Федак І.В.
Розв'язання задач XV Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка

1. *Рівняння з цілими частинами.*

Для кожного значення параметра $a\in[0,2]$ *розв'яжіть рівняння* $[a\sin x]=[a\cos x]$, *де* $[u]$ *– ціла частина числа* u, *тобто найбільше ціле число, яке не перевищує* u.

1.1. $a=0$.

$$[a\sin x]=[a\cos x]\Leftrightarrow[0]=[0]\Rightarrow x\in R.$$

1.2. $0<a<1$.

$$[a\sin x]=[a\cos x]=-1\Rightarrow x\in\left(-\pi+2\pi n,-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

$$[a\sin x]=[a\cos x]=0\Rightarrow x\in\left[2\pi n,\frac{\pi}{2}+2\pi n\right],\ n\in Z.$$

1.3. $a=1$.

$$[a\sin x]=[a\cos x]=-1\Rightarrow x\in\left(-\pi+2\pi n,-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

$$[a\sin x]=[a\cos x]=0\Rightarrow x\in\left(2\pi n,\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

1.4. $1<a<\sqrt{2}$.

$$[a\sin x]=[a\cos x]=-1\Rightarrow x\in\left[-\pi+\arccos\frac{1}{a}+2\pi n,-\pi+\arcsin\frac{1}{a}+2\pi n\right],\ n\in Z.$$

$$[a\sin x]=[a\cos x]=0\Rightarrow x\in\left(\arccos\frac{1}{a}+2\pi n,\arcsin\frac{1}{a}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

1.5. $a=\sqrt{2}$.

$$[a\sin x]=[a\cos x]=-1\Rightarrow x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

$$[a\sin x]=[a\cos x]=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

1.6. $\sqrt{2}<a\le 2$.

$$[a\sin x]=[a\cos x]=-2\Rightarrow x\in\left(-\pi+\arcsin\frac{1}{a}+2\pi n,-\pi+\arccos\frac{1}{a}+2\pi n\right),\ n\in Z.$$

$$[a\sin x]=[a\cos x]=1\Rightarrow x\in\left[\arcsin\frac{1}{a}+2\pi n,\arccos\frac{1}{a}+2\pi n\right],\ n\in Z.$$

Інших цілих значень ліва і права частини рівняння одночасно набувати не можуть.

2. *Відновіть трикутник.*

На дошці зобразили такий трикутник ABC, *що* $AB+AC=2BC$. *У цьому трикутнику провели бісектриси* AL_1, BL_2, CL_3, *після чого все витерли, крім точок* L_1, L_2, L_3. *За допомогою циркуля та лінійки відновіть трикутник* ABC.

Нехай I – точка перетину бісектрис цього трикутника. За властивістю бісектрис маємо рівність $\dfrac{AB}{BL_1}=\dfrac{AC}{CL_1}=\dfrac{AI}{IL_1}=k$. Враховуючи умову задачі, звідси отримуємо

$$2BC=AB+AC=k\left(BL_1+CL_1\right)=kBC\Rightarrow k=2.$$

Оскільки (див. Кушнір І.А. Трикутник у задачах. – К.: Либідь, 1994. – С. 65)

$$tg\angle L_2L_1L_3 = \frac{2(\sin\angle B + \sin\angle C)}{1+2\cos\angle A}.$$

З умови $AB + AC = 2BC$ випливає, що BC є середньою за довжиною стороною трикутника ABC, тому $\angle A$ гострий, $\cos\angle A > 0$, отже, кут $\varphi = \angle L_2L_1L_3$ також є гострим. Далі, враховуючи умову задачі та теорему синусів, отримуємо

$$tg\varphi = tg\angle L_2L_1L_3 = \frac{2\left(\frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC}\right)\sin\angle A}{1+2\cos\angle A} = \frac{4\sin\angle A}{1+2\cos\angle A} = \frac{8\sin\frac{\angle A}{2}\cos\frac{\angle A}{2}}{3\cos^2\frac{\angle A}{2} - \sin^2\frac{\angle A}{2}},$$

звідки знаходимо

$$tg\frac{\angle A}{2} = \frac{\sqrt{16+3tg^2\varphi}-4}{tg\varphi}.$$

Далі, вибираючи довільний відрізок, який вважаємо одиничним, з врахуванням властивостей прямокутних та подібних трикутників за відомим гострим кутом φ послідовно будуємо

$$tg\varphi,\ tg^2\varphi,\ 3tg^2\varphi,\ 16+3tg^2\varphi,\ \sqrt{16+3tg^2\varphi},\ \sqrt{16+3tg^2\varphi}-4,\ \frac{\sqrt{16+3tg^2\varphi}-4}{tg\varphi}.$$

Маючи $tg\frac{\angle A}{2}$, побудуємо рівнобедрений трикутник L_2VL_3, з основою L_2L_3, у якому $tg\frac{\angle V}{2} = tg\frac{\angle A}{2}$, так, щоб вершина V і точка L_1 лежали по різні сторони від прямої L_2L_3. Опишемо коло навколо побудованого трикутника. На його дузі L_2L_3, яка містить точку V, лежатиме вершина A трикутника ABC. Якщо точка M, яка є серединою іншої дуги L_2L_3 цього кола, не співпадає з точкою L_1, то вершину A отримуємо на перетині побудованого кола і прямої ML_1. Поділивши відрізок AL_1 у відношенні 2:1, знайдемо точку I перетину бісектрис трикутника ABC. Тоді на перетині прямих AL_3 та IL_2 отримаємо вершину B, а на перетині прямих AL_2 та IL_3 отримаємо вершину C шуканого трикутника. Якщо ж точка M співпадає з точкою L_1, то трикутник $L_2L_1L_3$ (а з ним і трикутник ABC) є рівнобедреним. При цьому вершина A співпаде з точкою V.

3. *Гра у кульки.*

На столі лежать дві купки кульок, у першій з яких m кульок, у другій – n. За один хід можна з однієї з купок прибрати одну, дві або три кульки. Іванко та Марійка роблять ходи по черзі, Марійка ходить першою. Виграє той, хто робить останній хід (тобто після ходу якого на столі взагалі не залишається кульок). Хто з гравців може забезпечити собі перемогу у цій грі (у залежності від m та n)? Опишіть виграшну стратегію.

Якщо остачі від ділення чисел m та n на 4 різні, то Марійка може забезпечити собі перемогу. Для цього їй достатньо кожен раз забирати з тієї купки, де остача від ділення кількості кульок на 4 більша (на 1, 2 чи 3), таку кількість кульок, щоб вказані остачі в обох купках вирівнялись. Якщо ж спочатку такі остачі були однаковими, то переможе Іванко, дотримуючись описаної вище стратегії.

4. *Розклад на множники.*

Доведіть, що число $\underbrace{44...4}_{2012}\underbrace{88...8}_{2010}53$ є складеним. Подайте це число у вигляді добутку двох натуральних чисел так, щоб модуль різниці отриманих множників був найменшим можливим.

$$\underbrace{44...4}_{2012}\underbrace{88...8}_{2010}53 = \underbrace{44...4}_{2012}\underbrace{88...8}_{2011}9 - 36 = \left(\frac{4}{9}\cdot\underbrace{99...9}_{2012}\underbrace{00...0}_{2012} + \frac{8}{9}\cdot\underbrace{99...9}_{2011}0 + 1\right) - 36 =$$

$$=\left(\frac{4}{9}\cdot\left(10^{2012}-1\right)\cdot 10^{2012}+\frac{4}{9}\cdot\left(10^{2011}-1\right)\cdot 10+1\right)-36=\left(\frac{2\cdot 10^{2012}+1}{3}\right)^2-6^2=$$

$$=\frac{2\cdot 10^{2012}-17}{3}\cdot\frac{2\cdot 10^{2012}+19}{3}=\underbrace{66...6}_{2010}61\cdot\underbrace{66...6}_{2010}73.$$

Отже, задане число – складене, а модуль різниці отриманих множників дорівнює 12. Доведемо, що меншим він бути не може. Справді, при діленні заданого числа як на 3, так і на 4 отримуємо остачу 1. Це можливо, якщо обидва множники розкладу як при діленні на 3, так і при діленні на 4 мають однакові остачі. А оскільки числа 3 та 4 – взаємно прості, то різниця таких множників ділиться на 12. Залишилось зауважити, що дорівнювати нулю вона не може, бо задане число закінчується цифрою 3, тому воно не є точним квадратом.

