Міністерство освіти і науки України
Прикарпатський національний університет
імені Василя Стефаника

Василишин Т. В., Гой Т. П., Федак І. В.

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник
для студентів вищих навчальних закладів
напрямів підготовки «математика», «прикладна математика»

Івано-Франківськ
2014

УДК 517.94
ББК 22.161.6
Ф75

Рекомендовано Вченою радою Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника як навчальний посібник для студентів напрямів підготовки «математика», «прикладна математика» (*протокол №12 від 26 грудня 2013 р.*)

Рецензенти:

Кукуш О. Г., доктор фізико-математичних наук, професор (Київський національний університет ім. Тараса Шевченка),

Мойсишин В. М., доктор технічних наук, професор (Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу),

Черевко І. М., доктор фізико-математичних наук, професор (Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича).

Василишин Т. В.

Ф75 Інтегральні рівняння : навчальний посібник / Т. В. Василишин, Т. П. Гой, І. В. Федак. – Івано-Франківськ : Сімик, 2014. – 222 с.

Навчальний посібник написаний відповідно до програми зі спеціального курсу «Інтегральні рівняння» для студентів вищих навчальних закладів III–IV рівнів акредитації, які навчаються за напрямами підготовки «математика», «прикладна математика».

Посібник містить основні методи точного та наближеного розв’язування лінійних інтегральних рівнянь, задачі для самостійного розв’язування, тестові завдання для контролю знань, приклади розв’язування інтегральних рівнянь за допомогою системи комп’ютерної алгебри Mathematica.

УДК 517.94
ББК 22.161.6

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Інтегральні рівняння та методи їх дослідження широко використовуються у різних галузях і розділах сучасної науки й техніки, наприклад, у теорії пружності, теорії пластичності, гідродинаміці, теорії керування, біомеханіці, економіці, медицині. Саме тому теорія інтегральних рівнянь займає важливе місце у системі підготовки фахівців з математики, прикладної математики, фізики, механіки, електроніки, матеріалознавства тощо.

Пропонований навчальний посібник охоплює основну частину університетської програми з навчальної дисципліни «Інтегральні рівняння» для студентів напрямів підготовки «математика», «прикладна математика», але може бути використаний для студентів інших фізико-математичних напрямів підготовки, а також у інженерно-технічних вищих навчальних закладах.

Метою посібника є ознайомлення студентів з основними поняттями, твердженнями, методами та застосуваннями сучасної теорії інтегральних рівнянь, сприяння глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу за допомогою розв'язаних прикладів і задач різного рівня складності, підготовка студентів до самостійної роботи з науковою літературою.

Посібник складається з дев'яти розділів. Матеріал охоплює основні точні та наближені методи розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерри, інтегральні рівняння з виродженим ядром, ітераційні, апроксимаційні та проекційні методи розв'язування інтегральних рівнянь, симетричні інтегральні рівняння, операційні методи розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри.

У першому розділі наведені основні поняття та твердження теорії інтегральних рівнянь, дається коротка класифікація інтегральних рівнянь, характеризуються області їх застосування.

У другому розділі представлені основні елементи функціонального аналізу, які мають широке застосування у теорії інтегральних рівнянь: означення та властивості метричних, нормованих та евклідових просторів, принцип стискаючих відображень, лінійні оператори, обернені оператори та їх властивості, самоспряжені оператори тощо.

Третій розділ посібника присвячений розв'язуванню лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерри другого роду методом ітерованих ядер.

У четвертому розділі вивчаються інтегральні рівняння з виродженим ядром. Наведені теореми Фредгольма, метод зведення довільних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду до рівнянь з виродженим ядром, метод наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду методом вироджених ядер.

У п'ятому розділі викладені ітераційні методи розв'язування інтегральних рівнянь другого роду. Зокрема, обґрунтовується застосування принципу стискаючих відображень до лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерри другого роду, метод простої ітерації наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь другого роду та метод Положія наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

У розділі 6 розглядаються апроксимаційні та проекційні методи розв'язування лінійних інтегральних рівнянь другого роду, зокрема, метод квадратур для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма і Вольтерри другого роду, методи найменших квадратів, колокації, Гальоркіна – Петрова, Бубнова – Гальоркіна.

Сьомий розділ посібника присвячений симетричним інтегральним рівняння та звідним до них.

У розділі 8 вивчаються лінійні інтегральні рівняння Фредгольма і Вольтерри першого роду, зокрема, обґрунтовується метод квадратур для рівнянь Вольтерри першого роду.

Дев'ятий розділ присвячений операційним методам (на основі перетворення Лапласа) розв'язування інтегральних рівнянь

Вольтерри типу згортки, систем таких рівнянь і лінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу згортки.

Для кращого розуміння важливих понять, теорем, методів у всіх розділах наведені приклади розв’язування конкретних задач.

Кожен розділ супроводжується питаннями для контролю й самоконтролю засвоєння матеріалу та вправами, які у поєднанні з іншими збірниками можуть бути основою для проведення практичних занять з певної теми. Кінець розв’язаних прикладів і задач позначається символом ●, доведення теорем – символом ■.

У додатку 2 для майже всіх розв’язаних у відповідних темах прикладів наводяться їх розв’язання з допомогою пакета символьних обчислень Mathematica. З основами роботи з ним читач може ознайомитись у додатку 1.

У списку літератури читач знайде перелік літературних джерел, у яких питання, висвітлені у цьому посібнику, викладені по-іншому або більш повно.

Автори висловлюють щиру вдячність рецензентам професорам Кукушу О. Г., Мойсишину В. М., Черевку І. М. за корисні критичні зауваження й методичні поради, які безумовно сприяли покращенню якості рукопису.

Усі критичні зауваження, рекомендації й побажання з вдячністю будуть сприйняті авторами та враховані для покращення змісту наступних видань посібника. Інформацію такого роду просимо надсилати на електронні пошти авторів:

taras_vasylyshyn@mail.ru (Василишин Т. В.),

tarasgoy@yahoo.com (Гой Т. П.),

fedak_ivan@rambler.ru (Федак І. В.).

Розділ 1
ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА ЗАДАЧІ, ЯКІ ПРИВОДЯТЬ ДО НИХ

§ 1.1. Означення та класифікація інтегральних рівнянь

Інтегральним рівнянням зазвичай називають рівняння, яке містить шукану функцію під знаком інтеграла. Це означення не зовсім коректне, бо не вказує, які інші дії можна виконувати з невідомою функцією. Проте зараз ми обмежимося цією загальною характеристикою інтегральних рівнянь, а надалі детальніше сформулюємо означення конкретних типів таких рівнянь.

Розв'язком інтегрального рівняння називають функцію з наперед заданого класу функцій, яка перетворює це рівняння у тотожність. Наприклад, розв'язком інтегрального рівняння $y(x) = \int_a^x y'(s)ds + y(a)$ є будь-яка неперервно диференційовна в околі точки $x = a$ функція $y(x)$.

Лінійним інтегральним рівнянням називають інтегральне рівняння, в яке невідома функція входить лінійно.

Одним з найважливіших класів таких рівнянь є ***лінійні інтегральні рівняння Фредгольма***. Серед них виділяють рівняння Фредгольма *першого роду*

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x) \tag{1.1}$$

та рівняння Фредгольма *другого роду*

$$y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x), \tag{1.2}$$

де $y(x)$ – шукана функція, $K(x,s)$ – задана у квадраті

$$Q = \{(x,s) : a \le x \le b,\ a \le s \le b\}$$

функція, яку називають ***ядром*** рівняння, $f(x)$ – задана на проміжку $[a,b]$ функція, яку називають ***вільним членом*** рівняння, λ – ***параметр*** (дійсний або комплексний). При цьому числа a, b можуть бути й невласними, а проміжок інтегрування – нескінченним.

Надалі вважатимемо, що функція $K(x,s)$ є неперервною у квадраті Q або задовольняє умову

$$\iint_Q |K(x,s)|^2 dxds < \infty, \tag{1.3}$$

а функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$ або $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$ Ядро, яке задовольняє умову (1.3), називають ***фредгольмовим***.

Якщо у рівняннях (1.1), (1.2) $f(x) \equiv 0,$ то ці рівняння називають ***однорідними***, інакше – ***неоднорідними***.

Ще одним важливим класом лінійних інтегральних рівнянь є ***лінійні інтегральні рівняння Вольтерри***:

$$\int_a^x K(x,s)y(s)\,ds = f(x), \quad a \le x \le b,$$

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)\,ds + f(x), \quad a \le x \le b,$$

першого та *другого роду* відповідно, ядра яких $K(x,s)$ неперервні у трикутнику $\Delta = \{(x,s) : a \le s \le x \le b\}$ або задовольняють умову

$$\iint_\Delta |K(x,s)|^2 dx\,ds < \infty.$$

Рівняння Вольтерри можна розглядати як окремий випадок рівняння Фредгольма з ядром

$$\tilde{K}(x,s) = \begin{cases} K(x,s), & a \le s \le x, \\ 0, & x < s \le b. \end{cases}$$

Але у зв'язку з низкою їх специфічних властивостей такі рівняння доцільно вивчати окремо.

Відповідні інтегральні рівняння можна розглядати й у більш загальному вигляді, коли інтегрування здійснюється не по відрізку прямої, а по деякій області $\Omega \subset \mathbf{R}^n$:

$$y(M) = \int_\Omega K(M,P)\,y(P)\,d\omega_p + f(M), \quad M,P \in \Omega,$$

$$\int_\Omega K(M,P)\,y(P)\,d\omega_p = f(M), \quad M,P \in \Omega.$$

Нелінійним інтегральним рівнянням називають інтегральне рівняння, в яке шукана функція входить нелінійно. Нелінійні інтегральні рівняння дуже різноманітні, тому провести їх повну класифікацію практично неможливо. Виділимо три найпоширеніші класи таких рівнянь:

$$\int_a^b K\left(x,s,y(s)\right)ds = f(x), \qquad y(x) = \lambda\int_a^b K\left(x,s,y(s)\right)ds + f(x) \;-$$

інтегральні рівняння Урисона *першого* та *другого роду* відповідно;

$$\int_a^b K(x,s)F\left(s,y(s)\right)ds = f(x),$$

$$y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)F\left(s,y(s)\right)ds + f(x) \;-$$

інтегральні рівняння Гаммерштейна *першого* та *другого роду* відповідно;

$$\int_a^x K\left(x,s,y(s)\right)ds = f(x), \;\; a \le x \le b,$$

$$y(x) = \lambda\int_a^x K\left(x,s,y(s)\right)ds + f(x), \;\;\; a \le x \le b, \;-$$

нелінійні інтегральні рівняння Вольтерри *першого* та *другого роду* відповідно.

При цьому функції $K(x,s,y)$, $F(s,y)$, як правило, вважають неперервними, а $K(x,s)$ – фредгольмовим ядром.

Якщо $K\left(x,s,y(s)\right) \equiv K(x,s)y(s)$ або $F\left(s,y(s)\right) \equiv y(s)$, то лінійні інтегральні рівняння Фредгольма можна розглядати як окремий випадок рівнянь Урисона чи Гаммерштейна відповідно.

Інтегральне рівняння, в якому шукана функція знаходиться також під знаком похідної, називають ***інтегро-диференціальним рівнянням***. Зокрема, ***лінійним інтегро-диференціальним рівнянням*** називають рівняння вигляду

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)y'(x) + a_n(x)y(x) +$$
$$+\sum_{m=0}^{p}\int_{x_0}^{x} K_m(x,s)y^{(m)}(s)\,ds = f(x), \tag{1.4}$$

де $a_j(x),\ j=0,1,...,n,\ K_m(x,s),\ m=0,1,...,p,$ і $f(x)$ – відомі функції, $y(x)$ – шукана функція.

Як і для звичайних диференціальних рівнянь, на розв'язок інтегро-диференціального рівняння (1.4) часто накладають ***початкові умови***:

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

Крім окремих інтегральних рівнянь, розглядають також їх системи. Зокрема, ***система лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма*** другого роду має вигляд

$$y_i(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_a^b K_{ij}(x,s)y_j(s)\,ds+f_i(x),\ \ i=1,2,...,n. \tag{1.5}$$

При цьому вважатимемо, що всі ядра $K_{ij}(x,s)$ та вільні члени $f_i(x)$ задовольняють умови

$$\iint\limits_Q |K_{ij}(x,s)|^2\,dxds<\infty,\quad \int_a^b |f_i(x)|^2dx<\infty,\quad i,j=1,2,...,n,$$

де $Q=\{(x,s): a\le x\le b,\ a\le s\le b\}.$

Розв'язок $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ системи (1.5) шукаємо у класі інтегрованих з квадратом на відрізку $[a,b]$ функцій, тобто

$$\int_a^b |y_j(x)|^2dx<\infty,\quad j=1,...,n.$$

Покажемо, що систему інтегральних рівнянь (1.5) можна звести до одного інтегрального рівняння Фредгольма. Для цього на відрізку $a\le x\le a+n(b-a)$ означимо функції

$$Y(x)=y_i\left(x-(i-1)(b-a)\right),$$
$$F(x)=f_i\left(x-(i-1)(b-a)\right),$$

де

$$a+(i-1)(b-a)\le x<a+i(b-a),\ \ i=1,2,...,n.$$

Аналогічно, у квадраті

$$Q^*=\{(x,s): a\le x\le a+n(b-a),\ \ a\le s\le a+n(b-a)\}$$

означимо ядро

$$K(x,s)=K_{ij}\left(x-(i-1)(b-a),\ s-(j-1)(b-a)\right),$$

де

$$a+(i-1)(b-a)\le x<a+i(b-a),\quad i=1,2,\dots,n,$$
$$a+(j-1)(b-a)\le s<a+j(b-a),\quad j=1,2,\dots,n.$$

Тепер систему (1.5) можемо записати у вигляді одного інтегрального рівняння

$$Y(x)=\lambda\cdot\int\limits_a^{a+n(b-a)}K(x,s)Y(s)\,ds+F(x).\tag{1.6}$$

При цьому

$$\iint\limits_{Q^*}|K(x,s)|^2dxds=\sum_{i,j=1}^{n}\iint\limits_{Q}|K_{ij}(x,s)|^2dxds<\infty,$$

$$\int\limits_a^{a+n(b-a)}|F(x)|^2dx=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_a^b|f_i(x)|^2dx<\infty.$$

Розв'язавши рівняння (1.6), отримаємо також розв'язок системи рівнянь (1.5)

$$y_i(x)=Y\big(x+(i-1)(b-a)\big),\quad a\le x\le b,\quad i=1,2,\dots,n.$$

Аналогічно, до одного інтегрального рівняння можна звести систему лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_a^b K_{ij}(x,s)y_j(s)ds=f_i(x),\quad i=1,2,\dots,n.$$

§ 1.2. Математичні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь

1. Однією з перших задач, яка привела до інтегральних рівнянь, була задача про відшукання функції $f(x)$ за її перетворенням Фур'є

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{ixy}f(y)dy,\tag{1.7}$$

де $i=\sqrt{-1}$ – комплексна одиниця. Розв'язок $f(y)$ рівняння (1.7) у 1811 р. отримав французький математик Ж. Фур'є як

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixy}F(x)dx.\tag{1.8}$$

Можна також вважати, що формула (1.7) визначає розв'язок інтегрального рівняння (1.8), в якому $f(y)$ – задана, а $F(x)$ – шукана функція.

2. До інтегрального рівняння (взагалі, нелінійного)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) dt \tag{1.9}$$

зводиться задача Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

де $f(x, y)$ – неперервна функція у деякому прямокутнику з центром (x_0, y_0). Інтегральне рівняння (1.9) є окремим випадком нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду.

Аналогічно, задачу Коші для диференціального рівняння n-го порядку, розв'язаного відносно старшої похідної,

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \ \dots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

можна звести до системи нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду.

3. Розглянемо задачу Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку:

$$\left.\begin{aligned} y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_2(x) y(x) = F(x), \\ y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Позначимо

$$y''(x) = z(x).$$

Тоді, враховуючи початкові умови, послідовно одержуємо:

$$y'(x) = \int_0^x z(s)\, ds + C_1,$$

$$y(x) = \int_0^x \left(\int_0^x z(s)\, ds + C_1 \right) ds = \int_0^x (x - s) z(s)\, ds + C_1 x + C_0.$$

Отже, задачу Коші (1.10) можемо записати у вигляді

$$z(x) + a_1(x) \left(\int_0^x z(s)\, ds + C_1 \right) + a_2(x) \left(\int_0^x (x - s) z(s)\, ds + C_1 x + C_0 \right) = F(x).$$

Якщо позначити

$$K(x,s) = -a_1(x) - a_2(x)(x-s),$$

$$f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x),$$

то маємо лінійне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$z(x) = \int_0^x K(x,s)\, z(s)\, ds + f(x).$$

Аналогічно, до лінійного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду можна звести задачу Коші для лінійного диференціального рівняння довільного порядку. При цьому потрібно скористатись ***формулою Коші***

$$\underbrace{\int_0^x \ldots \int_0^x}_{n} \varphi(s) ds \ldots ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-s)^{n-1} \varphi(s)\, ds.$$

4. Розглянемо задачу Коші для лінійного диференціального рівняння третього порядку:

$$\left.\begin{array}{c} y'''(x) + a_1(x) y''(x) + a_2(x) y'(x) + a_3(x) y(x) = F(x), \\ y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1, \quad y''(0) = C_2, \end{array}\right\} \tag{1.11}$$

Якщо позначити $y''(x) = z(x)$ і врахувати початкові умови, то з (1.11) послідовно одержуємо:

$$y'(x) = \int_0^x z(s)\, ds + C_1,$$

$$y(x) = \int_0^x \left(\int_0^x z(s)\, ds + C_1 \right) ds = \int_0^x (x-s) z(s)\, ds + C_1 x + C_0.$$

Оскільки

$$y'''(x) = z'(x),$$

то задачу (1.11) можемо записати як

$$z'(x) + a_1(x) z(x) + a_2(x) \left(\int_0^x z(s)\, ds + C_1 \right) +$$

$$+ a_3(x) \left(\int_0^x (x-s) z(s)\, ds + C_1 x + C_0 \right) = F(x).$$

Позначаючи

$$K(x,s) = a_2(x) + a_3(x)(x-s),$$

$$f(x) = F(x) - C_1 a_2(x) - C_1 x a_3(x) - C_0 a_3(x),$$

одержуємо лінійне інтегро-диференціальне рівняння

$$z'(x) + a_1(x) z(x) + \int_0^x K(x,s) z(s)\, ds = f(x)$$

відносно функції $z(x)$, яка задовольняє початкову умову $z(0) = C_2$.

