти не вдасться. Приклад викладання третього прямокутника наведений на малюнку:

5.6. Розглянемо фрагмент такої таблиці з двох сусідніх стовпчиків:

x	z
y	t

Аналізуючи першу з таблиць, можна побачити таку закономірність в утворенні наступного стовпчика таблиці з попереднього: $z = x + y$, $t = x + z = 2x + y$.

Тому друга таблиця матиме вигляд як на малюнку справа.

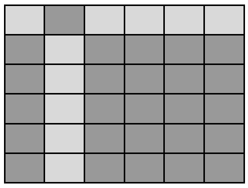
1	3	7	17	41
2	4	10	24	58

Перший її рядок співпадає з другим рядком першої таблиці, а елементи другого рядка вдвічі більші відповідних елементів першого рядка першої таблиці.

6.1. Можна. Будемо відрізувати послідовно частини зліва направо так, щоб на перших п’ятдесяти дев’яти із них була різна кількість цифр – від однієї до п’ятдесяти дев’яти відповідно. Разом на цих частинах буде відрізано $1+2+3+...+59=1770$ цифр початкового числа, а число, яке залишиться на останній, 60-тій, частині буде 249-цифровим. Зрозуміло, що при цьому двох частин з однаковими записаними на них числами не виявиться.

6.2. Щоб таке число ділилося на 6, сума його цифр повинна ділитися на 3, причому цифра x не може дорівнювати 0, а цифра z повинна бути парною. Такі ж умови задовольняють і трицифрові числа вигляду $\overline{xyz}$, які діляться на 6. Найбільшим з них є число 996. Віднімемо від нього 96 – найбільше двоцифрове число, яке ділиться на 6. Враховуючи, що кратним 6 є кожне шосте натуральне число, отримаємо, що кількість шуканих чисел дорівнює $(996-96):6=150$.

6.3. Приклад потрібного розрізання наведено на малюнку справа. При розв'язуванні задачі врахуйте, що кожен проведений всередині квадрата 6×6 відрізок шуканого розбиття збільшує суму периметрів на його подвоєну довжину.



6.4. Оскільки у заданому виразі є три непарні числа, то при довільній розстановці знаків додавання та віднімання значення такого виразу будуть непарними. Найбільше з них отримаємо так: $1+2+3+4+5+6=21$. Значення 19 отримати не вдасться, бо для цього потрібен був би знак «–» перед 1. Всі можливі способи отримання інших непарних додатних значень, менших за 19, наведено нижче:

$$1-2+3+4+5+6=17,\qquad 1+2-3+4+5+6=15,\qquad 1+2+3-4+5+6=13,$$
$$1+2+3+4-5+6=1-2-3+4+5+6=11,\qquad 1+2+3+4+5-6=1-2+3-4+5+6=9,$$
$$1-2+3+4-5+6=1+2-3-4+5+6=7,\qquad 1+2-3+4-5+6=1-2+3+4+5-6=5,$$
$$1+2+3-4-5+6=1+2-3+4+5-6=1-2-3-4+5+6=3,$$
$$1+2+3-4+5-6=1-2-3+4-5+6=1.$$

Врахуйте, що для зменшення максимальної можливої суми 21 на $2n$ знаки «–» треба поставити перед числами, сума яких дорівнює n.

6.5. Сума площ вирізаних фігурок дорівнює 25, тому з них можна пробувати викладати лише прямокутник розміром 1×25 або квадрат 5×5. Обидва з них викласти не вдасться, бо у жоден з них не поміститься найбільша з вирізаних фігурок.

6.6. Див. розв'язання задачі 5.6. Додатково врахуйте, що при цьому $x=t-z$, $y=z-x$.

7.1. Можна. Спочатку послідовно зліва направо відріжемо 16 частин з числами 1, 21, 2, 12, 121, 2121, 212, 1212, 12121, 212121, 21212, 121212, 1212121, 21212121, 2121212, 12121212. Разом на них буде відрізано 72 цифри початкового числа. Наступні 53 частини будемо відрізати так, щоб числа на них мали різну кількість цифр – від 9 до 61. Разом на них буде відрізано $9+10+11+...+61=1855$ цифр, а число, яке залишиться після цього на останній 70-тій частині буде 92-цифровим. Зрозуміло, що при цьому двох частин з однаковими записаними на них числами не виявиться.

7.2. Вказане число ділиться на 9, якщо сума його цифр ділиться на 9, причому його перша цифра x не дорівнює 0. Такі ж умови задовольняють і трицифрові числа вигляду $\overline{xyz}$, які діляться на 9. Найбільшим з них є число 999. Віднімемо від нього 99 – найбільше двоцифрове число, яке ділиться на 9. Враховуючи, що кратним 9 є кожне дев'яте натуральне число, отримаємо, що кількість шуканих чисел дорівнює $(999-99):9=100$.

7.3. Оскільки вибраними Незнайком точками M, N, K сторони рівностороннього трикутника ABC діляться в однакових відношеннях, то трикутники AMK, BNM, CKN рівні між собою за двома сторонами і кутом 60^{O} між ними. Тому їхні відповідні сторони MK, NM та KN також рівні. Отже, трикутник MNK теж є рівностороннім, і всі його кути дорівнюють 60^{O}.