Аналогічний висновок отримаємо для всіх чисел вигляду $\underbrace{44...4}_{n+1}\underbrace{88...8}_{n-1}53,\ n\in N.$ Зокрема, для $n=1$ це число $4453=61\cdot 73.$

5. *Про кількість розв'язків діофантового рівняння.*

Для цілого невід'ємного числа n *та натурального числа* m *позначимо через* $S_m(n)$ *кількість усіх розв'язків рівняння* $x_1^2+x_2^2+...+x_m^2=n$ *у цілих числах* $x_1,x_2,...,x_m$ *(розв'язки* $(u_1,u_2,...,u_m)$ *та* $(v_1,v_2,...,v_m)$ *вважаються однаковими тоді і тільки тоді, коли* $u_k=v_k$ *для всіх* $k=1,2,...,m$ *). Знайдіть суму* $\sum\limits_{i=-\left[\sqrt{n}\right]}^{\left[\sqrt{n}\right]}\left(n-(m+1)i^2\right)S_m\left(n-i^2\right).$

Позначимо

$$\sigma_m(n)=\sum_{i=-\left[\sqrt{n}\right]}^{\left[\sqrt{n}\right]}\left(n-(m+1)i^2\right)S_m\left(n-i^2\right)=$$

$$=n\left(S_m(n)+2\sum_{i=1}^{\left[\sqrt{n}\right]}S_m\left(n-i^2\right)\right)-2(m+1)\sum_{i=1}^{\left[\sqrt{n}\right]}i^2\,S_m\left(n-i^2\right).$$

Оскільки $S_m(0)=1,$ то для всіх $m\in N$ отримаємо $\sigma_m(0)=0.$ Для $n\in N$ розглянемо рівняння $x_1^2+x_2^2+...+x_{m+1}^2=n.$ Кількість його розв'язків у цілих числах дорівнює сумі кількостей розв'язків у цілих числах кожного з рівнянь $x_1^2+x_2^2+...+x_m^2=n-x_{m+1}^2,$ де $x_{m+1}-$ довільне фіксоване ціле число з множини $\left\{0,\pm 1,...,\pm\left[\sqrt{n}\right]\right\}.$ Звідси випливає, що

$$S_{m+1}(n)=S_m(n)+2\sum_{i=1}^{\left[\sqrt{n}\right]}S_m\left(n-i^2\right),\ n\in N.$$

Покажемо, що $2(m+1)\sum\limits_{i=1}^{\left[\sqrt{n}\right]}i^2\,S_m\left(n-i^2\right)=nS_{m+1}(n)$ для всіх $m\in N,n\in N.$ Нехай $n=k_1^2+k_2^2+...+k_p^2$ для деякого $p=\overline{1,m+1},$ де $x_j,\ j=\overline{1,p},-$ різні натуральні числа. Таке представлення числа n породжує $S'_{m+1}(n)=2^p(m+1)m...\left((m+1)-(p-1)\right)$ розв'язків рівняння $x_1^2+x_2^2+...+x_{m+1}^2=n$ у цілих числах. Для таких розв'язків маємо

$$2(m+1)\sum_{i=1}^{\left[\sqrt{n}\right]}i^2\,S'_m\left(n-i^2\right)=2(m+1)\sum_{j=1}^{p}k_j^2\,S'_m\left(n-k_j^2\right)=$$

$$=2(m+1)\sum_{j=1}^{p}k_j^2\cdot 2^{p-1}m(m-1)...\left(m-(p-2)\right)=$$

$$=n\cdot 2^p(m+1)m...\left((m+1)-(p-1)\right)=nS'_{m+1}(n).$$

Якщо деяке з чисел k_j повторюються q разів, то доведена рівність збережеться, але обидві її частини зменшаться в $q!$ разів, враховуючи, що відповідні розміщення відбуваються з повтореннями. Підсумовуючи такі рівності по всіх можливих представленнях $n = k_1^2 + k_2^2 + ... + k_p^2$, отримаємо $2(m+1)\sum_{i=1}^{[\sqrt{n}]} i^2 S_m(n-i^2) = nS_{m+1}(n)$ для всіх $m \in N$, $n \in N$.

З доведеного випливає, що $\sigma_m(n) = 0$ для всіх $m \in N$, $n \in Z_+$. Тут і нижче $Z_+ -$ це множина всіх невід'ємних цілих чисел.

6. *Обернення неперервності.*

6.1. *Про функцію $f : Z \to Z$ відомо, що вона є взаємно однозначним відображенням (бієкцією) множини всіх цілих чисел на себе, причому $f(n) \to +\infty$, якщо $n \to +\infty$. Нехай f^{-1} позначає функцію, обернену до f. Чи можна стверджувати, що $f^{-1}(n) \to +\infty$, якщо $n \to +\infty$?*

Не можна. Наприклад,

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n \in Z_+, \\ -n, & n = -2k+1, k \in N, \\ \dfrac{n}{2}, & n = -2k, k \in N. \end{cases}$$

Маємо $f(n) \to +\infty$ при $n \to +\infty$.

Але для функції

$$f^{-1}(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n = 2k,\ n \in Z_+, \\ -n, & n = 2k-1, k \in N, \\ 2n, & n = -k, k \in N, \end{cases}$$

виконується, що $f^{-1}(n)$ для непарних n не прямує до $+\infty$ при $n \to +\infty$.

6.2. *Про функцію $F : R \to R$ відомо, що вона є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе і є розривною в кожній точці числової прямої. Чи можна стверджувати, що й обернена до неї функція F^{-1} також є розривною в кожній точці числової прямої?*

Не можна. Виділимо у множині дійсних чисел підмножину X всіх чисел вигляду $x = \pm a_n a_{n-1} ... a_1, b_1 b_2 ... b_m$, де $m \in N, n \in N$, $a_i, b_j -$ цифри, $b_m \neq 0, b_m \neq 5$. Нехай

$$F(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in R \setminus X, \\ x-1, & x \in X \setminus (0,2), \\ g(x), & x \in X \bigcap (0,2). \end{cases}$$

Визначимо функцію $g(x)$ на множині $X \bigcap (0,2)$ таким чином: $g(x) = \dfrac{1}{2}x$, якщо $b_m -$ парна цифра. Якщо ж цифра $b_m = 1$ чи $b_m = 3$, то збільшимо її на 1, а якщо $b_m = 7$ чи $b_m = 9$, то зменшимо її на 1. Замінивши $x \in X \bigcap (0,2)$ на отриманий таким способом елемент x', покладемо $g(x) = \dfrac{1}{2}x' - 1$. Функція $y = F(x)$ є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе і розривна у кожній точці цієї множини. Але обернена до неї функція $x = F^{-1}(y)$ неперервна у точці $y = \dfrac{1}{3}$.