Зауважимо, що з допомогою заміни

$$y'(x) = z(x)$$

задачу (1.11) зводимо до лінійного інтегро-диференціального рівняння

$$z''(x) + a_1(x) z'(x) + a_2(x) z(x) + \int_0^x a_3(x) z(s)\, ds = F(x) - C_0 a_3(x)$$

з початковими умовами

$$z(0) = C_1,\ z'(0) = C_2.$$

§ 1.3. Прикладні задачі, які приводять до інтегральних рівнянь

1. У 1823 р., узагальнюючи задачу про таутохрону – криву, ковзаючи по якій без тертя, тіло досягає свого найнижчого положення за один і той же час, незалежно від початкового положення, – Н. Абель отримав рівняння

$$\int_0^x \frac{y(s)}{\sqrt{x-s}}\, ds = f(x).$$

Це рівняння є окремим випадком лінійного інтегрального рівняння Вольтерри першого роду. Зокрема, якщо $f(x) \equiv \text{const}$, то шуканою кривою – розв'язком ***рівняння Абеля*** – є циклоїда.

Задача Абеля стала першою фізичною задачею, яка привела до необхідності розгляду інтегральних рівнянь.

2. Крайову задачу про вимушені коливання маятника

$$y''(x) + \alpha^2 \sin y(x) = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0$$

можна записати з допомогою інтегрального рівняння

$$y(x) + \int_0^1 T(x,s)\left(F(s) - \alpha^2 \sin y(s)\right) ds = 0,$$

де $F(x)$ – задана функція, α – деяка стала. У цьому нелінійному інтегральному рівнянні Гаммерштейна ядром є

$$T(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \le x \le s, \\ s(1-x), & s \le x \le 1. \end{cases}$$

3. Розглянемо задачу про малі коливання струни. Нехай маємо пружну струну завдовжки l, яка без опору змінює свою форму, але для збільшення її довжини на Δl потрібно прикласти силу $k \cdot \Delta l$, де k – деяка стала (закон Гука).

Нехай кінці струни закріплені у точках A і B (рис. 1). Якщо на струну діє лише горизонтальна сила T, значно більша за інші сили, які розглядатимемо, то початкове положення струни збігатиметься з відрізком AB.

Припустимо тепер, що у точці A_0 з абсцисою $x = s$ до струни прикладена вертикальна сила P, під дією якої струна набула форму ламаної AC_0B.

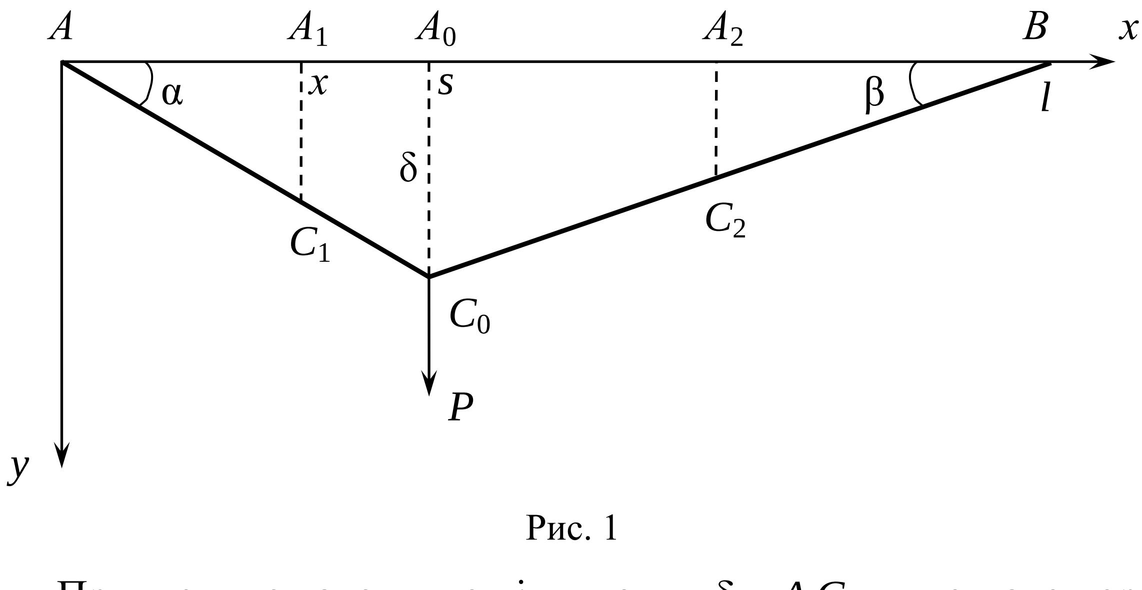

Рис. 1

Припустимо також, що відхилення $\delta = A_0C_0$ дуже мале порівняно з AA_0 та A_0B, а горизонтальний натяг струни залишився рівним T і під дією сили P. Проектуючи на вісь y сили натягу струни у точці C_0, з умови рівноваги отримуємо рівність

$$T\sin\alpha + T\sin\beta = P.$$

Оскільки кут α малий, то покладаючи наближено

$$\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{\delta}{s}, \qquad \sin\beta \approx \operatorname{tg}\beta = \frac{\delta}{l-s},$$

маємо

$$T\frac{\delta}{s}+T\frac{\delta}{l-s}=P.$$

Отже,

$$\delta(s)=P\frac{(l-s)s}{Tl}. \tag{1.12}$$

Знайдемо тепер відхилення $y(x)$ струни від горизонтального положення у точці з абсцисою x. З рівності (1.12), використовуючи подібність трикутників AA_1C_1, AA_0C_0 та BA_2C_2, BA_0C_0, отримуємо, що

$$y(x)=P\cdot G(x,s),$$

де

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{x(l-s)}{Tl}, & 0\le x\le s,\\[2mm] \dfrac{(l-x)s}{Tl}, & s\le x\le l.\end{cases}$$

Якщо сила P, яка діє на струну, має неперервно розподілену щільність $p(s)$, то до ділянки струни між точками s та $s+\Delta s$ буде прикладена сила, яка наближено дорівнює $p(s)\Delta s$. Вона викликатиме відхилення струни на величину $G(x,s)\,p(s)\Delta s$.

За принципом суперпозиції відхилення, викликані такими елементарними силами, додаються, тобто

$$y(x)\approx\sum_{s}G(x,s)p(s)\Delta s.$$

Звідси, після граничного переходу при $\Delta s\to 0$, одержуємо рівність

$$y(x)=\int_0^l G(x,s)p(s)\,ds. \tag{1.13}$$

Функція $G(x,s)$, яку називають ***функцією впливу***, характеризує вплив сили, прикладеної до струни у точці з абсцисою s, на відхилення струни у точці з абсцисою x.

Якщо в (1.13) вважати відхилення $y(x)$ відомим, то (1.13) є інтегральним рівняння Фредгольма першого роду відносно функції $p(s)$.

Якщо на струну діє періодична сила, щільність якої задана та змінюється з часом t за законом $p(s)\sin\omega t,$ де $\omega>0,$ то вважатимемо, що струна здійснює періодичні коливання за законом

$$y=y(x)\sin\omega t.$$

Крім того, припускаємо, що на ділянку струни між точками s та $s+\Delta s$ разом з силою $p(s)\sin\omega t\Delta s$ діє також сила інерції

$$-\rho(s)\Delta s\frac{d^2y}{dt^2}=\rho(s)y(s)\,\omega^2\sin\omega t\cdot\Delta s.$$

Таким чином, рівність (1.13) можна записати у вигляді

$$y(x)\sin\omega t=\int_0^l G(x,s)\Big(p(s)\sin\omega t+\rho(s)y(s)\omega^2\sin\omega t\Big)ds.$$

Якщо скоротити на $\sin\omega t$ і позначити

$$f(x)=\int_0^l G(x,s)p(s)\,ds,$$

$$K(x,s)=G(x,s)\rho(s),\qquad \lambda=\omega^2,$$

то отримуємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x)=\lambda\int_0^l K(x,s)y(s)ds+f(x)$$

відносно шуканої функції $y(x)$.

4. До інтегральних рівнянь приводять не лише задачі з механіки, а й проблеми з інших галузей науки. Наприклад, при розв'язуванні задачі з математичної екології про поширення епідемій виникає інтегральне рівняння

$$y(x)=\left(P(x)-\int_{-\infty}^{x}A(x-s)y(s)ds\right)\int_{-\infty}^{x}a(x-s)y(s)ds,$$

яке є ще недостатньо дослідженим.

Рекомендована література: [1, с. 9–18], [3, с. 9–26], [5, с. 306–314], [6, с. 266–277], [8, с. 7–14], [9, с. 8–18], [10, с. 9–13].

Питання до розділу 1

1. Що розуміють під терміном «інтегральне рівняння»?
2. Яку функцію називають розв'язком інтегрального рівняння?

3. Які інтегральні рівняння називають лінійними?
4. Наведіть приклади:
   а) лінійного однорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду;
   б) лінійного інтегрального рівняння Вольтерри першого роду;
   в) нелінійного інтегрального рівняння;
   г) лінійного інтегро-диференціального рівняння;
   ґ) системи лінійних інтегральних рівнянь.
5. Яке ядро інтегрального рівняння вважають фредгольмовим?
6. Наведіть приклади математичних задач, які приводять до інтегральних чи інтегро-диференціальних рівнянь?
7. Наведіть приклади фізичних задач, які приводять до інтегральних рівнянь.
8. Яка фізична проблема першою привела до інтегрального рівняння?
9. Чи обмежуються застосування інтегральних рівнянь лише проблемами математики та фізики?
10. Навіщо, на вашу думку, окремо розглядати лінійні інтегральні рівняння Вольтерри, якщо вони є окремим випадком відповідних інтегральних рівнянь Фредгольма?

Вправи до розділу 1

1. Визначте, до яких класів належать наведені інтегральні рівняння:

   а) $y(x) = -\int_0^2 xsy(s)\,ds + x;$ б) $y(x) = \int_0^x e^{x-s} y(s)\,ds;$

   в) $\int_0^1 (x-s)\sin y(s)\,ds = 2x;$ г) $y(x) + \int_0^x \left(x - s + \sin y(s)\right)^2 ds = 1.$

2. Перевірте, чи є задані функції $y(x)$ розв’язками відповідних інтегральних рівнянь:

   а) $y(x) = e^{2x}, \quad y(x) = \int_0^x e^{x-s} y(s)\,ds;$

   б) $y(x) = \dfrac{2\sin x}{2-\lambda}, \lambda \neq 2, \quad y(x) = \lambda \int_0^{\pi/2} \sin x \cos s\, y(s) ds + \sin x;$

в) $y(x)=\cos x-\sin x,\quad \int\limits_0^x e^{x-s}y(s)\,ds=\sin x;$

г) $y(x)=1,\quad y(x)+3\int\limits_0^x \left(x-s+y(s)\right)^2 ds=(x+1)^3.$

3. Перевірте, чи є розв'язком інтегро-диференціального рівняння $y(x)=\int\limits_0^x y'(s)\,ds+1$ функція:

а) $y(x)=x$; б) $y(x)=x+1$.

4. Доведіть, що функція $y(x)=e^x-1$ є розв'язком інтегро-диференціального рівняння

$$y''(x)+\int\limits_0^x e^{2(x-s)}y'(s)\,ds=e^{2x},\ \ y(0)=1,\ y'(0)=1.$$

5. Зведіть задачі Коші до інтегральних рівнянь та інтегро-диференціальних рівнянь:

а) $y''(x)+(1-x)y'(x)+(x+3)y(x)=4(x-5),$
$y(0)=1,\ \ y'(0)=-2;$

б) $y'''(x)-y''(x)+xy'(x)+\sin x\cdot y(x)=2\cos x,$
$y(0)=1,\ \ y'(0)=2,\ \ y''(0)=0.$

6. Зведіть систему лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду до одного інтегрального рівняння:

$$\begin{cases} y_1(x)=\int\limits_0^1 xy_1(s)\,ds+\int\limits_0^1 sy_2(s)\,ds+x^2, \\ y_2(x)=\int\limits_0^1 xsy_1(s)\,ds+\int\limits_0^1 y_2(s)\,ds-x. \end{cases}$$

Розділ 2
ЕЛЕМЕНТИ ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ В ТЕОРІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для вивчення багатьох питань теорії інтегральних рівнянь зручно використовувати апарат функціонального аналізу, основні елементи якого викладені у цьому розділі.

§ 2.1. Метричні простори. Принцип стискаючих відображень

Нехай X – множина елементів довільної природи. Якщо для будь-яких елементів $x \in X$, $y \in X$ визначена дійсна функція $\rho(x, y)$, яка задовольняє аксіоми:

1) $\rho(x, y) \geq 0$, причому $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*аксіома симетрії*);

3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (*нерівність трикутника*),

то пару (X, ρ) називають ***метричним простором***, а функцію $\rho(x, y)$ – ***метрикою*** або ***відстанню*** між елементами x, y.

У теорії інтегральних рівнянь важливу роль відіграють простір $C[a,b]$ неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій з метрикою

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$$

і простір $L_2[a,b]$ функцій, квадрати яких інтегровні на $[a,b]$ за Лебегом, з метрикою

$$\rho(x, y) = \sqrt{\int_a^b \left(x(t) - y(t)\right)^2 dt}.$$

Точку x_0 називають ***границею послідовності*** (x_n) точок метричного простору (X, ρ) якщо $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x_0) = 0.$

У просторі $C[a,b]$ збіжність послідовності (x_n) до точки x_0 є ***рівномірною***, а у просторі $L_2[a,b]$ її називають ***збіжністю у середньому квадратичному***.

Послідовність (x_n) точок метричного простору (X, ρ) називають ***фундаментальною***, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$, $m > N$

$$\rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Теорема 2.1. *Якщо послідовність* (x_n) *є збіжною, то вона фундаментальна.*

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$, $m > N$

$$\rho(x_n, x_0) < \varepsilon/2, \qquad \rho(x_m, x_0) < \varepsilon/2.$$

Звідси за нерівністю трикутника

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x_0) + \rho(x_m, x_0) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

для всіх $n > N$, $m > N$. ■

Обернене твердження до теореми 2.1 справджується не у кожному метричному просторі.

Теорема 2.2. *Якщо послідовність* (x_n) *є фундаментальною, а деяка її підпослідовність* (x_{n_k}) *збігається до* x_0, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Доведення. З умов теореми випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що $\rho(x_{n_k}, x_0) < \varepsilon/2$, $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ для всіх $n_k > N$, $n > N$, $m > N$. Покладаючи $m = n_k$, за нерівністю трикутника для всіх $n > N$ одержуємо:

$$\rho(x_n, x_0) \le \rho(x_n, x_m) + \rho(x_{m=n_k}, x_0) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad ■$$

Метричний простір, в якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називають ***повним метричним простором***. Зокрема, повними є простори $C[a,b]$ і $L_2[a,b]$, причому повнота першого з них випливає з критерію Коші рівномірної збіжності.

Розглянемо тепер два метричні простори (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) і відображення A, яке кожному елементу $x \in X$ зіставляє деякий елемент $y = Ax \in Y$. Це відображення називають ***неперервним у точці*** $x_0 \in X$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх $x \in X$ таких, що $\rho_X(x, x_0) < \delta$, виконується нерівність $\rho_Y(Ax, Ax_0) < \varepsilon$.

Якщо відображення A неперервне в усіх точках множини X, то його називають ***неперервним відображенням***.

Відображення $A: X \to X$ метричного простору (X, ρ) самого в себе називають ***стискаючим***, якщо існує таке число $\alpha < 1$, що для будь-яких точок $x, y \in X$ виконується нерівність

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y). \qquad (2.1)$$

З нерівності

$$\rho(Ax, Ax_0) \le \alpha\rho(x, x_0) \le \rho(x, x_0)$$

випливає, що кожне стискаюче відображення є неперервним.

Якщо $Ax = x$, то точку x називають ***нерухомою точкою*** відображення A.

Теорема 2.3 (*Банаха*). *У повному метричному просторі кожне стискаюче відображення має єдину нерухому точку.*

Доведення. Нехай x_0 – довільна точка повного метричного простору (X, ρ) і $A: X \to X$ – стискаюче відображення.

Розглянемо послідовність точок

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1, \quad \dots, \quad x_n = Ax_{n-1}, \quad \dots . \qquad (2.2)$$

Вона є фундаментальною, бо, вважаючи, що $m > n$,

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(Ax_{n-1}, Ax_{m-1}) \le \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \le \dots \le \alpha^n \rho(x_0, x_{m-n}) \le$$

$$\le \alpha^n \left(\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \dots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\right) \le$$

$$\le \alpha^n \left(1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1}\right)\rho(x_0, x_1) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

З повноти простору (X, ρ) випливає, що послідовність (2.2) має границю

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

а оскільки відображення A неперервне, то

$$Ax = A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Отже, x – нерухома точка відображення A. Вона єдина, бо з рівностей $Ax = x$ та $Ay = y$ випливає, що

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y),$$

а оскільки $\alpha < 1$, то $\rho(x, y) = 0$, тобто $y = x$. ■

Теорему Банаха також називають ***принципом стискаючих відображень***. З її доведення випливає не тільки існування та єдиність нерухомої точки, але й практичний спосіб її знаходження.

Якщо A – неперервне відображення, то для існування та єдиності нерухомої точки у повному метричному просторі достатньо вимагати, щоб деякий степінь A був стискаючим відображенням.