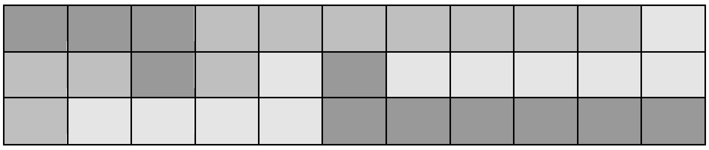
7.4. Запишемо задану рівність у вигляді $(x-1)(y-1)=2$. Оскільки x та y є цілими числами, то це можливе лише у таких чотирьох випадках:

1) $x-1=1,\ y-1=2$; 2) $x-1=2,\ y-1=1$; 3) $x-1=-1,\ y-1=-2$; 4) $x-1=-2,\ y-1=-1$.

Звідси отримуємо такі чотири пари цілих чисел x та y:

$$1)\ x=2,\ y=3;\ 2)\ x=3,\ y=2;\ 3)\ x=0,\ y=-1;\ 4)\ x=-1,\ y=0.$$

7.5. Оскільки сума площ вирізаних фігурок дорівнює 33, то з них можна пробувати викладати лише прямокутники розмірами 1×33 або 3×11. Перший з них викласти не вдасться. Приклад викладання другого з прямокутників наведено на малюнку:



7.6. Розглянемо фрагмент такої таблиці з двох сусідніх стовпчиків:

x	z
y	t

Аналізуючи першу з таблиць, можна побачити таку закономірність в утворенні наступного стовпчика таблиці з попереднього: $z=2x+y$, $t=y+z=2(x+y)$.

Тому друга таблиця матиме вигляд як на малюнку справа.

1	4	14	48	164
2	6	20	68	232

Перший її рядок співпадає з другим рядком першої таблиці, а елементи другого рядка вдвічі більші відповідних елементів першого рядка першої таблиці.

8.1. Можна. Доведемо навіть більше – таку стрічку вдасться розрізати й на 88 частин з різними написаними на них числами. Для цього спочатку відріжемо зліва стрічки частини з числами 1 та 2, а далі будемо відрізувати послідовно зліва направо частини четвірками з числами 12, 121, 21, 212; 1212, 12121, 2121, 21212; … поки не отримаємо четвірку частин, яка складається з двох 42-цифрових та двох 43-цифрових чисел: 121…12, 121…21, 212…21, 212…12. При цьому разом на перших 86 утворених у такий спосіб частинах буде відрізано $2(1+2+3+4+...+43)=1892$ цифр початкового числа, а число, яке залишиться, буде 127-цифровим. Залишається лише розрізати цю частину стрічки на дві частини з кількістю цифр, не меншою за 44 у кожній.

Зрозуміло, що для отримання 80 потрібних частин достатньо буде відмовитися від останніх восьми розрізань.

Отримати більше 88 частин з такими властивостями не вдасться.

8.2. Скористаємося рівністю

$$\overline{x00y00z}=999999x+999y+(x+y+z)=27\cdot(37037x+37y)+(x+y+z),$$

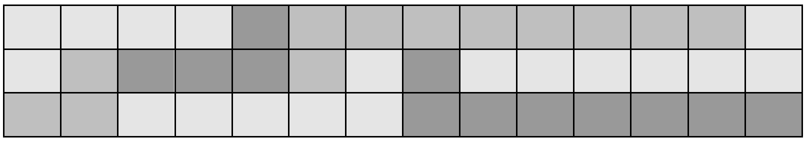
з якої випливає, що вказане число ділиться на 27 лише за умови, що сума його цифр ділиться на 27, причому цифра x не дорівнює 0. Це можливо лише в єдиному випадку, якщо $x=y=z=9$. Тому єдиним семицифровим числом вказаного вигляду, яке ділиться на 27, є число 9009009.

8.3. Не можуть. Розглянемо чотирикутник $AECH$. У ньому кути при вершинах E та H є прямими. Тому сума кутів при двох інших вершинах дорівнює 180^{O}. Але при цьому кут ECH є гострим. Отже, кут EAH між проведеними висотами повинен бути тупим, і він не може дорівнювати 88^{O}.

8.4. Таких пар цілих чисел x та y не існує. Справді, при діленні на 9 куби цілих чисел можуть давати лише остачі 0, 1 або 8 (якщо самі числа при діленні на 3 дають остачі 0, 1 або 2 відповідно). Тому для цілих x та y ліва частина заданої рівності при діленні на

9 може давати лише остачі 0, 1, 2, 7 або 8. Але остача при діленні на 9 числа 2019 дорівнює 3. Зауважимо також, що для розв’язування можна було скористатися й тим, що при діленні на 7 куби цілих чисел можуть давати лише остачі 0, 1 або 6.

8.5. Оскільки сума площ вирізаних фігурок дорівнює 42, то з них можна пробувати викладати лише прямокутники розмірами 1×42, 2×21, 3×14 або 6×7. Перші два та останній з них викласти не вдасться. Приклад викладання третього з таких прямокутників наведено на малюнку:



8.6. Див. розв’язання задачі 7.6. Додатково врахуйте, що при цьому $y=t-z$, $x=\frac{z-y}{2}=z-\frac{t}{2}$.

При перевірці робіт використовувалися наступні ***критерії оцінювання:***

5 – повне розв’язання задачі;

4 – задача в основному розв’язана, але розв’язання не є повним;

3 – задача розв’язана наполовину;

2 – наявні суттєві просування в розв’язуванні задачі;

1 – наявні незначні просування в розв’язуванні задачі;

0 – задача не розв’язувалася взагалі, або наведене розв’язання виявилося повністю неправильним.