7. *Групи чисел.*

Чи можна числа $1,2,...,10^9-1$ *розбити на 10 груп так, щоб сума восьмих степенів чисел у кожній групі була одна й та сама?*

Таке розбиття можливе. Для зручності добавимо до наявних чисел ще й число 0. У кожну групу $A_m,\ m=\overline{0,9},$ будемо включати ті числа від 0 до 999999999, сума цифр яких закінчується цифрою $m.$ Покажемо, що таке розбиття підходить. Для цього представимо кожне з чисел від 000000000 до 999999999 у вигляді

$$10^8a_8+10^7a_7+10^6a_6+10^5a_5+10^4a_4+10^3a_3+10^2a_2+10^1a_1+10^0a_0.$$

Для піднесення його до восьмого степеня необхідно перемножити дане число саме на себе 8 разів. Такий добуток складатиметься зі всіх можливих доданків

$$\left(10^8a_8\right)^{k_8}\left(10^7a_7\right)^{k_7}\left(10^6a_6\right)^{k_6}\left(10^5a_5\right)^{k_5}\left(10^4a_4\right)^{k_4}\left(10^3a_3\right)^{k_3}\left(10^2a_2\right)^{k_2}\left(10^1a_1\right)^{k_1}\left(10^0a_0\right)^{k_0},$$

де $k_8+k_7+k_6+k_5+k_4+k_3+k_2+k_1+k_0=8.$ Тому у кожному з таких доданків принаймні один зі степенів k_i дорівнює нулю. Якщо відповідну йому цифру a_i замінити на будь-яку іншу, то отримаємо рівний йому доданок, який входить у суму при піднесенні до восьмого степеня деякого числа з іншої групи $A_m.$ При цьому різним замінам відповідатимуть різні групи. Звідси випливає, що суми восьмих степенів чисел кожної групи однакові. Зрозуміло, що аналогічний висновок можна зробити про суми довільних натуральних степенів даних чисел від 1 до 8 включно.

Але вже для дев'ятих степенів така рівність не виконується.

Зауважимо, що для кожного натурального $n\ge 2$ за аналогічним принципом числа $0,1,2,...,10^n-1$ можна розбити на 10 груп так, щоб суми довільних натуральних степенів від 1 до $n-1$ чисел кожної групи були рівними.

8. *Тригонометричний многочлен.*

Яку найменшу кількість нулів на відрізку $[-\pi,\pi]$ *може мати функція вигляду*

$$T(x)=a_{2012}\cos^3 2012x+a_{2011}\cos^3 2011x+...+a_{15}\cos^3 15x$$

(тут $a_{15},a_{16},...,a_{2012}$ *– деякі дійсні числа)?*

Якщо $a_{15}=1,$ а решта коефіцієнтів многочлена дорівнюють нулю, то він матиме 30 нулів на відрізку $[-\pi,\pi].$ Покажемо, що меншою кількість нулів бути не може. Надалі розглядатимемо лише ті нулі, в яких $T(x)$ змінює свій знак на інтервалі $(-\pi,\pi).$ Зрозуміло, що число $x=0$ не входить до множини таких нулів. Внаслідок парності функції $T(x)$ їх можна представити у вигляді: $\pm x_1,\pm x_2,...,\pm x_n.$ Припустимо, що $n\le 14.$ Нехай $f_k(x)=\cos x+\beta_k,\ k=\overline{1,n}.$ Вибравши числа β_k так, щоб виконувалися рівності $f_k(\pm x_k)=0,$ розглянемо функцію $F(x)=f_1(x)f_2(x)...f_n(x),$ яка на інтервалі $(-\pi,\pi)$ змінює свій знак у тих самих точках, що й многочлен $T(x).$ Тому неперервна, відмінна від тотожного нуля функція $T(x)F(x)$ не змінює свого знака на відрізку $[-\pi,\pi].$ Звідси випливає, що $\int\limits_{-\pi}^{\pi}T(x)F(x)dx\ne 0.$ З іншого боку, врахувавши рівності $\cos^3\varphi=\dfrac{\cos 3\varphi+3\cos\varphi}{4}$ та $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2},$ представимо $T(x)F(x)$ у вигляді $b_{6036+n}\cos(6036+n)x+b_{6035+n}\cos(6035+n)x+...+b_{15-n}\cos(15-n)x.$ Звідси для $n\le 14$ знаходимо $\int\limits_{-\pi}^{\pi}T(x)F(x)dx=0.$ Отримане протиріччя доводить, що $n\ge 15,$ тобто навіть тих нулів, в яких $T(x)$ змінює свій знак на інтервалі $(-\pi,\pi),$ є не менше 30.

Зауважимо, що аналогічний висновок отримаємо і у випадку, якщо у многочлені $T(x)$ замість кубів записати довільні непарні натуральні степені.

9. *Стильне облицювання.*

Нехай $m,n,k-$ натуральні числа. Внутрішню поверхню душової кімнати, яка утворює собою прямокутний паралелепіпед розміром $m\times n\times k$, було замовлено облицювати без прогалин (тобто стіни, підлогу, стелю і навіть двері) плиткою. Майстер-плиточник має чорні та білі плитки розміром 1×1 і вважає облицювання стильним, якщо використана найбільша можлива кількість чорних плиток так, щоб жодні дві з них не дотикалися між собою сторонами (дотик кутами дозволяється, різати плитки не можна). Позначимо через $F(m,n,k)$ кількість чорних плиток, яка потрібна для стильного облицювання душової кімнати.

9.1. Знайдіть $F(5,5,5)$ та $F(2012,15,15)$.

9.2. Дослідіть величину $F(m,n,k)$.

9.1. Розфарбуємо кожну грань куба зі стороною 5 у три кольори, як у наступній таблиці

1	2	3	2	1
2	2	3	2	2
3	3	3	3	3
2	2	3	2	2
1	2	3	2	1

У кожній вершині куба сходяться три клітинки з цифрою 1. З них зафарбувати у чорний колір вдасться лише одну. Отже, максимально отримаємо зафарбованих у чорний колір 8 клітинок з одиницею. Далі, навколо кожної вершини маємо замкнений ланцюжок з дев'яти клітинок з двійками (по три двійки на кожній грані). З них зафарбувати у чорний колір можна не більше чотирьох клітинок. Разом на всій поверхні куба таких отримаємо не більше 32. Нарешті, на кожній грані маємо по 9 клітинок з трійками, з яких зафарбувати у чорний колір вдасться не більше п'яти. Якщо на деякій грані у чорний колір зафарбовано 5 таких клітинок, то це можна зробити єдиним способом. Але тоді на чотирьох сусідніх з нею через спільне ребро гранях чорних вийде не більше чотирьох, і тільки на протилежній грані їх знову матимемо 5. Отже, отримаємо максимум 26 чорних клітинок з трійками. Всього – не більше 66 чорних клітинок. Рівно 66 чорних квадратиків матимемо, якщо не будемо фарбувати у чорний колір жодну з клітинок, які прилягають до вертикальних ребер куба на двох його протилежних гранях, а всі інші зафарбуємо у шаховому порядку так, щоб біля кожної вершини було по одному чорному квадратику. У результаті на двох гранях куба виявиться по 13, на двох – по 12 і на двох – по 8 чорних квадратиків. Разом – 66. Таким чином, $F(5,5,5)=66=\frac{S}{2}-9,$ де $S=150-$ площа повної поверхні куба з ребром 5.

Зауважимо, що міркуючи аналогічно для куба з ребром $k=2l-1$та розфарбувавши всі його грані аналогічним чином у l кольорів, отримаємо $F(k,k,k)=\frac{S}{2}-(2k-1),$ де $S=6k^2-$ площа повної поверхні куба з ребром $k.$

При збільшенні одного з вимірів такого куба зафарбувати у чорний колір нових квадратиків вдасться не більше, ніж половина добавленої при цьому площі повної поверхні. Тому для $m>k$ отримуємо $F(m,k,k)\le\frac{S}{2}-(2k-1).$ Рівність досягається, якщо не зафарбовувати у чорний колір жодну з клітинок, які прилягають до паралельних ребер паралелепіпеда з довжиною k на двох його протилежних квадратних гранях, а всі інші зафарбувати у шаховому порядку так, щоб біля кожної вершини було по одному чорному квадратику. Для $m=2012,k=15$ будемо мати $F(m,k,k)=60556=\frac{S}{2}-19,$ де $S=121170-$ площа повної поверхні такого паралелепіпеда.