§ 2.2. Лінійні нормовані та евклідові простори

Непорожню множину L називають ***лінійним простором***, якщо у ній введені операції додавання та множення на число, причому для довільних елементів x, y, z цієї множини виконуються умови:

1. $x+y=y+x$;
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$;
3. $\exists\, 0: x+0=x$;
4. $\exists\, (-x): x+(-x)=0$;
5. $1\cdot x=x$;
6. $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$;
7. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$;
8. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Якщо у просторі L введено операцію множення на комплексні числа, то його називають ***комплексним лінійним простором***.

Зокрема, лінійні простори утворюють множини неперервних та інтегровних з квадратом на відрізку $[a,b]$ функцій зі звичайними операціями додавання функцій і множення на число.

Елементи $x_1,x_2,\ldots,x_n$ лінійного простору L називають ***лінійно незалежними***, якщо рівність

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n=0$$

справджується лише тоді, коли $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$.

Нескінченну систему елементів лінійного простору L називають ***лінійно незалежною***, якщо кожна її скінченна підсистема є лінійно незалежною.

Якщо у просторі L можна вказати лінійно незалежну систему з довільної скінченної кількості елементів, то такий простір називають ***нескінченновимірним***. Такими, зокрема, є простори неперервних та інтегровних з квадратом на відрізку $[a,b]$ функцій.

Лінійний простір L називають ***нормованим простором***, якщо кожному елементу $x\in L$ зіставлене дійсне число $\|x\|$, яке задовольняє умови:

1. $\|x\|\ge 0$, причому $\|x\|=0 \;\Leftrightarrow\; x=0$;
2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$;

3. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

Число $\|x\|$ називають ***нормою*** елемента x.

Кожний нормований простір стає метричним, якщо покласти $\rho(x,y) = \|x-y\|$. Очевидно, що тоді $\|x\| = \rho(x,0)$. Враховуючи ці співвідношення, нормовані простори позначатимемо так само, як і відповідні їм метричні простори. Зокрема, у нормованих просторах $C[a,b]$ і $L_2[a,b]$ отримуємо відповідні формули для норм:

$$\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \quad \text{і} \quad \|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}.$$

Збіжність послідовності точок x_n нормованого простору до елемента x_0 цього простору визначають з умови

$$\|x_n - x_0\| \to 0.$$

Послідовність точок x_n нормованого простору називають ***фундаментальною***, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

для всіх чисел $n > N,\ m > N$.

Нормований простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називають ***банаховим простором***. Простори $C[a,b]$ і $L_2[a,b]$ є банаховими.

Якщо для довільних елементів x, y дійсного нормованого простору L виконується рівність

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$

то норму в L можна задати з допомогою скалярного добутку.

Скалярним добутком у дійсному лінійному просторі L називають дійснозначну функцію (x,y), яка визначена для кожної пари елементів $x, y \in L$ і задовольняє умови:

1. $(x,x) \ge 0$, причому $(x,x) = 0 \iff x = 0$;
2. $(x,y) = (y,x)$;
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$;
4. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.

Для комплексного лінійного простору L другу з аксіом скалярного добутку записують у вигляді $(x,y)=\overline{(y,x)},$ де число $\overline{(y,x)}$ – комплексно-спряжене до числа (y,x).

Лінійний простір із заданим у ньому скалярним добутком називають ***евклідовим*** простором. Повний відносно норми $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ евклідовий простір нескінченної вимірності називають ***гільбертовим***.

Важливими прикладами гільбертових просторів є простір $L_2[a,b]$ і комплексний простір $L_2[a,b]$ зі скалярними добутками

$$(x,y)=\int_a^b x(t)y(t)\,dt, \quad (x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

відповідно. Простір $C[a,b]$ не є евклідовим, бо його норму не можна задати через скалярний добуток.

Розглянемо при $x\neq 0,$ $\lambda\in\mathbf{R}$ невід'ємну квадратичну функцію

$$\varphi(\lambda)=(\lambda x-y,\lambda x-y)=\lambda^2(x,x)-2\lambda(x,y)+(y,y)=$$
$$=\|x\|^2\lambda^2-2(x,y)\lambda+\|y\|^2.$$

Оскільки дискримінант $D=\left(2(x,y)\right)^2-4\|x\|^2\|y\|^2\leq 0,$ то

$$|(x,y)|\leq\|x\|\cdot\|y\|. \qquad (2.3)$$

Нерівність (2.3) називають ***нерівністю Коші – Буняковського***. У просторі $L_2[a,b]$ вона набуває вигляду

$$\left|\int_a^b x(s)\,y(s)\,ds\right|\leq\sqrt{\int_a^b x^2(s)\,ds}\cdot\sqrt{\int_a^b y^2(s)\,ds}$$

і називається ***інтегральною нерівністю Коші – Буняковського***.

Враховуючи (2.3), вводять поняття ***кута*** між довільними ненульовими елементами x, y евклідового простору за формулою

$$\cos\varphi=\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}, \quad 0\leq\varphi\leq\pi.$$

Якщо $\cos\varphi=0,$ то елементи x, y називають ***ортогональними***. Умова ортогональності ненульових елементів x, y рівносильна рівності $(x,y)=0.$

Систему $\{x_\alpha\}$ ненульових елементів x_α евклідового простору E називають ***ортогональною***, якщо $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ для довільних α, β таких, що $\alpha \neq \beta$. Якщо, крім того, для кожного α виконується рівність $\|x_\alpha\| = 1$, то $\{x_\alpha\}$ називають ***ортогональною нормованою системою***. Зокрема, якщо система $\{x_\alpha\}$ є ортогональною, то $\{x_\alpha / \|x_\alpha\|\}$ – ортогональна нормована система.

Теорема 2.4. *Будь-яка ортогональна система* $\{x_\alpha\}$ *ненульових елементів евклідового простору E є лінійно незалежною.*

Доведення. Нехай
$$\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n} = 0.$$
Оскільки система $\{x_\alpha\}$ ортогональна, то
$$\left(\lambda_1 x_{\alpha_1} + \lambda_2 x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda_n x_{\alpha_n}, x_{\alpha_k}\right) = \lambda_k \left(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}\right) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$
Але $(x_{\alpha_k}, x_{\alpha_k}) \neq 0$, а тому $\lambda_k = 0$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, n$. Отже, система $\{x_\alpha\}$ є лінійно незалежною. ■

Нехай тепер E – нескінченновимірний евклідовий простір і $\{\varphi_k\}$ – довільна ортогональна нормована система елементів цього простору. Зіставимо кожному елементу $x \in E$ ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$
де $c_k = (x, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Цей ряд називають ***рядом Фур'є*** елемента x за системою $\{\varphi_k\}$. Для його ***коефіцієнтів Фур'є*** – чисел c_k – справджується ***нерівність Бесселя***
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|x\|^2.$$

Ортогональну нормовану систему $\{\varphi_k\} \subset E$ називають ***замкненою***, якщо для будь-якого $x \in E$ виконується ***рівність Парсеваля***
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2.$$
Замкненість системи $\{\varphi_k\}$ рівносильна тому, що для кожного $x \in E$ часткові суми ряду Фур'є елемента x збігаються до x.

У повному евклідовому просторі справджується й обернене твердження (***теорема Ріса – Фішера***): *якщо* $\{\varphi_k\}$ – *довільна ортогональна нормована система і числа* c_k *такі, що ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ *збігається, то існує єдиний елемент* $x \in E,$ *для якого*

$$c_k = (x, \varphi_k), \ \ k = 1, 2, \ldots, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = (x, x) = \|x\|^2.$$

§ 2.3. Лінійні оператори й обернені до них

Нехай L і L' – два нормовані простори. Відображення $A : L \to L',$ яке для довільних $x, y \in D(A) \subset L$ і сталих α, β задовольняє умову

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A x + \beta A y,$$

називають ***лінійним оператором***. При цьому вважатимемо, що область визначення $D(A)$ оператора A є лінійним підпростором простору $L.$

Оператор A називають ***неперервним у точці*** $x_0 \in L,$ якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0,$ що $\|Ax - Ax_0\| < \varepsilon$ для всіх $x \in D(A)$ таких, що $\|x - x_0\| < \delta.$ Якщо оператор неперервний у кожній точці $x \in D(A),$ то його називають ***неперервним оператором***. Для неперервності лінійного оператора достатньо, щоб він був неперервним принаймні в одній точці з $D(A).$

Лінійний оператор $A : L \to L',$ який визначений на всьому просторі $L,$ називають ***обмеженим***, якщо він кожну обмежену множину переводить в обмежену.

Кожний неперервний лінійний оператор є обмеженим. Для нормованих просторів справджується також обернене твердження. Зокрема, обмеженість лінійного оператора A у нормованому просторі рівносильна існуванню такої сталої $C,$ що $\|Ax\| \le C\|x\|$ для всіх $x \in L.$ Найменшу з таких сталих C називають ***нормою оператора*** A і позначають $\|A\|.$ Таким чином, $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|.$

Норму лінійного обмеженого оператора можна визначити також як

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| = \sup_{x\ne 0}\|Ax\|/\|x\|.$$

Для лінійних операторів природним чином вводяться операції додавання та множення на число:

$$(\alpha A)x = \alpha\cdot Ax, \quad (A+B)x = Ax + Bx, \quad x\in L.$$

При цьому сума та добуток на число лінійних неперервних операторів також є лінійними неперервними операторами. Отже, сукупність таких операторів утворює лінійний простір. Якщо простір L' є повним, то простір лінійних обмежених операторів з введеною вище нормою також є банаховим.

Корисним є введення ***добутку операторів*** A, B, які визначені та набувають значень у лінійному просторі L. Під цим добутком розуміють оператор $AB: L\to L$ такий, що $(AB)x = A(Bx)$.

У нормованому просторі L для обмежених лінійних операторів A та B справджується нерівність

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \le \|A\|\cdot\|Bx\| \le \|A\|\cdot\|B\|\cdot\|x\|$$

і, отже, $\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$.

Розглядатимемо також ***степінь оператора*** $A: L\to L$, визначаючи його рівністю

$$A^n x = A(A^{n-1}x).$$

Для обмеженого лінійного оператора A отримуємо нерівність

$$\|A^n\| \le \|A\|^n.$$

Найпростішими прикладами лінійних операторів є: ***одиничний оператор*** $I: L\to L$ такий, що $Ix = x$ для всіх $x\in L$, та ***нульовий оператор*** $0: L\to L'$ такий, що $0x = 0$ для всіх $x\in L$.

Розглянемо також оператор $A: C[a,b]\to C[a,b]$, визначений формулою

$$Ax(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds, \tag{2.4}$$

ядро якого $K(t,s)$ – неперервна у квадраті $Q=[a,b;\, a,b]$ функція.

Оператор (2.4) називають ***інтегральним оператором Фредгольма***. Його лінійність випливає з властивостей інтеграла Рімана. Крім того,

$$|Ax(t)| = \left|\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds\right| \le \int_a^b |K(t,s)|\,ds \cdot \|x\|.$$

Отже,

$$\|Ax\| \le \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds \cdot \|x\|,$$

тобто оператор Фредгольма є обмеженим. Для його норми маємо оцінку

$$\|A\| \le \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,ds.$$

Зокрема, якщо $|K(t,s)| \le M$ у квадраті Q, то $\|A\| \le M(b-a)$.

Отримане твердження справджується також для довільного обмеженого ядра $K(t,s)$ з розривами вздовж скінченної кількості неперервних ліній $s = \varphi_k(t)$.

Інтегральний оператор Фредгольма (2.4) можна також розглядати як оператор $A\colon L_2[a,b] \to L_2[a,b]$, за умови, що

$$B^2 = \iint_Q |K(t,s)|^2 dt\,ds < \infty.$$

При цьому $\|A\| \le B$, бо

$$\int_a^b \left(Ax(t)\right)^2 dt = \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds\right)^2 dt \le \int_a^b \left(\int_a^b K^2(t,s)\,ds \cdot \int_a^b x^2(s)\,ds\right) dt.$$

Зокрема, якщо $|K(t,s)| \le M$ у квадраті Q, то

$$\|A\| \le B \le M(b-a).$$

Оператор $A\colon L \to L'$ називають ***оборотним***, якщо для кожного y з множини $E(A)$ значень цього оператора рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок $x \in D(A)$. При цьому відображення $A^{-1}: E(A) \to D(A)$, яке кожному $y \in E(A)$ зіставляє цей єдиний розв'язок $x \in D(A)$, називають ***оберненим оператором*** до оператора A. Таким чином,

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I.$$

Теорема 2.5. *Оператор A^{-1}, обернений до лінійного оператора A, є лінійним.*

Доведення. Насамперед відзначимо, що множина значень $E(A)$ оператора A є підпростором лінійного простору L'. Нехай $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$. Тоді $x_1 = A^{-1}y_1$, $x_2 = A^{-1}y_2$.

Враховуючи лінійність оператора A, маємо

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2.$$

Застосовуючи до обох частин цієї рівності оператор A^{-1}, одержуємо рівності

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = A^{-1}A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) =$$
$$= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2,$$

звідки й випливає лінійність оператора A^{-1}. ■

Оператор, обернений до обмеженого оператора, не завжди є обмеженим оператором. Але справджуються такі твердження:

Теорема 2.6. *Якщо лінійний обмежений оператор A взаємно однозначно відображає банаховий простір L на банаховий простір L', то обернений оператор A^{-1} є обмеженим.*

Теорема 2.7. *Якщо $A_0 : L \to L'$ – лінійний оператор, який має обмежений обернений, і $\Delta A : L \to L'$ – лінійний оператор, для якого $\|A_0^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$, то для оператора $A = A_0 + \Delta A$ також існує обмежений обернений оператор.*

Теорема 2.8 не тільки встановлює умови існування оберненого оператора, а й вказує спосіб його знаходження.

Теорема 2.8. *Якщо A – лінійний обмежений оператор, який відображає банаховий простір L у себе, і $\|A\| < 1$, то існує обмежений оператор, обернений до оператора $I - A$, причому*

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots \qquad (2.5)$$

Доведення. Оскільки $\|A\| < 1$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k < \infty.$$

З цієї нерівності та повноти простору L випливає, що сума ряду $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ є лінійним обмеженим оператором. Крім того,

$$(I-A)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n} A^k (I-A) = I - A^{n+1}.$$

Перейшовши до границі при $n \to \infty$, з врахуванням того, що $\left\| A^{n+1} \right\| \le \left\| A \right\|^{n+1} \to 0$, одержуємо рівність

$$(I-A)\sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I-A) = I,$$

з якої випливає (2.5). ■

§ 2.4. Компактні самоспряжені оператори. Теорема Гільберта – Шмідта

Нехай оператор A визначений в евклідовому просторі E. Оператор A^* називають ***спряженим*** до оператора A, якщо для всіх $x, y \in E$ виконується рівність

$$(Ax, y) = (x, A^* y).$$

Оператор A називають ***самоспряженим***, якщо для всіх $x, y \in E$ виконується $(Ax, y) = (x, Ay)$. Зокрема, інтегральний оператор Фредгольма (2.4) буде самоспряженим у просторі $L_2[a,b]$, якщо його ядро є ***симетричним***, тобто $K(t,s) = K(s,t)$.

Число λ називають ***власним значенням*** оператора $A : L \to L$, якщо рівняння $Ax = \lambda x$ має ненульовий розв’язок. Такий розв’язок називають ***власною функцією*** оператора A, яка відповідає власному значенню λ.

Якщо число λ є власним значенням оператора A, то оператор

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1},$$

який називають ***резольвентою*** оператора A, не існує.

Якщо оператор $R_\lambda(A)$ визначений на всьому просторі L і є обмеженим, то значення λ називають ***регулярним***.

Теорема 2.9. *Якщо лінійний оператор A є обмеженим у банаховому просторі L і $|\lambda| > \|A\|$, то точка λ регулярна.*

Доведення. Справді, оскільки

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} = \left(-\lambda \left(I - \frac{A}{\lambda} \right) \right)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda} \right)^k,$$

то при $\|A\| < |\lambda|$ такий ряд збігається і задає обмежений на всьому просторі L оператор. ■

Розглянемо властивості власних значень і власних функцій самоспряженого оператора.

Теорема 2.10. *Власні значення самоспряженого оператора A, визначеного у гільбертовому просторі H, є дійсними, а його власні функції, які відповідають різним власним значенням, є ортогональними.*

Доведення. Нехай H – комплексний гільбертовий простір. Якщо

$$Ax = \lambda x,\ x \neq 0,$$

то, враховуючи аксіоми скалярного добутку (§ 2.2), отримуємо:

$$\lambda \cdot (x,x) = (\lambda x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) =$$
$$= (x, \lambda x) = \overline{(\lambda x, x)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{(x,x)} = \overline{\lambda} \cdot (x,x).$$

Оскільки $(x,x) \neq 0,$ то $\lambda = \overline{\lambda},$ тобто число λ є дійсним.

Якщо $\mu \neq \lambda$ і

$$Ax = \lambda x,\ x \neq 0,\ \ Ay = \mu y,\ y \neq 0,$$

то, враховуючи, що $\overline{\mu} = \mu,$ з рівності

$$\lambda \cdot (x,y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) =$$
$$= (x, \mu y) = \overline{(\mu y, x)} = \overline{\mu} \cdot \overline{(y,x)} = \mu (x,y)$$

отримуємо $(x,y) = 0,$ тобто умову ортогональності власних функцій x, y. ■

Множину M нормованого простору L називають ***компактною***, якщо з будь-якої нескінченної послідовності її елементів можна виділити збіжну підпослідовність.

Якщо границі таких підпослідовностей існують, але не обов'язково належать до M, то таку множину називають ***передкомпактною***.

Лінійний оператор $A: L \to L'$ називають ***компактним*** (***цілком неперервним***) ***оператором***, якщо він кожну обмежену множину простору L переводить у передкомпактну множину простору L'. Оскільки кожна передкомпактна множина є обмеженою, то кожний компактний оператор є обмеженим. Для скінченновимірних просторів L' справджується й обернене твердження. Але у нескінченновимірному просторі навіть одиничний оператор $I: L \to L$ не є компактним.

Компактні оператори утворюють замкнений підпростір у просторі обмежених операторів $A: L \to L'$. Це означає, що лінійна комбінація та границя збіжної за нормою послідовності компактних операторів є компактним оператором.