9.2. Нехай тепер маємо довільний прямокутний паралелепіпед розмірами $m\times n\times k,$ причому $m\ge n\ge k,\ k=2l-1.$ Його можна отримати з куба з ребром $k,$ збільшуючи при потребі послідовно два із вимірів куба. Оскільки при цьому кількість нових чорних квадратиків не перевищить половини добавленої площі повної поверхні, то

$$F\left(m,n,k\right)\le\frac{S}{2}-\left(2k-1\right)=mn+mk+nk-\left(2k-1\right).$$

Рівність досягається, якщо не зафарбовувати у чорний колір жодну з клітинок, які прилягають до паралельних ребер паралелепіпеда з довжиною k на двох його протилежних квадратних гранях, а всі інші зафарбувати у шаховому порядку так, щоб біля кожної вершини було по одному чорному квадратику.

Якщо ж $m\ge n\ge k,\ k=2l,$ то розглянемо спочатку куб з ребром $2l$ та зафарбуємо всі його грані у l кольорів, як у наступній таблиці

1	2	…	l	l	…	2	1
2	2	…	l	l	…	2	2
…	…	…	l	l	…	…	…
l	l	l	l	l	l	l	l
l	l	l	l	l	l	l	l
…	…	…	l	l	…	…	…
2	2	…	l	l	…	2	2
1	2	…	l	l	…	2	1

Біля кожної з восьми вершини отримаємо замкнений ланцюжок з непарної кількості однакових цифр від 1 до $l.$ Зафарбувати у чорний колір на кожному такому ланцюжку вдасться не більше $\frac{p-1}{2}$ клітинок, де $p-$ кількість клітинок, які належать даному ланцюжку. Тому для даного куба $F\left(m,k,k\right)\le\frac{S}{2}-2k=3k^2-2k,$ причому рівність досягається, якщо не зафарбовувати у чорний колір жодну з клітинок, які прилягають до вертикальних ребер куба на двох його протилежних гранях, а всі інші зафарбувати у шаховому порядку так, щоб біля кожної вершини було по одному чорному квадратику. Збільшуючи два із вимірів такого куба до m та n відповідно, для $k=2l$ отримаємо

$$F\left(m,n,k\right)=\frac{S}{2}-2k=mn+mk+nk-2k.$$

Остаточно маємо

$$F\left(m,n,k\right)=\begin{cases}mn+mk+nk-\left(2k-1\right), & m\ge n\ge k,\ k=2l-1,\\ mn+mk+nk-2k, & m\ge n\ge k,\ k=2l,\end{cases}\qquad m,n,k,l\in N.$$

10. ***Оцінка суми.***

Нехай $x_1,x_2,...,x_n-$ *довільні дійсні числа, причому* $\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ne0.$ *Доведіть, що*

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\le\left(n-1+\left(1-2\left\{\frac{1}{2}n\left(1-\mu\right)\right\}\right)^2\right)\cdot\max_{1\le i\le n}x_i^2,$$

де $\mu=\frac{1}{n\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i\right|}\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \left\{u\right\}=u-\left[u\right]-$ *дробова частина числа* $u.$

Нехай $\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i\right|=m.$ Послідовно проводячи заміни $x_i=my_i,\ \left|y_i\right|\le1;$ $y_i=1-z_i,\ 0\le z_i\le2;\ z_i=2t_i,\ 0\le t_i\le1,$ зведемо задану нерівність до нерівності

$$\sum_{i=1}^{n}\left(t_i-t_i^2\right)\ge\left\{\sum_{i=1}^{n}t_i\right\}-\left\{\sum_{i=1}^{n}t_i\right\}^2,\ 0\le t_i\le 1.$$

Доведемо отриману нерівність методом математичної індукції. Для $n=1$ вона перетворюється в очевидну рівність. Припустимо справедливість такої нерівності для $n=k.$ Введемо позначення $M_n=\left[\sum_{i=1}^{n}t_i\right],\quad \varepsilon_n=\left\{\sum_{i=1}^{n}t_i\right\}$ і для $n=k+1$ розглянемо два можливі випадки:

1) $$M_{k+1}=M_k\Rightarrow\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_k+t_{k+1}\Rightarrow\sum_{i=1}^{k+1}\left(t_i-t_i^2\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(t_i-t_i^2\right)+\left(t_{k+1}-t_{k+1}^2\right)\ge$$
$$\ge\left(\varepsilon_k-\varepsilon_k^2\right)+\left(t_{k+1}-t_{k+1}^2\right)\ge\left(\varepsilon_k-\varepsilon_k^2\right)+\left(t_{k+1}-t_{k+1}^2\right)-2\varepsilon_k t_{k+1}=\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_{k+1}^2.$$

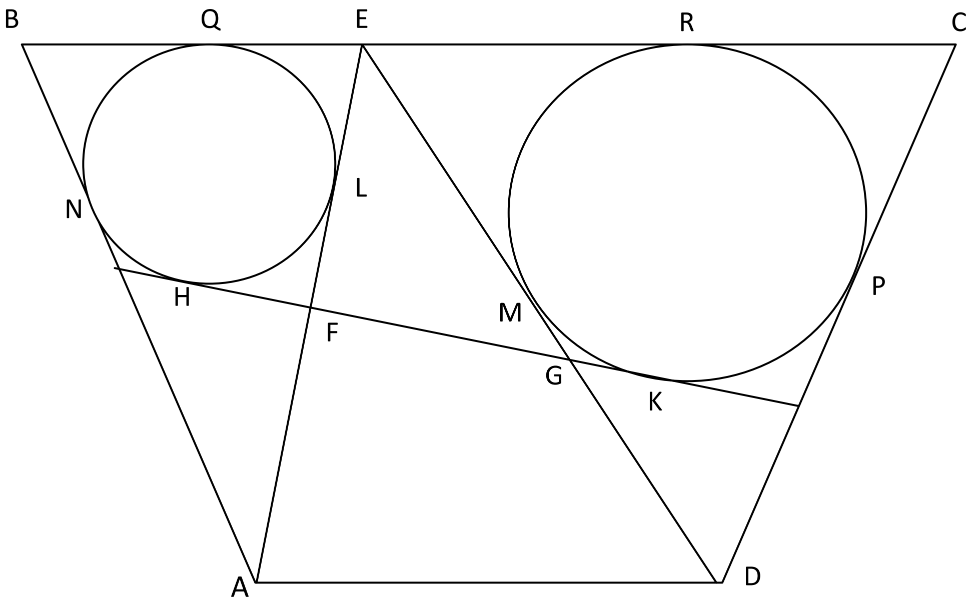
2) $$M_{k+1}=M_k+1\Rightarrow\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_k+t_{k+1}-1\Rightarrow\sum_{i=1}^{k+1}\left(t_i-t_i^2\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(t_i-t_i^2\right)+\left(t_{k+1}-t_{k+1}^2\right)\ge$$
$$\ge\left(\varepsilon_k-\varepsilon_k^2\right)+\left(t_{k+1}-t_{k+1}^2\right)\ge\left(\varepsilon_k-\varepsilon_k^2\right)+\left(t_{k+1}-t_{k+1}^2\right)-2\left(1-\varepsilon_k\right)\left(1-t_{k+1}\right)=\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_{k+1}^2.$$

З доведеного випливає справедливість отриманої нерівності для всіх $n\in N.$

11. ***Спільна дотична.***

Нехай $E-$ довільна точка сторони BC квадрата $ABCD$. Доведіть, що вписані кола трикутників $ABE,\ CDE,\ ADE$ мають спільну дотичну.

Розглянемо загальнішу задачу. Нехай $ABCD-$ опуклий чотирикутник, $E-$ довільна точка на стороні BC (див. рис.)



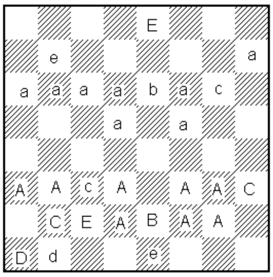
Нехай $HK-$ спільна дотична до кіл, вписаних у трикутники ABE та CDE. Щоб вона була дотичною і до кола, вписаного у трикутник $ADE,$ необхідно і достатньо, щоб у чотирикутник $AFGD$ можна було вписати коло. Враховуючи рівність відповідних відрізків дотичних, розглянемо різницю

$$\left(AD+FG\right)-\left(AF+DG\right)=\left(AD+HK\right)-\left(AL+DM\right)=$$
$$=\left(AD+QR\right)-\left(AN+DP\right)=\left(AD+BC\right)-\left(AB+DC\right).$$

Щоб така різниця дорівнювала нулю, необхідно і достатньо, щоб у чотирикутник $ABCD$ можна було вписати коло. Таким чином, вписані кола трикутників $ABE,\ CDE,\ ADE$ матимуть спільну дотичну тоді і тільки тоді, коли чотирикутник $ABCD$ описаний. Зокрема, це буде і у випадку, коли $ABCD$ є квадратом.

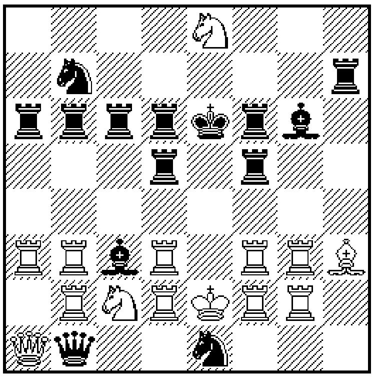
12. ***Шаховий ребус.***

На діаграмі зображено позицію, яка могла б трапитися у шаховій партії. Білі фігури зашифровано великими літерами, а чорні – малими (усього 14 білих та 14 чорних фігур). Фігури однакового типу зашифровано однаковими буквами: наприклад, X – білий король, x – чорний король. Розшифруйте позицію.



Спочатку відзначимо, що *A*, *a* – не пішаки, бо з обох сторін збито по дві фігури, а на трьох вертикалях дошки є по дві фігури *A*, що вимагало би трьох боїв з боку білих. Отже, *A*, *a* – однакові фігури, утворені після проходження пішаків до восьмої та першої горизонталей відповідно. Очевидно, що *A*, *a* – не ферзі, бо їх могло утворитися максимум по 7. Для утворення по 8 таких фігур необхідно, щоб з обох сторін таке проходження здійснили як мінімум по 6 пішаків. Для цього знадобиться чотири взяття – по одному на кожній парі вертикалей *a+b, c+d, e+f, g+h.* Оскільки цим вичерпується ліміт збитих фігур, то інших взяттів бути не могло, а в кожній парі вказаних вертикалей по 3 пішаки перетворилися в однакові фігури, причому всі 3 на полях одного кольору. Звідси випливає, що *A*, *a* – не слони, бо у такому разі різниця між загальною кількістю слонів, які стоять на білих полях, і слонів, які стоять на чорних полях, мала би бути кратною трьом, а на дошці модуль такої різниці дорівнює 2. Таким чином, пішаків на дошці не залишилося взагалі.

По одній фігурі кожного кольору можуть бути лише ферзі та королі. Такими є тільки *B*, *b* і *D*, *d*. Оскільки королі не можуть стояти на суміжних полях, то однозначно отримуємо: *B*, *b* – королі, *D*, *d* – ферзі. Оскільки обидва королі не можуть одночасно знаходитися під шахом, то *E*, *e* – не тури. Вони також – не слони, бо два *E* знаходяться на білих полях. Таким чином, *E*, *e* – коні. Отже, слонами можуть бути тільки *C*, *c*, а тоді турами – *A*, *a*. Відновлена, дещо штучна, позиція виглядає так:



13. ***Суми та біноміальні коефіцієнти.***

Нехай k – *задане натуральне число.*

13.1. Знайдіть такі дійсні числа $A_0(k), A_1(k), ..., A_k(k)$, *що для всіх допустимих дійсних значень* x *справджується рівність*

$$\frac{k!}{x(x+1)...(x+k)} \equiv \frac{A_0(k)}{x} + \frac{A_1(k)}{x+1} + ... + \frac{A_k(k)}{x+k}.$$

13.2. Для натуральних $n \geq 2k$ *знайдіть суму* $S_n(k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{iC_{i+k}^{k}}$.

13.3. Доведіть існування границі $\lim_{n\to\infty} S_n(k)$ *та знайдіть її значення.*

13.1. Такі числа існують згідно з теоремою про розклад відношення двох многочленів у суму найпростіших дробів – ця теорема вивчається в курсі математичного аналізу. Для тих, хто не знайомий з цим твердженням, скажемо, що в даному випадку існування доводиться індукцією за $k \geq 1$ з використанням рівності

$$\frac{1}{(x+i)(x+k+1)} = \frac{1}{k+1-i}\left(\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x+k+1}\right), \; i = \overline{0,k}..$$

Далі, для знаходження коефіцієнтів розкладу помножимо обидві частини тотожності

$$\frac{k!}{x(x+1)\dots(x+k)} \equiv \frac{A_0(k)}{x} + \frac{A_1(k)}{x+1} + \dots + \frac{A_k(k)}{x+k}$$

на $x+i,\ i=\overline{0,k}$. Перейшовши в отриманій рівності до границі при $x \to -i$, знаходимо

$$A_i(k) = \lim_{x\to -i} \frac{k!(x+i)}{x(x+1)\dots(x+k)} = (-1)^i \frac{k!}{i!(k-i)!} = (-1)^i C_k^i,\ i=\overline{0,k}.$$

13.2.
$$S_n(k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{iC_{i+k}^k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k!}{i(i+1)\dots(i+k)} = (k-1)!\sum_{i=1}^{n} \frac{(i+k)-i}{i(i+1)\dots(i+k)} =$$

$$= (k-1)!\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i(i+1)\dots(i+k-1)} - \frac{1}{(i+1)(i+2)\dots(i+k)}\right) =$$

$$= (k-1)!\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}\right) = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{C_{n+k}^k}\right).$$

Зауважимо, що умова $n \ge 2k$ виявилася зайвою.

13.3. Враховуючи результат п.13.2, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} S_n(k) = \frac{1}{k}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{C_{n+k}^k}\right) = \frac{1}{k}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{k!}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}\right) = \frac{1}{k}.$$

14. ***Правильний тетраедр.***

Чи можливо правильний тетраедр розрізати на декілька правильних тетраедрів?

Припустимо, що таке розрізання можливе. Тоді серед утворених при цьому частин знайдеться менший правильний тетраедр, одна з вершин якого співпадає з вершиною початкового тетраедра, а три ребра, які виходять з цієї вершини, лежать на відповідних ребрах вихідного тетраедра. Розглянемо тупий кут між протилежною до даної вершини гранню меншого тетраедра та гранню вихідного тетраедра. Для розрізання необхідно, щоб двогранний кут правильного тетраедра вкладався у нього, а отже і у кут 180^o, ціле число разів. А оскільки косинус такого двогранного кута дорівнює $\frac{1}{3}$, то це неможливо, бо величина даного кута знаходиться між 60 та 90 градусами. Отримане протиріччя доводить неможливість розрізати правильний тетраедр на скінченну кількість менших правильних тетраедрів.