Добуток компактних операторів також є компактним оператором. Це випливає з такого твердження:

Теорема 2.11. *Якщо оператор A є компактним, а оператор B – обмеженим, то оператори AB і BA компактні.*

Доведення. Якщо множина M є обмеженою, то оператор B переводить її в обмежену множину, яку, в свою чергу, оператор A переведе у передкомпактну. Отже, оператор AB компактний. Аналогічно, обмежену множину M оператор A переводить у передкомпактну множину, яку оператор B знову переведе у передкомпактну. Тому й оператор BA компактний. ■

Наслідок. *Компактний оператор, визначений у нескінченновимірному просторі, не має обмеженого оберненого оператора.*

Доведення. Припустимо, що обернений до компактного оператора A оператор A^{-1} є обмеженим. Тоді з теореми 2.11 випливає, що одиничний оператор

$$I = AA^{-1} = A^{-1}A$$

є компактним оператором, що не справджується для нескінченновимірного простору. ■

Теорема 2.12. *Інтегральний оператор Фредгольма* (2.4), *ядро якого* $K(t,s)$ *неперервне у квадраті* $Q=[a,b;\, a,b]$, *є компактним оператором у просторі* $C[a,b]$.

Доведення. З неперервності функції $K(t,s)$ випливає її обмеженість, тобто $|K(t,s)| \le M$, і рівномірна неперервність у квадраті Q. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для кожного $s \in [a,b]$ при $|t' - t''| < \delta$ виконується нерівність

$$\left|K(t',s) - K(t'',s)\right| < \varepsilon.$$

При цьому

$$\left|Ax(t')-Ax(t'')\right|\le\int_a^b\left|K(t',s)-K(t'',s)\right|\cdot|x(s)|\,ds\le\varepsilon(b-a)\|x\|.$$

Звідси випливає неперервність функцій $Ax(t)$, а також одностайна неперервність сім'ї таких функцій, за умови, що множина функцій $x(t)$ обмежена, тобто $\|x\|\le C$. Тоді з нерівності

$$|Ax(t)|\le\int_a^b\left|K(t,s)\right|\cdot|x(s)|\,ds\le M(b-a)\|x\|\le MC(b-a)$$

отримуємо також рівномірну обмеженість такої сім'ї функцій. За теоремою Арцели сім'я функцій $Ax(t)$ є передкомпактною у просторі $C[a,b]$, а отже, інтегральний оператор Фредгольма є компактним у цьому просторі. ■

Умови теореми 2.12 можна дещо послабити, вимагаючи обмеженість ядра $K(t,s)$ і допускаючи його розриви вздовж скінченної кількості неперервних ліній $s=\varphi_k(t)$, $k=1,2,\ldots,n$. З врахуванням цього зауваження отримуємо також компактність у просторі $C[a,b]$ ***інтегрального оператора Вольтерри***

$$Ax(t)=\int_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds$$

з довільним неперервним ядром у трикутнику $a\le s\le t\le b$.

Відзначимо, що інтегральні оператори Фредгольма та Вольтерри є компактними також у просторі $L_2[a,b]$.

Власні значення та власні функції компактного оператора характеризує така ***властивість***:

Кожен компактний оператор A у банаховому просторі L для довільного $\delta>0$ *може мати лише скінченну кількість лінійно незалежних власних функцій, що відповідають власним значенням, які за модулем перевищують числа* δ.

Звідси випливає, що:

1) *кожному власному значенню* $\mu\ne0$ *компактного оператора A відповідає лише скінченна кількість лінійно незалежних власних функцій*;

2) *множина власних значень компактного оператора не більш як зліченна і може мати точкою скупчення лише точку* 0.

Розглянемо тепер властивості самоспряжених компактних операторів у гільбертовому просторі *H*.

Теорема 2.13 (*Гільберта – Шмідта*). *Для будь-якого самоспряженого компактного оператора у гільбертовому просторі H існує ортогональна нормована система власних функцій* $\{\varphi_n\}$, *які відповідають власним значенням* $\mu_n \neq 0$, *що кожен елемент* $x \in H$ *єдиним способом зображується у вигляді*

$$x = \sum_n c_n \varphi_n + x_0,$$

де $c_n = (x, \varphi_n)$, $Ax_0 = 0$. *При цьому*

$$Ax = \sum_n \mu_n c_n \varphi_n,$$

і якщо система $\{\varphi_n\}$ *нескінченна, то* $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0.$

Зауважимо, що якщо деякому власному значенню $\mu \neq 0$ відповідає декілька різних власних функцій системи $\{\varphi_n\}$, то у теоремі Гільберта – Шмідта таке власне значення повторюється з різними індексами стільки разів, якою є його кратність.

Застосуємо теорему 2.13 до розв'язування ***операторного рівняння*** *другого роду*

$$x = \lambda Ax + f \tag{2.6}$$

з компактним самоспряженим оператором A у гільбертовому просторі H. За теоремою Гільберта – Шмідта це рівняння можна записати у вигляді

$$\sum_n c_n \varphi_n + x_0 = \lambda \sum_n \mu_n c_n \varphi_n + \sum_n f_n \varphi_n + f_0, \tag{2.7}$$

причому $f_n = (f, \varphi_n)$, $Af_0 = 0$.

Помножимо скалярно обидві частини (2.7) на функцію φ_k. Тоді

$$(x_0, \varphi_k) = (f_0, \varphi_k) = 0,$$

бо числа x_0, f_0, якщо вони не є нулями, можна розглядати як власні функції оператора *A*, які відповідають власному значенню $\mu = 0$. Оскільки

$$(\varphi_n, \varphi_k) = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

то для кожного k отримуємо рівність

$$c_k = \lambda\mu_k c_k + f_k, \tag{2.8}$$

з якої при $\lambda\mu_k \neq 1$ однозначно знаходимо всі коефіцієнти

$$c_k = \frac{f_k}{1-\lambda\mu_k}.$$

Підставляючи такі c_k у рівняння (2.7), маємо також $x_0 = f_0$. Таким чином, при $\lambda\mu_k \neq 1$ єдиним розв'язком операторного рівняння (2.6) є функція

$$x = \sum_k \frac{f_k\varphi_k}{1-\lambda\mu_k} + f_0 = \sum_k \frac{f_k\varphi_k}{1-\lambda\mu_k} + \left(f - \sum_k f_k\varphi_k \right)$$

або

$$x = f + \lambda\sum_k \frac{\mu_k f_k\varphi_k}{1-\lambda\mu_k}.$$

Якщо $\lambda\mu_k = 1$ для деяких k, то для існування розв'язку рівняння (2.6) необхідно, щоб $f_k = 0$, тобто елемент f має бути ортогональним до всіх власних функцій оператора A, які відповідають таким власним значенням. У цьому випадку розв'язок рівняння (2.6) існує, але він не буде єдиним.

На практиці отриманий результат можна застосувати до розв'язування у просторі $L_2[a,b]$ лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з симетричним ядром.

§ 2.5. Наближене розв'язування операторних рівнянь

Розглянемо у нормованому просторі L операторне рівняння

$$A_0\tilde{y} = \tilde{f}. \tag{2.9}$$

Якщо лінійний оператор $A_0 : L \to L$ має обмежений обернений оператор A_0^{-1}, то рівняння (2.9) має єдиний розв'язок

$$\tilde{y} = A_0^{-1}\tilde{f}.$$

Нехай тепер лінійний оператор $A = A_0 + \Delta A : L \to L$ такий, що

$$\left\| A_0^{-1} \right\| \cdot \left\| \Delta A \right\| < 1.$$

Тоді оператор A також має обмежений обернений і, отже, рівняння

$$Ay = f \tag{2.10}$$

має єдиний розв'язок $y = A^{-1}f$. При цьому

$$\|y - \tilde{y}\| = \| A^{-1}f - A_0^{-1}\tilde{f} \| = \| (A^{-1}f - A_0^{-1}f) + (A_0^{-1}f - A_0^{-1}\tilde{f}) \| \le$$

$$\le \|A^{-1} - A_0^{-1}\| \cdot \|f\| + \|A_0^{-1}\| \cdot \|f - \tilde{f}\|.$$

Оскільки

$$\|A^{-1} - A_0^{-1}\| = \|(A_0 + \Delta A)^{-1} - A_0^{-1}\| \le \|(I + A_0^{-1}\Delta A)^{-1} - I\| \cdot \|A_0^{-1}\| =$$

$$= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (-A_0^{-1}\Delta A)^n \right\| \cdot \|A_0^{-1}\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left(\|A_0^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| \right)^n \cdot \|A_0^{-1}\| = \frac{\|A_0^{-1}\|^2 \cdot \|\Delta A\|}{1 - \|A_0^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|},$$

то отримуємо оцінку

$$\|y - \tilde{y}\| \le \frac{\|A_0^{-1}\|^2 \cdot \|\Delta A\|}{1 - \|A_0^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \|f\| + \|A_0^{-1}\| \cdot \|f - \tilde{f}\|. \tag{2.11}$$

Таким чином, якщо величини $\|\Delta A\|$, $\|f - \tilde{f}\|$ є достатньо малими, то для наближеного розв'язування рівняння (2.10) досить розв'язати рівняння (2.9).

Для операторних рівнянь другого роду

$$y = \lambda Ay + f, \qquad \tilde{y} = \lambda A_0\tilde{y} + \tilde{f}$$

відповідна оцінка похибки отриманого наближення має вигляд

$$\|y - \tilde{y}\| \le$$

$$\le \frac{\|(I - \lambda A_0)^{-1}\|^2 \cdot |\lambda| \cdot \|\Delta A\|}{1 - \|(I - \lambda A_0)^{-1}\| \cdot |\lambda| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \|f\| + \|(I - \lambda A_0)^{-1}\| \cdot \|f - \tilde{f}\|. \tag{2.12}$$

Оцінимо також похибку n-го наближення розв'язку рівняння

$$y = \lambda Ay + f, \quad |\lambda| \cdot \|A\| < 1,$$

якщо $y_n = \lambda Ay_{n-1} + f$, $n \in \mathbf{N}$, $y_0 = f$. Для неї отримуємо

$$\|y - y_n\| =$$

$$= \|(\lambda Ay + f) - (\lambda Ay_{n-1} + f)\| \le |\lambda| \|A\| \cdot \|y - y_{n-1}\| \le \ldots \le$$

$$\le |\lambda|^n \|A\|^n \cdot \|y - y_0\| = |\lambda|^n \|A\|^n \cdot \|(I - \lambda A)^{-1} f - f\| \le$$

$$\leq |\lambda|^n \left\|A\right\|^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^n \left\|A\right\|^n \cdot \|f\| = \frac{|\lambda|^{n+1} \left\|A\right\|^{n+1} \cdot \|f\|}{1-|\lambda| \cdot \left\|A\right\|}.$$

Зауважимо, що така оцінка дозволяє розв’язати й обернену задачу, тобто за наперед заданою похибкою ε знайти кількість необхідних ітерацій для досягнення потрібної точності:

$$n = \left[\ln\left(\frac{1-|\lambda| \cdot \left\|A\right\|}{\|f\|} \cdot \varepsilon \right) : \ln\left(|\lambda| \cdot \left\|A\right\| \right) \right], \qquad |\lambda| \cdot \left\|A\right\| \cdot \|f\| \neq 0,$$

де $[\alpha]$ – ціла частина числа α.

Рекомендована література: [1, с. 19–35], [3, с. 52–76], [5, с. 338–347], [7, с. 17–29], [9, с. 19–36], [17, с. 41–71, 104–142, 187–214], [22, с. 37–51, 59–78, 87–103].

Питання до розділу 2

1. Сформулюйте аксіоми метрики й означення метричного простору.
2. Запишіть формули відстаней у метричних просторах $C[a,b]$ і $L_2[a,b]$.
3. Сформулюйте означення збіжних і фундаментальних послідовностей, охарактеризуйте зв'язок між ними.
4. Сформулюйте означення неперервних і стискаючих відображень, охарактеризуйте зв'язок між ними.
5. Сформулюйте принцип стискаючих відображень та його модифікацію для неперервних відображень.
6. Сформулюйте означення та наведіть приклади лінійних, нормованих, евклідових та комплексних евклідових просторів.
7. Сформулюйте означення та властивості ортогональних систем в евклідових просторах.
8. Сформулюйте означення лінійних операторів і наведіть приклади таких операторів.
9. Сформулюйте означення оборотного та оберненого операторів і наведіть їх основні властивості.

10. Сформулюйте означення та основні властивості компактних операторів.

Вправи до розділу 2

1. Обґрунтуйте виконання аксіом метрики для відстані $\rho(x,y) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$ у просторі $C[a,b]$.
2. Обґрунтуйте виконання аксіом метрики для відстані $\rho(x,y) = \sqrt{\int_a^b \left(x(t)-y(t)\right)^2 dt}$ у просторі $L_2[a,b]$.
3. Доведіть, що у метричному просторі $C[a,b]$ кожна фундаментальна послідовність є збіжною.
4. Доведіть, що для довільних неперервних функцій $K(x,s)$ у квадраті $Q=[a,b;\, a,b]$ та $y(x)$ на відрізку $[a,b]$ функція $Ay(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds$ також неперервна на відрізку $[a,b]$.
5. Встановіть достатні умови, за яких відображення $Ay(x) = \lambda\int_0^1 xe^s y(s)\,ds - \cos x$ буде стискаючим у просторах $C[0,1]$ і $L_2[0,1]$ відповідно.
6. Обґрунтуйте виконання аксіом норми для норм $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$ і $\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\,dt}$ у нормованих просторах $C[a,b]$ та $L_2[a,b]$ відповідно.
7. Доведіть, що для елементів довільного дійсного евклідового простору виконується рівність
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right),$$
якщо $\|x\|^2 = (x,x)$.
8. Обґрунтуйте, що кожна ортогональна система елементів евклідового простору є лінійно незалежною.
9. Оцініть норми інтегральних операторів $Ay(x) = \int_0^1 K(x,s)y(s)\,ds$ у просторах $C[0,1]$ і $L_2[0,1]$, якщо:

а) $K(x,s)=xe^s$; б) $K(x,s)=e^{x-s}$;

в) $K(x,s)=e^x+s$; г) $K(x,s)=\sin\pi(x-s)$.

10. Обґрунтуйте властивості власних значень і власних функцій самоспряжених операторів.

Розділ 3
МЕТОД ІТЕРОВАНИХ ЯДЕР. ФОРМУЛИ ФРЕДГОЛЬМА

§ 3.1. Степені інтегральних операторів Фредгольма та Вольтерри

У просторі $C[a,b]$ розглянемо інтегральний оператор Фредгольма

$$Ay(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds. \qquad (3.1)$$

З'ясуємо вигляд його степенів:

$$A^2 y(x) = A\big(Ay(x)\big) = \int_a^b K(x,s)Ay(s)\,ds = \int_a^b K(x,s)\int_a^b K(s,t)y(t)\,dt\,ds =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)K(s,t)ds \right) y(t)\,dt = \int_a^b K_2(x,t)y(t)\,dt.$$

Помінявши у цій формулі місцями змінні s та t, отримуємо

$$A^2 y(x) = \int_a^b K_2(x,s)y(s)\,ds,$$

де

$$K_2(x,s) = \int_a^b K(x,t)K(t,s)\,dt.$$

Якщо ядро $K(x,s)$ є неперервним у квадраті $Q = [a,b;\ a,b]$, то ядро $K_2(x,s)$ теж буде неперервним у Q. Таким чином, квадрат інтегрального оператора Фредгольма є інтегральним оператором Фредгольма.

У загальному випадку

$$A^n y(x) = \int_a^b K_n(x,s)y(s)\,ds, \qquad (3.2)$$

де

$$K_n(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt, \quad n = 2,3,\ldots, \qquad K_1(x,s) = K(x,s).$$

Ядра $K_n(x,s)$ називають ***ітерованими***.

Розглянемо тепер у просторі $C[a,b]$ інтегральний оператор Вольтерри

$$Ay(x) = \int_a^x K(x,s)\,y(s)\,ds, \quad a \le x \le b. \tag{3.3}$$

Для його квадрата у трикутнику $\Delta = \{(t,s) : a \le t \le s \le x\}$ маємо:

$$A^2 y(x) = A\big(Ay(x)\big) = \int_a^x K(x,s) \int_a^s K(s,t)\,y(t)\,dt\,ds =$$

$$= \int_a^x \left(\int_t^x K(x,s)K(s,t)\,ds \right) y(t)\,dt = \int_a^x K_2(x,t)\,y(t)\,dt.$$

Помінявши місцями змінні s, t, отримуємо

$$A^2 y(x) = \int_a^x K_2(x,s)y(s)\,ds,$$

де

$$K_2(x,s) = \int_s^x K(x,t)K(t,s)\,dt.$$

У загальному випадку

$$A^n y(x) = \int_a^x K_n(x,s)y(s)\,ds, \tag{3.4}$$

де

$$K_n(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_{n-1}(t,s)\,dt,\ n = 2,3,\ldots, \quad K_1(x,s) = K(x,s).$$

Зауважимо, що формули (3.2), (3.4) для степенів операторів Фредгольма та Вольтерри справджуються й у просторі $L_2[a,b]$.

§ 3.2. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

Розглянемо у просторі $C[a,b]$ інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x), \tag{3.5}$$

у якому ядро $K(x,s)$ обмежене у квадраті $Q = [a,b;\, a,b]$, тобто

$|K(x,s)| \le M$, а функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$.

Запишемо рівняння (3.5) в операторному вигляді

$$(I - \lambda A) y = f, \tag{3.6}$$

де $Ay(x) = \int_a^b K(x,s) y(s) ds$ є інтегральним оператором Фредгольма у просторі $C[a,b]$.