15. ***Надстепені та цікава функція.***

Для заданого натурального n розглядаються всілякі числа вигляду $a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{a_k}}}}$, де $1 \le k \le n$, $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$, $a_i \in N$, $1 \le i \le k$. Позначимо через $g(n)$ найбільше серед таких чисел: $g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(3)=3$, $g(4)=4$, $g(5)=9$, $g(6)=27$, $g(7)=512$, і т.д. Знайдіть $g(n)$. (Нагадаємо, що для додатних чисел a,b,c за означенням $a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)}$. Наприклад, $2^{3^2} = 2^9 = 512$.)

Маємо: $g(1)=1$, $g(2)=2$, $g(3)=3$, $g(4)=2^2$ $g(5)=3^2$, $g(6)=3^3$, $g(7)=2^{3^2}$.

Зауважимо, що

$$g(n) = \max\left\{1^{g(n-1)}, 2^{g(n-2)}, 3^{g(n-3)}, \dots, (n-1)^{g(1)}\right\}. \qquad (*)$$

Справді, яким би не було число a_1, найбільше значення виразу $a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{a_k}}}}$ отримаємо, якщо $a_2^{\cdot^{\cdot^{a_k}}} = g(n-a_1)$, і залишається тільки з цих найбільших значень вибрати максимальне.

<u>Лема.</u> Для кожного $n \ge 6$ справедливі твердження:

а) $g(n-1) > \log_2 3 \cdot g(n-2)$,

б) $g(n+1) = 2^{g(n-1)}$.

Доведення леми. З нерівностей $2^{1,5} < 3 < 2^2$ випливає, що $1,5 < \log_2 3 < 2.$ Тому для $n = 6$ обидва твердження леми виконуються:

$$g(5) = 9 > 2 \cdot 4 > \log_2 3 \cdot g(4), \quad g(7) = 512 = 2^9 = 2^{g(5)}.$$

Припустимо їх справедливість для всіх $n = \overline{6,k}.$ Тоді з врахуванням зробленого припущення та рівності (*) для $n = k+1$ отримаємо

$$g(k) = 2^{g(k-2)} > 3^{g(k-3)} = 2^{\log_2 3 \cdot g(k-3)} = \left(2^{g(k-3)}\right)^{\log_2 3} = \left(g(k-1)\right)^{\log_2 3} =$$

$$= \left(g(k-1)\right)^{\log_2 3 - 1} g(k-1) > \left(g(k-1)\right)^{0,5} g(k-1) \geq 3g(k-1) > \log_2 3 \cdot g(k-1).$$

Далі відзначимо, що функція $f(t) = \log_t (t+1) = \dfrac{\ln(t+1)}{\ln t}$ спадає на проміжку $[2, +\infty),$ бо

$$f'(t) = \frac{\dfrac{\ln t}{t+1} - \dfrac{\ln(t+1)}{t}}{\ln^2 t} = \frac{t \cdot \ln t - (t+1)\ln(t+1)}{t(t+1)\ln^2 t} < 0, \; t \geq 2.$$

Звідси випливає, що $\log_2 3 > \log_3 4 > \ldots > \log_m (m+1) > \ldots$. Тому, з врахуванням зроблених припущень та доведеної вище нерівності, отримуємо

$$2^{g(k)} > 2^{\log_2 3 \cdot g(k-1)} = 3^{g(k-1)} > 3^{\log_2 3 \cdot g(k-2)} > 3^{\log_3 4 \cdot g(k-2)} = 4^{g(k-2)} > \ldots > (k+1)^{g(1)}.$$

Оскільки також $2^{g(k)} > 1 = 1^{g(k+1)},$ то звідси і рівності (*) випливає, що $g(k+2) = 2^{g(k)}.$ Отже, обидва твердження леми будуть справедливими для всіх $n \geq 6.$ Лема доведена.

Підсумовуючи сказане, отримуємо:

$$g(1) = 1, \quad g(2) = 2, \; g(3) = 3, \quad g(4) = 4 = 2^2, \; g(2k-1) = 2^{\cdot^{\cdot^{2^{3^2}}}}, \; g(2k) = 2^{\cdot^{\cdot^{2^{3^3}}}}, \; k \geq 3,$$

причому у фрагменті $2^{\cdot^{\cdot^{2}}}$ двох останніх рівностей використано $k-3$ двійки.

16. ***Надстепені та подільність.***

16.1. Нехай $k-$ задане натуральне число. Знайдіть $D_k -$ найбільший спільний дільник усіх чисел вигляду $m^{m^m} - m^m,$ де $m \in N,$ $m \geq k.$

16.2. Для заданого натурального a розглянемо послідовність $\{u_n(a)\}_{n \geq 1} : u_1(a) = a,$ $u_{n+1}(a) = a^{u_n(a)}, n \geq 1.$ Доведіть, що $w_n(a) = u_n(a) - u_{n-1}(a)$ для довільного $a \in N$ ділиться без остачі на $n!$ для всіх натуральних $n \geq 2.$

16.1. Позначимо $a_m = m^{m^m} - m^m = m^m\left(m^{m^m - m} - 1\right) = m^m\left(m^{m\left(m^{m-1}-1\right)} - 1\right), m \in N.$ Безпосередньо обчислюємо $a_1 = 0,$ $a_2 = 12.$ Доведемо, що $a_m \vdots 96$ для всіх $m \geq 3.$ За рахунок множника m^m отримуємо $a_m \vdots 4^4 = 2\;5$ для $m = 4$ та $a_m \vdots 2^6 = 64$ для парних $m \geq 6.$ Також $k = m^{m-1} - 1 = \left(m^{\frac{m-1}{2}} - 1\right)\left(m^{\frac{m-1}{2}} + 1\right) \vdots 8$ як добуток сусідніх парних натуральних чисел для непарних $m \geq 3.$ Тому $m^{m\left(m^{m-1}-1\right)} - 1 = \left(m^{\frac{mk}{8}}\right)^8 - 1 = l^8 - 1 = (l-1)(l+1)\left(l^2+1\right)\left(l^4+1\right) \vdots 32$ (при непарному $m,$ а з ним і $l,$ тут всі чотири останні множники парні, а з перших двох із них – один ділиться на 4). Таким чином, $a_m \vdots 32$ для всіх $m \geq 3.$ Покажемо, що також $a_m \vdots 3.$ Для $m = 3n$ це очевидно. А для $m = 3n \pm 1,$ враховуючи парність добутку $m\left(m^{m-1} - 1\right),$ така подільність випливає з рівності $(3n \pm 1)^{m\left(m^{m-1}-1\right)} \equiv 1 \pmod 3.$ І оскільки числа 32 та 3 – взаємно прості, то $a_m \vdots 96$ для всіх $m \geq 3.$

Покажемо тепер, що існують як завгодно великі m, для яких a_m не ділиться на 64, та як завгодно великі m, для яких a_m не ділиться на 9. Справді, $2^{18} \equiv 1(\bmod 9)$, тому для $m = 18n+2$ отримуємо

$$a_m = (18n+2)^{18n+2}\left((18n+2)^{(18n+2)\left((18n+2)^{18n+1}-1\right)} - 1\right) \equiv 2^2\left(2^{2\left(2^1-1\right)} - 1\right)(\bmod 9) \equiv 3(\bmod 9).$$

А оскільки $3^{64} \equiv 1(\bmod 64)$, то для $m = 64n+3$ будемо мати

$$a_m = (64n+3)^{64n+3}\left((64n+3)^{(64n+3)\left((64n+3)^{64n+2}-1\right)} - 1\right) \equiv 3^3\left(3^{3\left(3^2-1\right)} - 1\right)(\bmod 64) \equiv 32(\bmod 64).$$