Якщо

$$|\lambda| M(b-a) < 1, \tag{3.7}$$

то $|\lambda| \cdot \|A\| < 1$ і, отже, існує оператор

$$(I - \lambda A)^{-1} = I + \lambda A + \ldots + \lambda^n A^n + \ldots,$$

тобто розв'язком операторного рівняння (3.6) є

$$y = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda A + \ldots + \lambda^n A^n + \ldots) f.$$

Тому розв'язком інтегрального рівняння (3.5) є функція

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x,s) f(s)\, ds + \ldots + \lambda^n \int_a^b K_n(x,s) f(s)\, ds + \ldots =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \left(K_1(x,s) + \lambda K_2(x,s) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \ldots \right) f(s)\, ds.$$

Правильність останньої рівності випливає з того, що ряд у дужках за умови (3.7) збігається рівномірно. Справді, оскільки

$$|K_1(x,s)| = |K(x,s)| \le M,$$

$$|K_2(x,s)| = \left| \int_a^b K(x,t) K_1(t,s) dt \right| \le M^2 (b-a), \quad \ldots$$

$$|K_n(x,s)| = \left| \int_a^b K(x,t) K_{n-1}(t,s)\, dt \right| \le M^n (b-a)^{n-1},$$

$$\left| \lambda^{n-1} K_n(x,s) \right| \le |\lambda|^{n-1} M^n (b-a)^{n-1}$$

і за ознакою Д'Аламбера при $|\lambda| M(b-a) < 1$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^{n-1} M^n (b-a)^{n-1}$ є збіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s)$ рівномірно збіжний.

Якщо позначити

$$R(x,s;\lambda) = K_1(x,s) + \lambda K_2(x,s) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \ldots,$$

то розв’язок $y(x)$ рівняння (3.5) можемо записати як

$$y(x)=\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)f(s)\,ds+f(x). \tag{3.8}$$

Функцію $R(x,s;\lambda)$ називають ***резольвентою***, а наведений спосіб розв’язування інтегральних рівнянь – ***методом ітерованих ядер***.

Зауважимо, що у просторі $L_2[a,b]$ для існування резольвенти достатньо вимагати виконання нерівності $|\lambda|B<1$, де

$$B^2=\iint_Q |K(x,s)|^2\,dxds.$$

Приклад 3.1. *Розв’язати методом ітерованих ядер рівняння*

$$y(x)=\int_0^1 xs^2 y(s)\,ds+x^2. \tag{3.9}$$

Розв’язання. Маємо

$$\lambda=1,\ a=0,\ b=1,\ K(x,s)=xs^2,\ f(x)=x^2,$$

$$M=\max_{x,s\in[0,1]}|xs^2|=1,\ \ |\lambda|M(b-a)=1,\ B^2=\int_0^1\int_0^1 x^2s^4\,dxds=\frac{1}{15}.$$

Оскільки $|\lambda|B=\sqrt{15}/15<1,$ то розв’язок рівняння (3.9) шукаємо у просторі $L_2[0,1]$. Послідовно знаходимо

$$K_1(x,s)=K(x,s)=xs^2,\qquad K_2(x,s)=\int_0^1 xt^2\cdot ts^2\,dt=\frac{1}{4}xs^2,$$

$$K_3(x,s)=\int_0^1 xt^2\cdot\frac{1}{4}ts^2\,dt=\left(\frac{1}{4}\right)^2 xs^2,\ \dots,\quad K_n(x,s)=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}xs^2.$$

Отже, резольвентою рівняння (3.9) є функція

$$R(x,s;\lambda)=xs^2+\frac{1}{4}xs^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2 xs^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3 xs^2+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}xs^2+\ldots=$$

$$=\left(1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\ldots\right)xs^2=\frac{1}{1-1/4}xs^2=\frac{4}{3}xs^2,$$

а згідно з (3.8)

$$y(x)=\int_0^1\frac{4}{3}xs^2\cdot s^2\,ds+x^2=\frac{4}{15}x+x^2.\quad\bullet$$

§ 3.3. Метод ітерованих ядер для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду

Аналогічно, як і у § 3.2, для рівняння Фредгольма другого роду, можна отримати розв'язок рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)\,y(s)\,ds+f(x),\quad x\in[a,b], \tag{3.10}$$

у вигляді

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^x R(x,s;\lambda)f(s)\,ds. \tag{3.11}$$

Обґрунтуємо, що при цьому ряд

$$R(x,s;\lambda)=K_1(x,s)+\lambda K_2(x,s)+\ldots+\lambda^{n-1}K_n(x,s)+\ldots$$

для кожного значення λ є рівномірно збіжним у трикутнику $\Delta=\{(x,s): a\le s\le x\le b\}$.

Для ядер $K_1(x,s),K_2(x,s),K_3(x,s)$ маємо оцінки

$$|K_1(x,s)|=|K(x,s)|\le M,$$

$$|K_2(x,s)|=\left|\int_s^x K(x,t)K_1(t,s)\,dt\right|\le M^2(x-s),$$

$$|K_3(x,s)|=\left|\int_s^x K(x,t)K_2(t,s)\,dt\right|\le\int_s^x (t-s)\,dt\le M^3\frac{(x-s)^2}{2}.$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо нерівність

$$|K_n(x,s)|\le M^n\frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!},$$

яку можна довести за допомогою методу математичної індукції.

Звідси випливає, що

$$\left|\lambda^{n-1}K_n(x,s)\right|\le|\lambda|^{n-1}M^n\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}=c_n.$$

Оскільки за ознакою Д'Аламбера числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ є збіжним, то за ознакою Вейєрштраса ряд для резольвенти $R(x,s;\lambda)$ для кожного λ збігається рівномірно.

Приклад 3.2. *Розв'язати методом ітерованих ядер рівняння*

$$y(x)=\int_0^x (x-s)y(s)\,ds+4e^x. \tag{3.12}$$

Розв'язання. Послідовно знаходимо ітеровані ядра:

$$K_1(x,s)=K(x,s)=x-s,$$

$$K_2(x,s)=\int_s^x (x-t)(t-s)\,dt=\int_s^x \big((x-s)+(s-t)\big)(t-s)\,dt=$$

$$=(x-s)\int_s^x (t-s)\,dt-\int_s^x (t-s)^2 ds=(x-s)\left.\frac{(t-s)^2}{2}\right|_s^x-\left.\frac{(t-s)^3}{3}\right|_s^x=$$

$$=\frac{(x-s)^3}{2}-\frac{(x-s)^3}{3}=\frac{(x-s)^3}{3!},$$

$$K_3(x,s)=\int_s^x (x-t)\frac{(t-s)^3}{6}\,dt=\frac{(x-s)^5}{5!},\quad \ldots,$$

$$K_n(x,s)=\frac{(x-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Обґрунтуємо останню рівність за допомогою методу математичної індукції. Для $n=1$ вона правильна. Припускаючи її виконання для $n=k,$ для $n=k+1$ отримуємо

$$K_{k+1}(x,s)=\int_s^x (x-t)\frac{(t-s)^{2k-1}}{(2k-1)!}\,dt=\int_s^x \big((x-s)+(s-t)\big)\frac{(t-s)^{2k-1}}{(2k-1)!}\,dt=$$

$$=\frac{(x-s)}{(2k-1)!}\cdot\frac{(x-s)^{2k}}{2k}-\frac{(x-s)^{2k+1}}{(2k+1)(2k-1)!}=\frac{(x-s)^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

звідки випливає правильність потрібної рівності для всіх $n\in\mathbf{N}.$

Тепер знайдемо резольвенту рівняння (3.12):

$$R(x,s;\lambda)=R(x,s;1)=(x-s)+\frac{(x-s)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x-s)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots=\operatorname{sh}(x-s).$$

Отже,

$$y(x)=\int_0^x \operatorname{sh}(x-s)\cdot 4e^s ds+4e^x=2e^x\int_0^x ds-2e^{-x}\int_0^x e^{2s}ds+4e^x=$$

$$=2e^x\cdot x-e^{-x}(e^{2x}-1)+4e^x=(2x+3)e^x+e^{-x}.\ \bullet$$

§ 3.4. Наближене розв'язування лінійних інтегральних рівнянь другого роду методом ітерованих ядер

Метод ітерованих ядер можна використати також для наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Для цього позначимо

$$R_n(x,s;\lambda) = K_1(x,s) + \lambda K_2(x,s) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(x,s)$$

і визначимо наближений розв'язок за формулою

$$\tilde{y}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_n(x,s;\lambda) f(s)\, ds.$$

Якщо

$$\left| R(x,s;\lambda) - R_n(x,s;\lambda) \right| < \varepsilon, \qquad \left| f(x) \right| \le m,$$

то похибка

$$\delta(x) = \left| y(x) - \tilde{y}(x) \right| =$$

$$= \left| \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) f(s)\, ds - \lambda \int_a^b R_n(x,s;\lambda) f(s)\, ds \right| \le |\lambda| \varepsilon m(b-a).$$

Проаналізуємо наближене розв'язування рівняння

$$y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)\, ds + x^2$$

з прикладу 3.1. Резольвентою цього рівняння є функція

$$R(x,s;\lambda) = \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \ldots \right) xs^2 = \frac{4}{3} xs^2.$$

Покладаючи

$$R_n(x,s;\lambda) = \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right) xs^2$$

і враховуючи, що $|\lambda| = 1,\ b - a = 1,\ m = \max\limits_{x \in [0,1]} x^2 = 1,$ переконуємося, що для досягнення похибки $\delta(x) < 0{,}001$ достатньо взяти $n = 6.$ Справді, для $n \ge 6$

$$\left| R(x,s;\lambda) - R_n(x,s;\lambda) \right| = \frac{|xs^2|}{3 \cdot 4^{n-1}} \le \frac{1}{3 \cdot 4^{n-1}} < 0{,}001,$$

а тому

$$\delta(x) \le |\lambda| \varepsilon m(b-a) < 1 \cdot 0{,}001 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}001.$$

Точнішу оцінку для отриманої похибки дає нерівність

$$\delta(x) = |y(x) - \tilde{y}(x)| \le \varepsilon |\lambda| \int_a^b |f(s)| ds,$$

за допомогою якої переконуємось, що для досягнення точності наближення в 0,001 достатньо обмежитися $n = 5$.

Враховуючи, що рівняння Вольтерри є окремим випадком рівняння Фредгольма, аналогічні оцінки для похибок наближених розв'язків можна використовувати і для розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду.

§ 3.5. Інтегральні рівняння, ядра яких мають слабку особливість

Ітеровані ядра можна використовувати також для розв'язування деяких лінійних інтегральних рівнянь з нефредгольмовими ядрами. Зокрема, доволі часто зустрічаються рівняння Вольтерри з ядром вигляду

$$K(x,s) = \frac{H(x,s)}{(x-s)^{\alpha}},$$

де $0 < \alpha < 1$, а $H(x,s)$ – деяка неперервна функція. Такі ядра називають ***ядрами зі слабкою особливістю***.

Якщо $\alpha \ge 0,5$, то квадрат цього ядра не є інтегровним у трикутнику $\Delta = \{(x,s) : a \le s \le x \le b\}$.

Покажемо, що, починаючи з деякого номера n, ітеровані ядра $K_n(x,s)$ є обмеженими в Δ. Справді,

$$K_2(x,s) = \int_s^x \frac{H(x,t)H(t,s)}{(x-t)^{\alpha}(t-s)^{\alpha}} dt$$

або, підставляючи $t = s + (x-s)\tau$,

$$K_2(x,s) = (x-s)^{1-2\alpha} \int_0^1 \frac{H\left(x, s+(x-s)\tau\right) H\left(s+(x-s)\tau, s\right)}{\tau^{\alpha}(1-\tau)^{\alpha}} d\tau.$$

Оскільки інтеграл у правій частині цієї рівності для $\alpha < 1$ є збіжним, то

$$K_2(x,s) = (x-s)^{1-2\alpha} F_2(x,s),$$

де $F_2(x,s)$ – обмежена функція.

Міркуючи аналогічно, одержуємо

$$K_3(x,s)=(x-s)^{2-3\alpha}F_3(x,s), \qquad K_4(x,s)=(x-s)^{3-4\alpha}F_4(x,s),$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$K_n(x,s)=(x-s)^{n-1-n\alpha}F_n(x,s),$$

де $F_3(x,s), F_4(x,s), \dots, F_n(x,s)$ – деякі обмежені функції, звідки випливає, що для $n(1-\alpha)>1$ ядра $K_n(x,s),\ K_{n+1}(x,s), \dots$ є обмеженими.

Розглянемо тепер інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds+f(x) \tag{3.13}$$

і запишемо його у вигляді

$$y(s)=\lambda\int_a^s K(s,t)y(t)\,dt+f(s). \tag{3.14}$$

Помножимо обидві частини рівності (3.14) на $\lambda K(x,s)$ і зінтегруємо її за змінною s на проміжку $[a,x]$. Тоді

$$\lambda\int_a^x K(x,s)y(s)\,ds=\lambda^2\int_a^x K_2(x,s)y(s)\,ds+\lambda\int_a^x K(x,s)f(s)\,ds.$$

Додамо до обох частин цієї рівності $f(x)$. Якщо позначити

$$f_2(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)f(s)ds+f(x),$$

то з (3.13) отримуємо рівняння

$$y(x)=\lambda^2\int_a^x K_2(x,s)y(s)\,ds+f_2(x).$$

Міркуючи аналогічно, на n-му кроці приходимо до рівносильного рівнянню (3.13) інтегрального рівняння

$$y(x)=\lambda^n\int_a^x K_n(x,s)y(s)\,ds+f_n(x)$$

з обмеженим ітерованим ядром $K_n(x,s)$ і вільним членом

$$f_n(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)f_{n-1}(s)\,ds+f_{n-1}(x), \quad n=2,3,\dots, \quad f_1(x)=f(x).$$

Аналогічну процедуру можна застосувати для розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду вигляду

$$y(x) = \lambda \int_a^b \frac{H(x,s)}{|x-s|^\alpha} y(s)\,ds + f(x),$$

де $0 < \alpha < 1$, $H(x,s)$ – обмежена у квадраті $Q = [a,b;a,b]$ функція.

§ 3.6. Формули Фредгольма. Резольвента Фредгольма

Ще один підхід до розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду був запропонований Е. Фредгольмом, який шукав резольвенту у вигляді

$$R(x,s;\lambda) = \frac{D(x,s;\lambda)}{D(\lambda)}, \tag{3.15}$$

де

$$D(x,s;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} B_n(x,s),$$

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} C_n, \qquad C_0 = 1, \quad B_0(x,s) = K(x,s),$$

а числа C_n і функції $B_n(x,s)$, $n \in \mathbf{N}$, визначаються як інтеграли детермінантів Фредгольма:

$$C_n = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \ldots & K(t_2,t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n,$$

$$B_n(x,s) = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,s) & K(x,t_1) & \ldots & K(x,t_n) \\ K(t_1,s) & K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_1,t_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(t_n,s) & K(t_n,t_1) & \ldots & K(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1 \ldots dt_n.$$

Проте, враховуючи громіздкість наведених формул, для знаходження C_n, $B_n(x,s)$ доцільно використовувати рекурентні співвідношення

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s,s)\,ds, \quad n \in \mathbf{N},$$

$$B_n(x,s)=C_nK(x,s)-n\int_a^b K(x,t)B_{n-1}(t,s)\,dt, \quad n\in\mathbf{N}.$$

Отримана у такий спосіб ***резольвента Фредгольма***, а також єдиний розв'язок

$$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,s;\lambda)f(s)\,ds$$

інтегрального рівняння Фредгольма

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds+f(x),$$

визначені для всіх значень λ, для яких $D(\lambda)\neq 0$. А оскільки визначник $D(\lambda)$ є цілою функцією параметра λ, то значення нуль вона може набувати не більше, як для зліченної кількості чисел λ, які називають ***характеристичними числами***. Ця резольвента є аналітичним продовженням резольвенти, отриманої методом ітерованих ядер. Отже, ***метод Фредгольма*** надає ширші можливості для розв'язування інтегральних рівнянь з допомогою резольвенти, ніж метод ітерованих ядер.

Приклад 3.3. *Знайти за резольвентою Фредгольма розв'язок рівняння*

$$y(x)=\lambda\int_0^1 xs^2y(s)\,ds+x^2. \tag{3.16}$$

Розв'язання. Маємо

$$C_0=1, \qquad B_0(x,s)=K(x,s)=xs^2,$$

$$C_1=\int_0^1 s\cdot s^2ds=\frac{1}{4}, \qquad B_1(x,s)=\frac{1}{4}xs^2-\int_0^1 xt^2\cdot ts^2dt=0.$$

Оскільки $C_n=0$, $B_n(x,s)=0$ для всіх $n\geq 2$, то згідно з (3.15)

$$R(x,s;\lambda)=\frac{xs^2}{1-\lambda/4}=\frac{4}{4-\lambda}xs^2, \quad \lambda\neq 4.$$

Отже,

$$y(x)=\lambda\int_0^1\frac{4}{4-\lambda}xs^2\cdot s^2ds+x^2=\frac{4\lambda}{5(4-\lambda)}x+x^2, \quad \lambda\neq 4. \bullet$$

Зауважимо, що, розв’язуючи рівняння (3.16) методом ітерованих ядер, для $|\lambda| \geq 4$ резольвента

$$R(x,s;\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda}{4} + \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{4}\right)^{n-1} + \ldots\right) xs^2$$

утворює розбіжний ряд.

Рекомендована література: [3, с. 98–119], [5, с. 348–362], [6, с. 285–293], [7, с. 29–56], [9, с. 37–47], [10, с. 24–29], [14, с. 112–115].

Питання до розділу 3

1. Які ядра інтегральних операторів називаються ітерованими і за якими формулами їх обчислюють?
2. Якими операторами є степені інтегральних операторів Фредгольма та Вольтерри відповідно?
3. У чому полягає метод ітерованих ядер розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерри другого роду?
4. Які достатні умови застосовності методу ітерованих ядер для розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду у просторах: а) $C[a,b]$; б) $L_2[a,b]$?
5. Яким чином метод ітерованих ядер можна застосувати до наближеного розв’язування лінійних інтегральних рівнянь другого роду?
6. Які ядра лінійних інтегральних операторів називають ядрами зі слабкою особливістю? Коли ці ядра будуть нефредгольмовими ядрами?
7. У чому полягає метод Фредгольма розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду?
8. Чи можна за формулами Фредгольма розв’язувати лінійні інтегральні рівняння Вольтерри другого роду?
9. Який зв'язок між резольвентою Фредгольма та резольвентою, отриманою у методі ітерованих ядер?
10. Охарактеризуйте з точки зору кількості їх елементів множини характеристичних чисел інтегральних операторів Фредгольма та Вольтерри.

Вправи до розділу 3

1. Знайдіть степені інтегрального оператора Фредгольма

$$Ay(x)=\int_0^1 x^2s^3y(s)\,ds.$$

2. Знайдіть степені інтегрального оператора Вольтерри

$$Ay(x)=\int_0^x (x-s)^2y(s)\,ds.$$

3. Розв'яжіть лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду методом ітерованих ядер:

а) $y(x)=\int_0^1 x^2s^3y(s)\,ds+5x^2$; б) $y(x)=\lambda\int_0^{\pi/2} \sin x\cos s\,y(s)\,ds+\sin x.$

4. Розв'яжіть лінійні інтегральні рівняння Вольтерри другого роду методом ітерованих ядер:

а) $y(x)=-\int_0^x e^{x-s}y(s)\,ds+x$; б) $y(x)=\lambda\int_0^x (x-s)\,y(s)\,ds+x.$

5. Методом ітерованих ядер знайдіть з точністю до 0,01 наближені розв'язки інтегральних рівнянь:

а) $y(x)=\int_0^1 x^2s^3y(s)\,ds+5x^2$; б) $y(s)=-\int_0^x (x-s)\,y(s)\,ds+x.$

6. Знайдіть резольвенту Фредгольма ядра $K(x,s)=x^2s-xs^2$, $(x,s)\in[0,1;0,1]$, обчислюючи числа C_n та функції $B_n(x,s)$:
   а) як інтеграли детермінантів Фредгольма;
   б) за рекурентними формулами.
7. Розв'яжіть лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду за формулами Фредгольма:

а) $y(x)=\int_0^1 x^2s^3y(s)\,ds+5x^2$;

б) $y(x)=\lambda\int_0^{\pi/2} \sin x\cos s\,y(s)\,ds+\sin x$;

в) $y(x)+4\int_0^1 (x^2s-xs^2)y(s)\,ds=\frac{4}{3}x^2$;

г) $y(x)=\int_0^{\pi} \sin(x+s)y(s)\,ds+1.$

Розділ 4
ТЕОРЕМИ ФРЕДГОЛЬМА

§ 4.1. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром. Перша теорема Фредгольма

Ядро $K(x,s)$ називають ***виродженим***, якщо його можна подати у вигляді

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{m}a_i(x)b_i(s), \tag{4.1}$$

де $a_i(x)$ та $b_i(s)$, $i=1,2,...,m$, – лінійно незалежні інтегровні з квадратом на відрізку $[a,b]$ функції.

Неоднорідне лінійне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds+f(x) \tag{4.2}$$

з виродженим ядром можна записати як

$$y(x)=\lambda\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{m}a_i(x)b_i(s)\right)y(s)ds+f(x)$$

або

$$y(x)=\lambda\sum_{i=1}^{m}a_i(x)\int_a^b b_i(s)y(s)\,ds+f(x). \tag{4.3}$$

Якщо позначити

$$C_i=\int_a^b b_i(s)y(s)ds,\ \ i=1,2,...,m,$$

то розв'язок рівняння (4.2) набуває вигляду

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{m}C_i a_i(x). \tag{4.4}$$

Для визначення сталих C_i підставимо (4.4) у рівняння (4.3):

$$f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{m}C_i a_i(x)=$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{m}a_i(x)\int_a^b b_i(s)\left(f(s)+\lambda\sum_{j=1}^{m}C_j a_j(s)\right)ds+f(x).$$

Звідси, враховуючи лінійну незалежність функцій $a_i(x)$, одержуємо систему рівнянь

$$C_i - \int_a^b b_i(s)\left(f(s) + \lambda \sum_{j=1}^{m} C_j a_j(s) \right) ds = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Розкриваючи дужки, отримуємо систему рівнянь

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{m} C_j \int_a^b a_j(s) b_i(s)\, ds = \int_a^b b_i(s) f(s) ds, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (4.5)$$

Якщо позначити

$$\alpha_{ij} = \int_a^b a_j(s) b_i(s)\, ds,$$

$$f_i = \int_a^b b_i(s) f(s) ds,$$

то система (4.5) набуває вигляду

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} C_j = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

або, після зведення подібних доданків,

$$\begin{cases} (1 - \lambda\alpha_{11}) C_1 - \lambda\alpha_{12} C_2 - \ldots - \lambda\alpha_{1m} C_m = f_1, \\ -\lambda\alpha_{21} C_1 + (1 - \lambda\alpha_{22}) C_2 - \ldots - \lambda\alpha_{2m} C_m = f_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ -\lambda\alpha_{m1} C_1 - \lambda\alpha_{m2} C_2 - \ldots + (1 - \lambda\alpha_{mm}) C_m = f_m. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Якщо визначник системи (4.6)

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \ldots & -\lambda\alpha_{1m} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1 - \lambda\alpha_{22} & \ldots & -\lambda\alpha_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda\alpha_{m1} & -\lambda\alpha_{m2} & \ldots & 1 - \lambda\alpha_{mm} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля, тобто λ не є характеристичним числом, то вона має єдиний розв’язок $C_i = C_i^0$, який можна отримати, наприклад, за формулами Крамера. Тоді матимемо єдиний розв’язок рівняння (4.2)

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{m} C_i^0 a_i(x).$$

Підсумуємо наведені результати у вигляді теореми:

Теорема 4.1 (перша теорема Фредгольма). *Якщо число* λ *не є характеристичним, то лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має єдиний розв'язок для довільної інтегровної з квадратом на відрізку* $[a,b]$ *функції* $f(x)$.

Оскільки при цьому відповідне рівнянню (4.2) однорідне рівняння має тільки тривіальний розв'язок, то теорему 4.1 часто формулюють інакше:

Для того, щоб лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром мало єдиний розв'язок для довільної інтегровної з квадратом на відрізку $[a,b]$ *функції* $f(x)$, *необхідно і достатньо, щоб відповідне однорідне рівняння мало тільки тривіальний розв'язок.*

Для практичного розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з виродженим ядром не обов'язково запам'ятовувати систему (4.6): достатньо підставити у задане рівняння шуканий розв'язок у вигляді (4.4) та прирівняти коефіцієнти біля однакових лінійно незалежних функцій $a_i(x)$.

Приклад 4.1. *Розв'язати рівняння*

$$y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)\,ds + x^2.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\lambda = 1, \qquad K(x,s) = xs^2, \qquad m = 1,$$
$$a_1(x) = x, \qquad b_1(s) = s^2, \qquad f(x) = x^2,$$

то розв'язок шукаємо у вигляді

$$y(x) = C_1 x + x^2.$$

Підставляючи його у задане рівняння, отримуємо тотожність

$$C_1 x + x^2 \equiv \int_0^1 xs^2 (C_1 s + s^2)\,ds + x^2,$$

з якої після очевидних спрощень знаходимо сталу $C_1 = 4/15$.

Отже, шуканим розв'язком є функція

$$y(x) = 4x/15 + x^2. \qquad \bullet$$

§ 4.2. Друга та третя теореми Фредгольма для інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з виродженим ядром

Нехай визначник $D(\lambda)=0$ (див. § 4.1). Такі значення λ називають ***характеристичними числами ядра***.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння (4.2) з виродженим ядром

$$y(x)=\lambda\sum_{i=1}^{m}a_i(x)\int_a^b b_i(s)y(s)ds. \tag{4.7}$$

Характеристичному числу λ відповідає p, $p\le m$, лінійно незалежних ненульових розв'язків $\left(C_1^{(k)},C_2^{(k)},...,C_m^{(k)}\right)$, $k=1,2,...,p$, однорідної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases}(1-\lambda\alpha_{11})C_1-\lambda\alpha_{12}C_2-...-\lambda\alpha_{1m}C_m=0,\\ -\lambda\alpha_{21}C_1+(1-\lambda\alpha_{22})C_2-...-\lambda\alpha_{2m}C_m=0,\\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ...\\ -\lambda\alpha_{m1}C_1-\lambda\alpha_{m2}C_2-...+(1-\lambda\alpha_{mm})C_m=0.\end{cases} \tag{4.8}$$

Відповідні їм ненульові розв'язки

$$y_k(x)=\lambda\sum_{i=1}^{m}C_i^{(k)}a_i(x),\quad k=1,2,...,p,$$

однорідного інтегрального рівняння є власними функціями його ядра. Система цих функцій є лінійно незалежною. Функцію

$$y(x)=\sum_{k=1}^{p}\gamma_k y_k(x),$$

де γ_k – довільні сталі, називають ***загальним розв'язком*** лінійного однорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром для заданого характеристичного значення λ.

Таким чином, розв'язування однорідних інтегральних рівнянь з виродженим ядром зводиться до знаходження характеристичних чисел, які є коренями алгебраїчного рівняння $D(\lambda)=0$, та власних функцій його ядра.

Приклад 4.2. *Розв'язати рівняння Фредгольма*

$$y(x)=\lambda\int_0^1 xs^2y(s)\,ds.$$

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді $y(x) = \lambda C_1 x$. Тоді

$$\lambda C_1 x = \lambda \int_0^1 x s^2 \lambda C_1 s\, ds,$$

звідки після очевидних спрощень одержуємо, що єдиним характеристичним числом є $\lambda = 4$. Для цього значення λ коефіцієнт C_1 можна вибрати довільно. Беручи $C_1 = 1/4$, одержуємо власну функцію $y(x) = x$. А для $\lambda \neq 4$ єдиним розв'язком є $y(x) = 0$. ●

Розглянемо тепер спряжене однорідне інтегральне рівняння

$$z(x) = \lambda \int_a^b K^*(x,s) z(s) ds \tag{4.9}$$

з виродженим ядром

$$K^*(x,s) = K(x,s) = \sum_{i=1}^m a_i(s) b_i(x).$$

Записавши рівняння (4.9) у вигляді

$$z(x) = \lambda \sum_{i=1}^m b_i(x) \int_a^b a_i(s) z(s)\, ds,$$

позначимо

$$C_i^* = \int_a^b a_i(s) z(s)\, ds, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

$$\alpha_{ij}^* = \int_a^b b_j(s) a_i(s)\, ds = \alpha_{ji}, \quad i, j = 1, 2, ..., m.$$

Тоді для визначення чисел C_i^* отримуємо однорідну систему лінійних рівнянь з матрицею, транспонованою до матриці системи рівнянь (4.8). Її визначник $D^*(\lambda) = D(\lambda) = 0$, а сама система для такого значення λ також має p лінійно незалежних ненульових розв'язків $\left(C_1^{*(k)}, C_2^{*(k)}, ..., C_m^{*(k)}\right)$, $k = 1, 2, ..., p$, яким відповідають p лінійно незалежних розв'язків

$$z_k(x) = \lambda \sum_{i=1}^m C_i^{*(k)} b_i(x), \quad k = 1, 2, ..., p,$$

спряженого однорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром. Отже, доведено таке твердження:

Теорема 4.2 (друга теорема Фредгольма). *Лінійне однорідне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром і спряжене до нього однорідне рівняння мають однакову кількість лінійно незалежних розв'язків.*

Наприклад, для рівняння $z(x)=\lambda\int\limits_0^1 x^2 s z(s)\,ds$, спряженого до рівняння $y(x)=\lambda\int\limits_0^1 x s^2 y(s) ds$, характеристичному числу $\lambda=4$ відповідає власна функція $z(x)=x^2$.

Розглянемо неоднорідне рівняння (4.2) з виродженим ядром, де λ – характеристичне число. Шукаючи розв'язок цього рівняння у вигляді (4.4), отримуємо неоднорідну систему лінійних рівнянь (4.6), визначник якої дорівнює нулю. Для сумісності цієї системи необхідно і достатньо, щоб стовпець її вільних членів був ортогональний до всіх розв'язків спряженої однорідної системи, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^{*(k)} f_i = 0, \quad k=1,2,\ldots,p,$$

або, що те саме,

$$\sum_{i=1}^{m} C_i^{*(k)} \int\limits_a^b b_i(s) f(s) ds = 0. \tag{4.10}$$

Помноживши обидві частини рівності (4.10) на λ, запишемо її у вигляді

$$\int\limits_a^b \lambda \sum_{i=1}^{m} C_i^{*(k)} b_i(s) f(s)\,ds = 0,$$

тобто

$$\int\limits_a^b z_k(s) f(s) ds = 0, \qquad k=1,2,\ldots,p.$$

Таким чином, доведено таке твердження:

Теорема 4.3 (третя теорема Фредгольма). *Неоднорідне лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має розв'язок тоді і тільки тоді, коли його вільний член ортогональний до всіх розв'язків відповідного спряженого однорідного рівняння.*

Зауважимо, що умови ортогональності будуть вочевидь виконані, якщо

$$\int_a^b f(s)b_i(s)\,ds = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Повертаючись до інтегрального рівняння з прикладу (4.1), відзначимо, що для характеристичного значення $\lambda = 4$ воно не має розв'язку, оскільки на відрізку $[0,1]$ функції $f(x) = x^2$, $z(x) = x^2$ не є ортогональними, бо

$$\int_0^1 z(s)f(s)ds = \int_0^1 s^2 s^2 ds = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Як наслідок з теорем 4.1–4.3 випливає:

Теорема 4.4 (теорема про альтернативу). *Якщо лінійне однорідне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має лише тривіальний розв'язок, то відповідне неоднорідне рівняння завжди має єдиний розв'язок. Якщо лінійне однорідне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром має нетривіальний розв'язок, то відповідне неоднорідне рівняння залежно від вільного члена або не має розв'язку, або має нескінченну кількість розв'язків.*

§ 4.3. Теореми Фредгольма для довільних лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (4.2) з довільним неперервним у квадраті $Q = [a,b;\, a,b]$ ядром $K(x,s)$ і вільним членом $f(x) \in C[a,b]$. Як зазначено у §3.2, це рівняння для всіх λ таких, що

$$|\lambda|\, M(b-a) < 1,$$

має єдиний неперервний розв'язок $y(x)$, який визначається формулою

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) f(s)\,ds,$$

де $R(x,s;\lambda)$ – резольвента ядра $K(x,s)$.

За теоремою Вейєрштраса кожне неперервне у квадраті Q ядро $K(x,s)$ можна зобразити як

$$K(x,s) = K_B(x,s) + K_\varepsilon(x,s),$$

де ядро

$$K_B(x,s) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(s)$$

є виродженим, а ядро $K_\varepsilon(x,s)$ за нормою простору $C[a,b]$ може бути як завгодно малим. Тому задане рівняння можемо записати як

$$y(x) = \lambda A_B y(x) + \lambda A_\varepsilon y(x) + f(x),$$

де

$$A_B y(x) = \int_a^b K_B(x,s) y(s)\,ds, \qquad A_\varepsilon y(x) = \int_a^b K_\varepsilon(x,s) y(s)\,ds.$$

Нехай ρ – довільна стала. Виберемо ядро $K_\varepsilon(x,s)$ так, щоб

$$\left|K_\varepsilon(x,s)\right| < \varepsilon, \qquad \rho\varepsilon(b-a) < 1.$$

Тоді для всіх λ таких, що $|\lambda| < \rho$, рівняння

$$y(x) = \lambda A_\varepsilon y(x) + g(x)$$

для будь-якої функції $g(x) \in C[a,b]$ має єдиний неперервний на відрізку $[a,b]$ розв'язок

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^b R_\varepsilon(x,s;\lambda) g(s)\,ds,$$

де $R_\varepsilon(x,s;\lambda)$ – резольвента ядра $K_\varepsilon(x,s)$.

Якщо позначити

$$g(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_B(x,s) y(s)\,ds,$$

то отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} y(x) = {} & f(x) + \lambda \int_a^b R_\varepsilon(x,s;\lambda) f(s)\,ds + \\ & + \lambda \int_a^b \left(K_B(x,s) + \lambda \int_a^b R_\varepsilon(x,\tau;\lambda) K_B(\tau,s)\,d\tau \right) y(s)\,ds, \end{aligned} \tag{4.11}$$

яке еквівалентне рівнянню (4.2).

Перші два доданки правої частини рівняння (4.11) є відомими функціями. Крім того,

$$\int_a^b R_\varepsilon(x,\tau;\lambda)K_B(\tau,s)\,d\tau = \int_a^b R_\varepsilon(x,\tau;\lambda)\sum_{k=1}^n a_k(\tau)b_k(s)\,d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^n b_k(s)\int_a^b R_\varepsilon(x,\tau;\lambda)a_k(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^n A_k(x;\lambda)b_k(s),$$

тобто ядро рівняння (4.11) є виродженим.

Зауважимо, що аналогічно можна звести до рівняння з виродженим ядром довільне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду, ядро якого інтегровне з квадратом в області Q, а функція $f(x)$ інтегровна з квадратом на відрізку $[a,b]$. При цьому $K_\varepsilon(x,s)$ вибирають так, щоб виконувалися нерівності:

$$\iint_Q \left|K_\varepsilon(x,s)\right|^2 dx\,ds < \varepsilon^2, \qquad \rho\varepsilon < 1.$$

Користуючись можливістю зведення довільного лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду до рівняння з виродженим ядром, можна довести, що теореми Фредгольма та теорема про альтернативу справджуються для довільних лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Враховуючи ще й формули Фредгольма, остаточно отримуємо такі чотири ***теореми Фредгольма*** та ***альтернативу Фредгольма***:

Теорема 4.5. *Якщо значення λ не є характеристичним, то лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду і спряжене до нього рівняння мають єдиний розв'язок для довільної інтегровної з квадратом на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$. Відповідні однорідні рівняння при цьому мають лише тривіальні розв'язки.*

Теорема 4.6. *Якщо значення λ є характеристичним, то лінійне однорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду і спряжене до нього однорідне рівняння мають нетривіальні розв'язки. При цьому кількість лінійно незалежних розв'язків однорідного інтегрального рівняння скінченна та збігається з кількістю лінійно незалежних розв'язків спряженого однорідного рівняння.*

Теорема 4.7. *Для того, щоб лінійне неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду мало розв'язок, необхідно і достатньо, щоб його вільний член $f(x)$ був ортогональним до всіх розв'язків відповідного спряженого однорідного рівняння.*

Теорема 4.8. *Лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду має не більше як зліченну кількість характеристичних чисел, які можуть скупчуватися лише на нескінченності.*

Теорема 4.9 (*альтернатива Фредгольма*). *Або лінійне неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду має єдиний розв'язок для довільної правої частини, або відповідне однорідне рівняння має нетривіальні розв'язки.*

Теореми (4.5)–(4.9) є окремими випадками відповідних теорем та альтернативи Фредгольма для операторних рівнянь Фредгольма другого роду

$$y = \lambda A y + f$$

з довільним компактним оператором A.