І, нарешті, доведемо, що для кожного простого числа $p > 3$ існують як завгодно великі m, для яких a_m не ділиться на p. Оскільки $2^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$, то $2^p \equiv 2(\bmod p)$, $2^{pk} \equiv 2^k(\bmod p)$, $k \in N$. Також $2^s \equiv 1(\bmod p) \Leftrightarrow s \vdots (p-1)$. Покладемо $m = (p-1)pn+2$. Враховуючи, що $m^m = ((p-1)pn+2)^{(p-1)pn+2.}$ не ділиться на p, розглянемо вираз

$$m^{m\left(m^{m-1}-1\right)} - 1 = ((p-1)pn+2)^{((p-1)pn+2)\left(((p-1)pn+2)^{(p-1)pn+1}-1\right)} - 1 \equiv \left(2^{2\left(2^{(p-1)pn+1}-1\right)} - 1\right)(\bmod p).$$

Для його подільності на просте число p необхідно і достатньо, щоб числа $s = 2\left(2^{(p-1)pn+1} - 1\right)$ ділились на $(p-1)$. Оскільки $s \equiv 2(\bmod 4)$, то для $p \equiv 1(\bmod 4)$ це неможливо. А для інших простих чисел $p > 3$ розглянемо довільний простий непарний дільник q числа $p-1$. Для подільності s на q необхідно і достатньо, щоб непарне число $(p-1)pn+1$ ділилось на парне число $q-1$, що, очевидно, є неможливим.

Підсумовуючи сказане вище, отримуємо: $D_1 = D_2 = 12$, $D_k = 96$, $k \geq 3$.

16.2. Доведемо твердження задачі методом математичної індукції. Для $n = 2$ маємо $w_2 = a^a - a \vdots 2!$ Для $n = 3$ згідно з п.16.1 отримуємо $w_3 = a^{a^a} - a^a \vdots 3!$ Нескладно переконатися, що $w_4 \vdots 4!$ Подільність на 3 доводимо так само, як для w_3, а подільність на 8 для непарних a буде обґрунтована нижче. Припустимо також, що $w_n \vdots n!$ для всіх n таких, що $2 \leq n \leq k$, $k \geq 4$. Покажемо, що у такому разі $w_{k+1} \vdots (k+1)!$

Нехай $k! = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_m^{\alpha_m}$, $k+1 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \ldots p_m^{\beta_m}$, причому, якщо якесь з цих чисел не ділиться на котресь p_j, то відповідний степінь α_j чи β_j дорівнює 0, але $x_i = \alpha_i + \beta_i \neq 0$, $i = \overline{1,m}$. Тоді $(k+1)! = p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \ldots p_m^{x_m}$.

Доведемо, що $w_{k+1} \vdots p_i^{x_i}$ для всіх $i = \overline{1,m}$. Для цього запишемо w_{k+1} у вигляді

$$w_{k+1} = a^{a^{u_{k-1}}} - a^{u_{k-1}} = a^{u_{k-1}}\left(a^{a^{u_{k-1}} - u_{k-1}} - 1\right) = a^{u_{k-1}}\left(a^{w_k} - 1\right).$$

Оскільки $w_{k+1} \vdots a^{u_{k-1}}$, то у випадку $a \vdots p_i$ розглянемо $a^{u_{k-1}} = a^{u_{k-1} - u_{k-2}} a^{u_{k-2}} = a^{w_{k-1}} a^{u_{k-2}}$. Враховуючи зроблене припущення, маємо: $a^{u_{k-2}} \vdots p_i^{\alpha_i}$ та $w_{k-1} \vdots (k-1)!$ А оскільки $(k-1)! > (k+1) \geq p_i^{\beta_i} > \beta_i$ для $k \geq 4$, то $a^{w_{k-1}} \vdots p_i^{\beta_i}$. Тому $w_{k+1} \vdots p_i^{x_i}$.

Якщо ж a не ділиться на p_i, то достатньо довести, що $\left(a^{w_k} - 1\right) \vdots p_i^{x_i}$. Для доведення зауважимо, що

$$x_i = \left[\frac{k+1}{p_i}\right] + \left[\frac{k+1}{p_i^2}\right] + \ldots + \left[\frac{k+1}{p_i^n}\right] + \ldots < (k+1)\left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \ldots + \frac{1}{p_i^n} + \ldots\right) = (k+1)\frac{\frac{1}{p_i}}{1 - \frac{1}{p_i}} = \frac{k+1}{p_i - 1}.$$

Для $p_i = 2$ звідси отримаємо, що $x_i \le k$. Доведемо, що $w_{k+1} \vdots 2^k$ для всіх непарних a. Для $k=1$ це очевидно. А, припускаючи, що $w_k \vdots 2^{k-1}$, отримаємо

$$a^{w_k} - 1 = a^{q \cdot 2^{k-1}} - 1 = \left(a^q\right)^{2^{k-1}} - 1 = b^{2^{k-1}} - 1 = (b-1)(b+1)\left(b^{2^1}+1\right)\left(b^{2^2}+1\right)\ldots\left(b^{2^{k-2}}+1\right) \vdots 2^k$$

для кожного непарного $b = a^q$. Тому також $w_{k+1} \vdots 2^k$ для всіх непарних a.

Нехай тепер $p_i > 2$. За теоремою Ойлера для доведення подільності $\left(a^{w_k} - 1\right) \vdots p_i^{\alpha_i+\beta_i}$ достатньо довести, що $w_k \vdots \varphi\left(p_i^{\alpha_i+\beta_i}\right) = p_i^{\alpha_i+\beta_i-1}(p_i - 1)$. Тут $\varphi -$ це функція Ойлера, $\varphi(n) -$ кількість натуральних чисел, менших за n та взаємно простих з n.

Розглянемо кілька варіантів:

1). $k+1 = p_i$. Тоді $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$, $p_i - 1 = k$, $\varphi\left(p_i^{\alpha_i+\beta_i}\right) = k$. Оскільки за припущенням $w_k \vdots k!$, то $w_k \vdots \varphi\left(p_i^{\alpha_i+\beta_i}\right)$.

2). $\beta_i = 0$. Тоді $w_k \vdots \varphi\left(p_i^{\alpha_i+\beta_i}\right) = p_i^{\alpha_i+\beta_i-1}(p_i-1)$. Тому з припущення $w_k \vdots k!$ отримаємо, що $w_k \vdots p_i^{\alpha_i}(p_i - 1)$, а отже, також $w_k \vdots \varphi\left(p_i^{\alpha_i+\beta_i}\right)$.

3). У всіх інших випадках будемо мати $k+1 \le 2p_i \Rightarrow k \ge p_i + (p_i - 1) > p_i$. Тому $\alpha_i \ge 1$, $x_i \ge 2$. Зауважимо також, що для $p_i > 2$ звідси випливає

$$k > \frac{1}{p_i - 2} + p_i - 1 \Leftrightarrow k > \frac{k+1}{p_i - 1} + p_i - 2 \Rightarrow k > x_i + p_i - 2 \Rightarrow k - x_i + 2 > p_i.$$

Оскільки за припущенням $w_{k-x_i+2} \vdots (k - x_i + 2)!$, а $(k - x_i + 2)! \vdots p_i(p_i - 1) = \varphi\left(p_i^2\right)$, то $w_{k-x_i+2} \vdots \varphi\left(p_i^2\right)$. Звідси за теоремою Ойлера $\left(a^{w_{k-x_i+2}} - 1\right) \vdots p_i^2$, тобто $w_{k-x_i+3} \vdots p_i^2$. Якщо при цьому $x_i \ge 3$, то, враховуючи зроблене припущення, матимемо також $w_{k-x_i+3} \vdots (p_i - 1)$. Далі, міркуючи аналогічно, послідовно отримаємо

$$w_{k-x_i+4} \vdots p_i^3,\ w_{k-x_i+5} \vdots p_i^4,\ \ldots,\ w_k \vdots p_i^{x_i-1},\ w_{k+1} \vdots p_i^{x_i}.$$

Таким чином, нами доведено, що $w_{k+1} \vdots p_i^{x_i}$ для всіх p_i, $i = \overline{1,m}$. Це означає, що

$$w_{k+1} \vdots p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \ldots p_m^{x_m} = (k+1)!$$

17. ***Функціональне рівняння.***

Для натурального k *знайдіть усі такі функції* $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$, *що для будь-яких додатних чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$, *добуток котрих дорівнює 1, виконується рівність*

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})}{x_{2i-1} + x_{2i}} = 1.$$

Розглянемо спочатку випадок $k \ge 2$. Підставляючи $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2k-1} = x_{2k} = 1$, отримуємо $f^n(1) = 1$. А оскільки $f(x)$ набуває лише додатних значень, то $f(1) = 1$. Підставимо тепер $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{a}$, $a > 0$, $a \ne 1$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_{2k-1} = x_{2k} = 1$, Враховуючи, що $f(1) = 1$, отримаємо рівність $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = a + \frac{1}{a}$. Далі, покладаючи $x_1 = a$, $x_3 = \frac{1}{a}$, $a > 0$, $a \ne 1$, та залишаючи решта аргументів одиницями, будемо мати $\left(f(a) + 1\right)\left(f\left(\frac{1}{a}\right) + 1\right) = (a+1)\left(\frac{1}{a} + 1\right)$, звідки одержимо $f(a) f\left(\frac{1}{a}\right) = 1$. Таким чином,

$f(a)=a$ або $f(a)=\frac{1}{a}.$ Припустимо, що для відмінних від одиниці додатних чисел a,b одночасно виконуються рівності $f(a)=a,$ $f(b)=\frac{1}{b}.$ Тоді $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a},$ $f\left(\frac{1}{b}\right)=b.$ Підставивши $x_1=a,$ $x_2=b,$ $x_3=\frac{1}{a},$ $x_4=\frac{1}{b},$ та залишаючи решта аргументів одиницями, отримаємо співвідношення $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+b\right)=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$ звідки $ab+1=a+b,$ тобто $(a-1)(b-1)=0,$ що неможливо при $a\neq 1, b\neq 1.$ З доведеного вище випливає, що розв'язками заданого функціонального рівняння при $k\geq 2$ можуть бути лише функції $f(x)=x$ та $f(x)=\frac{1}{x}.$ Перевірка показує, що вони обидві задовольняють це рівняння.

Нехай тепер $k=1.$ Міркуючи аналогічно до попереднього випадку, отримаємо: $f(1)=1$ та $f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{a},$ $a>0,$ $a\neq 1.$ Отже, для функції $g(x)=f(x)-x$ будемо мати: $g(1)=0$ та $g(a)+g\left(\frac{1}{a}\right)=0,$ $a>0,$ $a\neq 1.$ Якщо $g(x)-$ довільна функція, визначена на інтервалі $(0,1),$ яка задовольняє на ньому нерівності $-x<g(x)<\frac{1}{x},$ то, покладаючи $g(1)=0$ та $g(x)=-g\left(\frac{1}{x}\right), x>1,$ отримаємо, що функція $f(x)=g(x)+x$ є розв'язком заданого функціонального рівняння при $k=1.$ Навпаки, для кожного розв'язку $f(x)>0$ функція $g(x)=f(x)-x$ задовольняє накладені на неї вище умови. При цьому нерівність $g(x)>-x, x\in(0,1),$ очевидна, а $g(x)<\frac{1}{x},$ $x\in(0,1),$ випливає з нерівності $-g(x)+\frac{1}{x}=g\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}=f\left(\frac{1}{x}\right)>0, x\in(0,1).$ Таким чином, знайдені всі розв'язки заданого рівняння при $k=1.$ Зокрема, покладаючи $g(x)=0$ та $g(x)=\frac{1}{x}-x,$ отримаємо отримані нами для $k\geq 2$ розв'язки $f(x)=x$ та $f(x)=\frac{1}{x}$ відповідно. Але, крім них, при $k=1$ задане рівняння задовольняє, наприклад, ще й функція

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\in(0,1), \\ 1, & x=1, \\ x-1, & x\in(1,+\infty). \end{cases}$$

Зрозуміло, що існує безліч розв'язків для $k=1.$

18. ***Рівень життя та політичні технології.***

Політтехнологи президента країни Олімпія отримали завдання переконати виборців щодо монотонного покращення ситуації в країні впродовж останніх 5 років його перебування при владі. Для цього політтехнологам надали заповнену натуральними числами таблицю розміром 3×5 *з економічними показниками* P,Q,R *за останні 5 років. Політтехнологи мають право будь-які числа таблиці (у тому числі – жодного або ж усі) збільшити на одиницю, після чого скласти інтегральний показник* $aP+bQ+cR,$ *обравши дійсні* *коефіцієнти* a, b, c *на свій розсуд. Чи завжди вони зможуть виконати поставлене завдання, тобто зробити так, щоб вигаданий ними інтегральний показник за останні 5 років щороку зростав?*

Не завжди. Нехай отримана політтехнологом таблиця має вигляд

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5

Тоді утворені ним інтегральні показники за 5 років будуть такими:

$$I_k = aP_k + bQ_k + cR_k,\ k = \overline{1,5}.$$

Для їх щорічного зростання необхідно, щоб всі прирости $\Delta_k = I_{k+1} - I_k,\ k = \overline{1,4},$ були додатними. Позначимо: $u_k = P_{k+1} - P_k,\quad v_k = Q_{k+1} - Q_k,\quad w_k = R_{k+1} - R_k,\quad k = \overline{1,4}.$ Тоді $\Delta_k = au_k + bv_k + cw_k = (a,b,c)\cdot(u_k, v_k, w_k),\ k = \overline{1,4}.$ Таким чином, додатними повинні бути скалярні добутки векторів (a,b,c) та $(u_k, v_k, w_k),\ k = \overline{1,4}.$ А отже, вектор (a,b,c) має утворювати гострий кут з кожним із векторів $(u_k, v_k, w_k),\ k = \overline{1,4}.$

Покажемо, що досягти цього вдасться не завжди. Нехай координати таких векторів задані таблицею

k	1	2	3	4
u_k	n	n	$-n$	$-n$
v_k	n	$-n$	n	$-n$
w_k	n	$-n$	$-n$	n

Геометрично це означає, що вказані вектори виходять з центра O правильного тетраедра до чотирьох його вершин $A, B, C, D.$ Але, яким би не був вектор (a,b,c) з початком у точці $O,$ він буде напрямлений в один з чотирьох однакових тетраедрів $OABC,$ $OABD, OACD, OBCD,$ а отже, утворить тупий кут принаймні з одним із векторів $(u_k, v_k, w_k).$ Не допоможе політтехнологу і право збільшувати окремі показники на одиницю, бо при достатньо великих значеннях $n \in N$ в отриманому при цьому тетраедрі $A_1B_1C_1D_1$ кути між векторами $OA_1,\ OB_1,\ OC_1,\ OD_1$ мало відрізнятимуться від кутів між векторами $OA,\ OB,\ OC,\ OD.$ Тому кут між будь-яким вектором (a,b,c) і принаймні одним з векторів $OA_1,\ OB_1,\ OC_1,\ OD_1$ виявиться тупим.