Відзначимо, що теореми Фредгольма справджуються також для деяких нефредгольмових рівнянь, зокрема, для рівнянь, ядра яких мають слабку особливість (§ 3.5). Але у загальному випадку для довільних нефредгольмових рівнянь вони не справджуються.

§ 4.4. Метод вироджених ядер

Відносна простота способу розв'язування інтегральних рівнянь з виродженими ядрами приводить до ідеї про заміну розв'язування довільних лінійних рівнянь Фредгольма другого роду розв'язуванням рівнянь з виродженим ядром.

У §2.5, порівнюючи розв'язки операторних рівнянь

$$\tilde{y} = \lambda A_0 \tilde{y} + \tilde{f}\ , \qquad y = \lambda A y + f,$$

де $A = A_0 + \Delta A$, отримана оцінка для норми різниці цих розв'язків:

$$\|y - \tilde{y}\| \le$$

$$\le \frac{\left\|(I - \lambda A_0)^{-1}\right\|^2 \cdot |\lambda| \cdot \|\Delta A\|}{1 - \left\|(I - \lambda A_0)^{-1}\right\| \cdot |\lambda| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \|f\| + \left\|(I - \lambda A_0)^{-1}\right\| \cdot \left\|f - \tilde{f}\right\|. \qquad (4.12)$$

Розглянемо тепер два лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x), \tag{4.13}$$

$$\tilde{y}(x) = \lambda\int_a^b K_0(x,s)\tilde{y}(s)ds + \tilde{f}(x). \tag{4.14}$$

Припустимо, що резольвента $R_0(x,s;\lambda)$ ядра $K_0(x,s)$ відома і для всіх $x \in [a,b]$

$$\int_a^b \left|K(x,s) - K_0(x,s)\right| ds < \varepsilon,$$

$$\int_a^b \left|R_0(x,s;\lambda)\right| ds < M, \quad |f(x) - \tilde{f}(x)| < \eta.$$

Тоді для операторів Фредгольма

$$Ay(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds,$$

$$A_0 y(x) = \int_a^b K_0(x,s)y(s)\,ds$$

у просторі $C[a,b]$ отримуємо оцінки

$$\left\|(I - \lambda A_0)^{-1}\right\| \le 1 + |\lambda| M, \qquad \left\|\Delta A\right\| \le \varepsilon.$$

Звідси випливає, що за умови

$$|\lambda|\left(1 + |\lambda| M\right)\varepsilon < 1$$

інтегральні рівняння (4.13), (4.14) мають єдині розв'язки, для яких, з врахуванням (4.12), маємо оцінку

$$\left|y(x) - \tilde{y}(x)\right| < \frac{(1 + |\lambda| M)^2 |\lambda| \varepsilon}{1 - (1 + |\lambda| M)|\lambda|\varepsilon} m + \left(1 + |\lambda| M\right)\eta,$$

де $m = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

З цієї оцінки випливає, що розв'язок лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду у просторі $C[a,b]$ неперервно залежить від ядра та вільного члена. Аналогічно можна обґрунтувати таку неперервну залежність у просторі $L_2[a,b]$.

Неперервну залежність розв'язків лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду від ядер можна використати для їх наближеного розв'язування, замінюючи ядро близьким до нього виродженим ядром. Такий спосіб наближеного розв'язування інтегральних рівнянь називають ***методом вироджених ядер***.

Проілюструємо застосування цього методу вироджених ядер на прикладі.

Приклад 4.3. *Наближено розв'язати рівняння*

$$y(x)=\int_0^1 \sin(xs^2)y(s)\,ds+x^2$$

методом вироджених ядер.

Розв'язання. Задане рівняння наближено замінимо рівнянням з виродженим ядром

$$\tilde{y}(x)=\int_0^1 xs^2\tilde{y}(s)\,ds+x^2,$$

розв'язком якого є функція $\tilde{y}(x)=4x/15+x^2$ (приклад 2.1).

Оскільки для всіх $x,s\in[0,1]$

$$\left|K(x,s)-K_0(x,s)\right|=\left|\sin(xs^2)-xs^2\right|=$$

$$=\left|\left(xs^2-\frac{(xs^2)^3}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{(xs^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right)-xs^2\right|<\frac{(xs^2)^3}{6},$$

то

$$\int_0^1 \left|K(x,s)-K_0(x,s)\right|ds<\int_0^1 \frac{x^3s^6}{6}\,ds=\frac{x^3}{42}\le\frac{1}{42}.$$

Крім того, за відомою резольвентою $R_0(x,s;\lambda)=4xs^2/3$ знаходимо, що

$$\int_0^1 \left|R_0(x,s;\lambda)\right|ds=\int_0^1 \frac{4}{3}xs^2ds=\frac{4}{9}x\le\frac{4}{9}.$$

Також

$$\max_{x\in[0,1]}\left|f(x)\right|=\max_{x\in[0,1]}|x^2|=1,\qquad \tilde{f}(x)=f(x),$$

$$\lambda=1,\qquad \varepsilon=1/42,\qquad M=4/9,\qquad \eta=0,\qquad m=1,$$

$$|\lambda|\big(1+|\lambda|M\big)\varepsilon=1\cdot\left(1+1\cdot\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{1}{42}=\frac{13}{378}<1.$$

Отже, для точного розв'язку $y(x)$ на відрізку [0;1] маємо оцінку

$$\left|y(x)-\tilde{y}(x)\right|<\frac{\left(1+1\cdot\frac{4}{9}\right)^2\cdot 1\cdot\frac{1}{42}}{1-\left(1+1\cdot\frac{4}{9}\right)\cdot 1\cdot\frac{1}{42}}\cdot 1+\left(1+1\cdot\left(\frac{4}{9}\right)\right)\cdot 0\approx 0{,}05. \quad \bullet$$

Рекомендована література: [1, с. 87–101], [3, с. 37–51], [5, с. 327–337], [6, с. 294–305], [7, с. 59–81], [8, с. 15–28], [9, с. 48–59], [20, с. 389–400].

Питання до розділу 4

1. Сформулюйте означення та наведіть приклади вироджених ядер.
2. Які умови повинні задовольняти функції $a_i(x)$ та $b_i(s)$ у виродженому ядрі $K(x,s)=\sum_{i=1}^{m}a_i(x)b_i(s)$?
3. У якому вигляді шукають розв'язок лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром?
4. Опишіть спосіб практичного знаходження коефіцієнтів у формулі для представлення розв'язку лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром.
5. Сформулюйте теореми Фредгольма для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з виродженим ядром.
6. У чому полягає альтернатива Фредгольма для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з виродженим ядром?
7. Яким чином лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з довільним фредгольмовим ядром можна звести до рівняння з виродженим ядром?
8. Сформулюйте теореми та альтернативу Фредгольма для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з довільним фредгольмовим ядром.

9. Як, на вашу думку, можна було би сформулювати теореми Фредгольма для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду з виродженим ядром?
10. Охарактеризуйте метод вироджених ядер для наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.

Вправи до розділу 4

1. Запишіть формули для представлення розв'язків інтегральних рівнянь:

   а) $y(x)=2\int_0^1 xsy(s)\,ds+e^x$; б) $y(x)=\lambda\int_0^1 (x-s+xs)y(s)\,ds+x$;

   в) $y(x)=2\int_0^1 (x-s)^2 y(s)\,ds+3x^2$; г) $y(x)=\int_0^1 \sin(x-s)y(s)\,ds.$

2. Розв'яжіть зведенням до системи алгебраїчних рівнянь лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром:

   а) $y(x)=\int_0^1 x^2s^3y(s)ds+5x^2$;

   б) $y(x)=\lambda\int_0^{\pi/2} \sin x\cos s\, y(s)\,ds+\sin x$;

   в) $y(x)+4\int_0^1 (x^2s-xs^2)\,y(s)ds=4x^2/3$;

   г) $y(x)=\int_0^{\pi} \sin(x+s)\,y(s)\,ds+1.$

3. Знайдіть усі значення параметрів b та c, для яких рівняння $y(x)+\lambda\int_0^1 x^2sy(s)\,ds=bx+c$ матиме розв'язок для всіх значень параметра λ.

4. Знайдіть наближений розв'язок рівняння $y(x)=\int_0^1 e^{xs}y(s)\,ds+1,$ замінивши його ядро $K(x,s)=e^{xs}$ ядром $K_0(x,s)=xs+1.$

Розділ 5
ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО РОДУ

§ 5.1. Метод послідовних наближень для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s)\, ds + f(x). \tag{5.1}$$

Припустимо, що ядро $K(x,s)$ неперервне у квадраті $Q = [a,b;\, a,b]$, причому $|K(x,s)| \le M$, а функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$.

Визначимо відображення

$$Ay(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x). \tag{5.2}$$

Оскільки ядро $K(x,s)$ неперервне, то для кожної неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $y(x)$ відображення (5.2) також буде неперервною функцією, тобто $A: C[a,b] \to C[a,b]$. Внаслідок принципу стискаючих відображень (§ 2.1) для існування та єдиності нерухомої точки відображення (5.2) у просторі $C[a,b]$ достатньо, щоб воно було стискаючим.

Встановимо умову стискання відображення (5.2). Оскільки для всіх $x \in [a,b]$

$$\left| A\bar{y}(x) - A\bar{\bar{y}}(x) \right| =$$

$$= \left| \lambda \int_a^b K(x,s)\bar{y}(s)\, ds + f(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\bar{\bar{y}}(s) ds - f(x) \right| \le$$

$$\le |\lambda| \int_a^b |K(x,s)| \cdot \left| \bar{y}(s) - \bar{\bar{y}}(s) \right| ds \le |\lambda| \int_a^b M \rho\left(\bar{y}, \bar{\bar{y}}\right) ds =$$

$$= |\lambda|\, M (b-a) \rho\left(\bar{y}, \bar{\bar{y}}\right),$$

то

$$\rho\left(A\overline{y}, A\overline{\overline{y}}\right) \le |\lambda| M(b-a)\rho\left(\overline{y}, \overline{\overline{y}}\right).$$

Отже, відображення (5.2) буде стискаючим, якщо

$$|\lambda| M(b-a) < 1. \tag{5.3}$$

За виконання умови (5.3) інтегральне рівняння (5.1) матиме єдиний розв'язок у просторі $C[a,b]$. Знайти його можна ***методом послідовних наближень***. Для цього потрібно:

1. Вибрати довільну неперервну на відрізку $[a,b]$ функцію $y_0(x)$. Зокрема, доцільно взяти $y_0(x) = f(x)$.

2. Знайти послідовні наближення за формулами

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y_{n-1}(s)\, ds + f(x), \quad n \in \mathbf{N}.$$

3. Знайти розв'язок $y(x)$ рівняння (5.1), здійснивши граничний перехід за формулою $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$.

Оскільки у просторі $C[a,b]$ збіжність є рівномірною, то послідовність $y_n(x)$ збігається до розв'язку $y(x)$ рівномірно.

Аналогічно, можна отримати дещо слабшу умову стискання

$$|\lambda| \max_{x\in[a,b]} \int_a^b |K(x,s)|\, ds < 1. \tag{5.4}$$

Розв'язок інтегрального рівняння (5.1) можна шукати також у просторі $L_2[a,b]$. Оскільки за нерівністю Коші – Буняковського

$$\int_a^b \left| \int_a^b K(x,s) y(s)\, ds \right|^2 dx \le \int_a^b \left(\int_a^b |K(x,s)|^2 ds \cdot \int_a^b |y(s)|^2\, ds \right) dx =$$

$$= \iint_Q |K(x,s)|^2 ds\, dx \cdot \int_a^b |y(s)|^2 ds < +\infty,$$

то відображення $A: L_2[a,b] \to L_2[a,b]$. При цьому умову стискання отримуємо з нерівності

$$\rho^2\left(A\overline{y}, A\overline{\overline{y}}\right) = \int_a^b \left(A\overline{y}(x) - A\overline{\overline{y}}(x)\right)^2 dx =$$

$$= \lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)\left(\overline{y}(s) - \overline{\overline{y}}(s)\right) ds \right)^2 dx \le$$

$$\le \lambda^2 \int_a^b \left(\int_a^b K^2(x,s)ds \cdot \int_a^b \left(\overline{y}(s) - \overline{\overline{y}}(s) \right)^2 ds \right) dx =$$

$$= \lambda^2 \iint_Q K^2(x,s)\, dsdx \cdot \rho^2\left(\overline{y}, \overline{\overline{y}}\right) \le \lambda^2 B^2 \rho^2 \left(\overline{y}, \overline{\overline{y}}\right).$$

Звідси випливає, що $\rho\left(A\overline{y}, A\overline{\overline{y}}\right) \le |\lambda| B \rho\left(\overline{y}, \overline{\overline{y}}\right)$, тобто відображення (5.2) у просторі $L_2[a,b]$ є стискаючим, якщо

$$|\lambda| B < 1. \tag{5.5}$$

Оскільки $B \le M(b-a)$, то у просторі $L_2[a,b]$ можна отримати єдиний розв'язок для ширшого класу значень параметра λ, ніж у просторі $C[a,b]$. Знайти такий розв'язок можна методом послідовних наближень так само, як і у просторі $C[a,b]$. Проте послідовність $y_n(x)$ збігатиметься до розв'язку $y(x)$ лише у середньому квадратичному.

Проілюструємо застосування методу послідовних наближень на прикладі.

Приклад 5.1. *Розв'язати рівняння*

$$y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)\, ds + x^2.$$

Розв'язання. Оскільки $\lambda = 1$, $K(x,s) = xs^2$, $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = x^2$, $M = \max\limits_{x,s \in [0,1]} |xs^2| = 1$, то у просторі $C[0,1]$ умова (5.3) не виконується. Оскільки $B^2 = \iint_Q (xs^2)^2 dxds = 1/15$, то $|\lambda| B = \sqrt{15}/15 < 1$, тобто можемо використати метод послідовних наближень у $L_2[0,1]$.

Нехай $y_0(x) = f(x) = x^2$. Далі послідовно одержуємо:

$$y_1(x) = \int_0^1 xs^2 s^2 ds + x^2 = x\int_0^1 s^4 ds + x^2 = \frac{1}{5}x + x^2,$$

$$y_2(x) = \int_0^1 xs^2 \left(\frac{1}{5}s + s^2 \right) ds + x^2 = \left(\frac{1}{5 \cdot 4} + \frac{1}{5} \right) x + x^2,$$

$$y_3(x) = \int_0^1 xs^2 \left(\left(\frac{1}{5 \cdot 4} + \frac{1}{5} \right) s + s^2 \right) ds + x^2 = \left(\frac{1}{5 \cdot 4^2} + \frac{1}{5 \cdot 4} + \frac{1}{5} \right) x + x^2.$$

Методом математичної індукції можна встановити, що

$$y_n(x) = \frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) x + x^2.$$

Отже,

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) x + x^2 =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} + x^2 = \frac{4}{15} x + x^2. \quad \bullet$$

Зауважимо, що оскільки справджується умова (5.4):

$$|\lambda| \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 |K(x,s)|\, ds = \max_{x\in[0,1]} \int_0^1 xs^2 ds = \max_{x\in[0,1]} \frac{x}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

то розв’язати задане інтегральне рівняння методом послідовних наближень можна було й у просторі $C[0,1]$.

У загальному випадку умовою застосовності методу послідовних наближень є виконання нерівності $|\lambda| \cdot \|A\| < 1$.

Метод послідовних наближень можна застосовувати також для розв’язування систем лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

$$y_i(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b K_{ij}(x,s) y_j(s) ds + f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.6}$$

де

$$\iint_Q |K_{ij}(x,s)|^2 \, dx\, ds < \infty, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad Q = [a,b; a,b],$$

$$\int_a^b |f_i(x)|^2 dx < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

У §1.1 показано, як систему рівнянь (5.6) можна звести до одного інтегрального рівняння (1.6), якщо

$$|\lambda| \left(\sum_{i,j=1}^{n} \iint_Q |K_{ij}(x,s)|^2 \, dx\, ds \right)^{1/2} < 1. \tag{5.7}$$

Проте за виконання умови (5.7) застосувати метод послідовних наближень для розв’язування системи (5.6) можна і без її зведення до одного рівняння. Достатньо вибрати початкові наближення, наприклад, $y_i^{(0)}(x) = f_i(x),\ i = 1, 2, \dots, n,$ побудувати послідовні наближення за формулами

$$y_i^{(k)}(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b K_{ij}(x,s) y_j^{(k-1)}(s) ds + f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,\ k \in \mathbf{N},$$

та знайти розв'язок

$$y_i(x) = \lim_{k \to \infty} y_i^{(k)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

§ 5.2. Метод послідовних наближень для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s) y(s)\, ds + f(x) \tag{5.8}$$

і припустимо, що функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$, а ядро $K(x,s)$ – неперервне в трикутнику $\Delta = \{(x,s) : a \le s \le x \le b\}$, $|K(x,s)| \le M$.

Визначимо у просторі $C[a,b]$ відображення

$$Ay(x) = \lambda \int_a^x K(x,s) y(s)\, ds + f(x). \tag{5.9}$$

За властивістю інтегралів зі змінною верхньою межею при накладених умовах функція $Ay(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$. Тому $A : C[a,b] \to C[a,b]$, причому з нерівності

$$|Ay(x) - Ay_0(x)| = |\lambda| \left| \int_a^x K(x,s) \big(y(s) - y_0(s) \big) ds \right| \le$$

$$\le |\lambda| M \rho(y, y_0)(x-a) \le |\lambda| M (b-a) \rho(y, y_0), \quad x \in [a,b],$$

випливає неперервність відображення (5.9).

Покажемо, що деякий степінь відображення A є стискаючим відображенням. Справді,

$$\left| A\overline{y}(x) - A\overline{\overline{y}}(x) \right| \le |\lambda| M (x-a) \rho\left(\overline{y}, \overline{\overline{y}} \right),$$

$$\left| A^2\overline{y}(x) - A^2\overline{\overline{y}}(x) \right| = \left| A\left(A\overline{y}(x) \right) - A\left(A\overline{\overline{y}}(x) \right) \right| =$$

$$=|\lambda|\left|\int_a^x K(x,s)\left(A\overline{y}(s)-A\overline{\overline{y}}(s)\right)ds\right|\le|\lambda|M\int_a^x|\lambda|M(s-a)\rho\left(\overline{y},\overline{\overline{y}}\right)ds=$$

$$=|\lambda|^2 M^2\frac{(x-a)^2}{2}\rho\left(\overline{y},\overline{\overline{y}}\right),$$

$$\dots\ \dots\ \dots,$$

$$\left|A^n\overline{y}(x)-A^n\overline{\overline{y}}(x)\right|\le|\lambda|^n M^n\frac{(x-a)^n}{n!}\rho\left(\overline{y},\overline{\overline{y}}\right),\quad x\in[a,b].$$

Звідси

$$\rho\left(A^n\overline{y},A^n\overline{\overline{y}}\right)\le\alpha_n\rho\left(\overline{y},\overline{\overline{y}}\right),$$

де

$$\alpha_n=|\lambda|^n M^n\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Оскільки за ознакою Д'Аламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ збіжний для всіх λ, то $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ для кожного λ. Отже, для кожного λ знайдеться номер n, для якого $\alpha_n<1$. При цьому відображення A^n буде стискаючим.

З доведеного та повноти простору $C[a,b]$ випливає, що для всіх λ відображення A має єдину нерухому точку. Відповідно, лінійне інтегральне рівняння Вольтерри (5.8) з неперервним ядром і неперервним вільним членом для кожного λ має у просторі $C[a,b]$ єдиний розв'язок. Знайти його можна за допомогою ***методу послідовних наближень***:

1. Вибираємо довільну неперервну на відрізку $[a,b]$ функцію $y_0(x)$. Зокрема, доцільно взяти $y_0(x)=f(x)$.

2. Шукаємо послідовні наближення за формулами

$$y_n(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)y_{n-1}(s)\,ds+f(x),\quad n\in\mathbf{N}.$$

3. Шукаємо розв'язок $y(x)$ рівняння (5.8) за формулою

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}y_n(x).$$

При цьому послідовність $y_n(x)$ збігається до $y(x)$ рівномірно.

Зауважимо, що аналогічно можна встановити існування та єдиність розв'язку рівняння (5.8) для кожного λ і у просторі $L_2[a,b]$. Пропонуємо читачам обґрунтувати це твердження самостійно у вигляді вправи.

Приклад 5.2. *Розв'язати методом послідовних наближень лінійне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду*

$$y(x)=\int_0^x (x-s)y(s)ds+1.$$

Розв'язання. Нехай $y_0(x)=f(x)=1$. Тоді

$$y_1(x)=1+\int_0^x (x-s)ds=1+x^2-\frac{x^2}{2}=1+\frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x)=1+\int_0^x (x-s)\left(1+\frac{s^2}{2}\right)ds=$$

$$=1+x^2-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{8}=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}.$$

Доведемо методом математичної індукції, що

$$y_n(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Для $n=1$ ця рівність правильна. Припустивши її правильність для всіх $n\le k$, для $n=k+1$ отримуємо

$$y_{k+1}(x)=1+\int_0^x (x-s)y_k(s)\,ds=$$

$$=1+\int_0^x (x-s)\left(\left(1+\frac{s^2}{2!}+\frac{s^4}{4!}+\ldots+\frac{s^{2(k-1)}}{\left(2(k-1)\right)!}\right)+\frac{s^{2k}}{(2k)!}\right)ds=$$

$$=1+\int_0^x (x-s)\left(y_{k-1}(s)+\frac{s^{2k}}{(2k)!}\right)ds=y_k(x)+\int_0^x (x-s)\frac{s^{2k}}{(2k)!}ds=$$

$$=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\frac{x^{2(k+1)}}{\left(2(k+1)\right)!}.$$

Таким чином, остаточно одержуємо розв'язок

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=\operatorname{ch}x. \quad \bullet$$

§ 5.3. Поняття про метод послідовних наближень для нелінійних інтегральних рівнянь

Метод послідовних наближень можна застосовувати і для розв'язування деяких нелінійних інтегральних рівнянь. Проілюструємо це на прикладі рівняння Урисона

$$y(x)=\lambda\int_a^b K\left(x,s,y(s)\right)ds+f(x) \tag{5.10}$$

у просторі $C[a,b]$. Припустимо, що функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a,b]$, а функція $K(x,s,y)$ – неперервною у паралелепіпеді

$$V=\left\{(x,s,y): a\le x\le b,\ a\le s\le b,\ -m\le y\le m\right\},$$

де m – достатньо велике число, і задовольняє у ньому умову Ліпшиця за змінною y:

$$\left|K\left(x,s,\bar{y}\right)-K\left(x,s,\bar{\bar{y}}\right)\right|\le L\left|\bar{y}-\bar{\bar{y}}\right|.$$

Розглянемо відображення $A: C[a,b]\to C[a,b]$ таке, що

$$Ay(x)=\lambda\int_a^b K\left(x,s,y(s)\right)ds+f(x), \tag{5.11}$$

і встановимо достатні умови його стискання. Для цього відзначимо, що для кожного $x\in[a,b]$

$$\left|A\bar{y}(x)-A\bar{\bar{y}}(x)\right|\le|\lambda|\int_a^b\left|K\left(x,s,\bar{y}(s)\right)-K\left(x,s,\bar{\bar{y}}(s)\right)\right|ds\le$$

$$\le|\lambda|L\int_a^b\left|\bar{y}(s)-\bar{\bar{y}}(s)\right|ds\le|\lambda|L(b-a)\rho\left(\bar{y},\bar{\bar{y}}\right),$$

тобто

$$\rho\left(A\bar{y},A\bar{\bar{y}}\right)\le|\lambda|L(b-a)\rho\left(\bar{y},\bar{\bar{y}}\right).$$

Таким чином, якщо

$$|\lambda|L(b-a)<1, \tag{5.12}$$

то відображення (5.11) є стискаючим і, отже, має єдину нерухому точку. Відповідно рівняння (5.10) у паралелепіпеді V матиме єдиний розв'язок, який можна отримати у такий спосіб:

1. Вибираємо довільну неперервну на відрізку $[a,b]$ функцію $y_0(x)$, наприклад, $y_0(x) = f(x)$.

2. Шукаємо послідовні наближення за формулами

$$y_n(x) = \lambda \int_a^b K\left(x, s, y_{n-1}(s)\right) ds + f(x), \quad n \in \mathbf{N}.$$

3. Шукаємо розв'язок $y(x)$ рівняння (5.10) за формулою

$$y(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x).$$

При цьому послідовність $y_n(x)$ збігається до $y(x)$ рівномірно.

Зауважимо, що для виконання умови Ліпшиця за змінною y достатньо, щоб функція $K(x,s,y)$ мала у паралелепіпеді V обмежену частинну похідну $K'_y(x,s,y)$, тобто

$$\left|K'_y(x,s,y)\right| \le M.$$

Тоді з теореми Лагранжа про скінченні прирости отримуємо

$$\left|K\left(x,s,\bar{y}\right) - K\left(x,s,\bar{\bar{y}}\right)\right| = \left|K'_y\left(x,s,\eta\right)\right| \cdot \left|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\right| \le M\left|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\right|,$$

де $\bar{y} \le \eta \le \bar{\bar{y}}$. Отже, можна взяти $L = M$.

Відзначимо також, що для лінійних рівнянь з обмеженим ядром $K(x,s)$, $\left|K(x,s)\right| \le M$, справджується нерівність

$$\left|\left(K(x,s)y(s)\right)_y'\right| = \left|K(x,s)\right| \le M.$$

Таким чином, умову стискання (5.3) для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду можна розглядати як окремий випадок умови (5.12).

Аналогічну умову стискання можна отримати і для нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^x K\left(x, s, y(s)\right) ds + f(x), \quad a \le s \le b.$$

Зокрема, якщо

$$\lambda = 1, \quad a = x_0, \quad f(x) \equiv y_0, \quad K\left(x,s,y(s)\right) = F\left(s, y(s)\right),$$

то одержуємо відому теорему Пікара про існування та єдиність розв'язку задачі Коші

$$y' = F(x,y), \; y(x_0) = y_0.$$

§ 5.4. Наближене розв'язування лінійних інтегральних рівнянь другого роду методом простої ітерації

Метод послідовних наближень у загальному випадку об'єднує багато ітераційних алгоритмів і процесів. Часто його ототожнюють з процесом простої ітерації, що фактично було зроблено у §§ 5.1–5.3. Але насправді метод простої ітерації є лише одним з багатьох різновидів методу послідовних наближень.

З попереднього випливає, що метод простої ітерації передбачає реалізацію трьох етапів: вибір початкового наближення, побудову послідовності наближень і знаходження її границі. Проте на практиці не завжди вдається повністю реалізувати всі три етапи, а іноді у цьому просто немає потреби – достатньо обмежитися наближенням $y_n(x)$.

Оцінимо похибку такого наближення. У § 2.5 для операторного рівняння $y = \lambda Ay + f$, де $|\lambda| \cdot \|A\| < 1$, отримано оцінку похибки:

$$\|y - y_n\| \le |\lambda|^n \cdot \|A\|^n \cdot \|y - y_0\| = \frac{|\lambda|^{n+1} \cdot \|A\|^{n+1} \cdot \|f\|}{1 - |\lambda| \cdot \|A\|},$$

де $y_n = \lambda A y_{n-1} + f$, $n \in \mathbf{N}$, $y_0 = f$.

Якщо A – інтегральний оператор Фредгольма

$$Ay(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)ds,$$

то позначимо

$$q_1 = |\lambda| \max_{x \in [a,b]} \int_a^b |K(x,s)|\, ds < 1,$$

$$q_2 = |\lambda|\, B = |\lambda| \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2\, ds\, dx \right)^{1/2} < 1.$$

Оскільки

$$|\lambda| \cdot \|A\|_{C[a,b]} \le q_1 < 1, \qquad |\lambda| \cdot \|A\|_{L_2[a,b]} \le q_2 < 1,$$

то маємо такі оцінки для похибок наближеного розв'язку $\tilde{y}(x) = y_n(x)$ лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds+f(x)$$

при його розв'язуванні методом простої ітерації:

$$\|y-y_n\|_C \le q_1^n\|y-y_0\|_C = \frac{q_1^{n+1}}{1-q_1}\cdot\|f\|_C, \qquad (5.13)$$

$$\|y-y_n\|_{L_2} \le q_2^n\|y-y_0\|_{L_2} = \frac{q_2^{n+1}}{1-q_2}\cdot\|f\|_{L_2}, \qquad (5.14)$$

де

$$\|y-y_n\|_C = \max_{x\in[a,b]}|y(x)-y_n(x)|, \qquad \|f\|_C = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|,$$

$$\|y-y_n\|_{L_2} = \left(\int_a^b |y(x)-y_n(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \qquad \|f\|_{L_2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Приклад 5.3. *Оцінити похибку наближеного розв'язку* $\tilde{y}(x)=y_3(x)$ *інтегрального рівняння*

$$y(x)=\int_0^1 xs^2y(s)ds+x^2.$$

Розв'язання. У прикладі 5.1 знайдено наближення

$$y_3(x)=\frac{1}{5}\cdot\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right)x+x^2=\frac{21}{80}x+x^2.$$

Далі маємо:

$$q_1=\max_{x\in[0,1]}\int_a^b xs^2ds=\frac{1}{3}<1, \qquad q_2=B=\left(\int_a^b\int_a^b(xs^2)^2ds\,dx\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{15}}{15}<1,$$

$$\|f\|_C=\max_{x\in[0,1]}|x^2|=1, \qquad \|f\|_{L_2}=\left(\int_0^1 x^4dx\right)^{1/2}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Таким чином, згідно з (5.13), (5.14) отримуємо оцінки для похибок у просторах $C[a,b]$ і $L_2[a,b]$:

$$\|y-\tilde{y}\|_C \le \frac{3^{-4}}{1-3^{-1}}\cdot 1\approx 0,018,$$

$$\|y-\tilde{y}\|_{L_2} \le \frac{\left(\sqrt{15}/15\right)^4}{1-\sqrt{15}/15}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\approx 0,002. \quad \bullet$$

Відзначимо, що знаючи точний розв'язок $y(x) = 4x/15 + x^2$ заданого рівняння, похибку вказаного наближення можна оцінити і безпосередньо:

$$\|y - y_3\|_C = \max_{x\in[0,1]}\left|\frac{4}{15}x + x^2 - \frac{21}{80}x - x^2\right| = \max_{x\in[0,1]}\left|\frac{x}{240}\right| = \frac{1}{240} \approx 0,004,$$

$$\|y - y_3\|_{L_2} = \left(\int_0^1 \left|\frac{4}{15}x + x^2 - \frac{21}{80}x - x^2\right|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 \left|\frac{x}{240}\right|^2 dx\right)^{1/2} \approx 0,002.$$

Зауважимо, що оцінки (5.13), (5.14) дозволяють розв'язати й обернену задачу: за наперед заданою похибкою ε знайти кількість необхідних ітерацій для досягнення потрібної точності:

$$n = \left[\frac{\ln\big((1-q_1)\cdot\varepsilon\big) - \ln\|f\|_C}{\ln q_1}\right], \qquad q_1 \cdot \|f\|_C \neq 0,$$

$$n = \left[\frac{\ln\big((1-q_2)\cdot\varepsilon\big) - \ln\|f\|_{L_2}}{\ln q_2}\right], \qquad q_2 \cdot \|f\|_{L_2} \neq 0,$$

де $[\alpha]$ – ціла частина числа α.

Для вказаних похибок можна використовувати також оцінки

$$\|y - y_n\|_C \le q_1^n \cdot \frac{\|y_n - y_0\|_C}{1 - q_1^n},$$

$$\|y - y_n\|_{L_2} \le q_2^n \cdot \frac{\|y_n - y_0\|_{L_2}}{1 - q_2^n},$$

які не залежать від вибору початкового наближення $y_0(x)$.

У деяких випадках добре використати оцінку похибки n-го наближення у вигляді

$$|y(x) - y_n(x)| \le q_f q_K B^{-1} \frac{|\lambda B|^n}{1 - |\lambda B|} + q_0 q_K B^{-1} |\lambda B|^n,$$

де

$$q_f = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \qquad q_0 = \left(\int_a^b |y_0(x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

$$q_K = \left(\max_{x\in[a,b]} \int_a^b |K(x,s)|^2 ds\right)^{1/2}.$$

§ 5.5. Метод Положія

Розглянемо ще один підхід до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду за допомогою послідовних наближень – ***метод Положія***, який полягає у наступному.

Запишемо інтегральне рівняння

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds+f(x) \tag{5.15}$$

у вигляді

$$\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds=\mu y(x)+F(x),$$

де $\mu=1/\lambda,\ F(x)=-\mu f(x).$

Визначимо друге ітероване ядро

$$K_2(x,s)=\int_a^b K(x,t)K(t,s)\,dt$$

і функцію

$$N(x,s)=K_2(x,s)-2\mu K(x,s).$$

Позначимо

$$\psi(x)=y(x)+\frac{F(x)}{\mu}.$$

Відносно функції $\psi(x)$ будуватимемо всі послідовні наближення.

Нульове наближення вибираємо за формулою

$$\psi_0(x)=2\frac{F^*(x)}{\sigma},$$

де

$$F^*(x)=\int_a^b\left(\frac{1}{\mu}K_2(x,s)-K(x,s)\right)F(s)ds,$$

$$\sigma\ge\mu^2+2|\mu|\left(\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,dxds\right)^{1/2}+\int_a^b\int_a^b K^2(x,s)\,dxds=$$

$$=\mu^2+2|\mu|B+B^2.$$

Наступні послідовні наближення мають вигляд

$$\psi_n(x)=\psi_0(x)+q\psi_{n-1}(x)-\frac{2}{\sigma}\int_a^b N(x,s)\psi_{n-1}(s)\,ds,\quad n\in\mathbf{N},$$

де $q=1-2\mu^2/\sigma$.

Якщо функції $K(x,s)$ та $f(x)$ обмежені, то наведений алгоритм послідовних наближень збігається для довільних значень λ, які не є характеристичними числами, що свідчить про значно ширшу область збіжності методу, ніж у методі простої ітерації. При цьому

$$y(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x)+f(x).$$

Приклад 5.4. *Знайти методом Положія наближений розв'язок інтегрального рівняння*

$$y(x)=\int_0^1 xs^2y(s)\,ds+x^2.$$

Розв'язання. Оскільки $\lambda=1$, то $\mu=1$, $F(x)=-f(x)=-x^2$. Далі знаходимо

$$K_2(x,s)=\int_0^1 xt^2ts^2dt=\frac{xs^2}{4},$$

$$N(x,s)=\frac{xs^2}{4}-2xs^2=-\frac{7xs^2}{4},$$

$$F^*(x)=\int_0^1\left(\frac{xs^2}{4}-xs^2\right)(-s^2)ds=\frac{3x}{20}.$$

З урахуванням нерівності

$$\sigma\ge\mu^2+2|\mu|B+B^2=1+\frac{2\sqrt{15}}{15}+\frac{1}{15}\approx1{,}583,$$

беремо з надлишком $\sigma=3$. При цьому $\psi_0(x)=x/10$, $q=1/3$.

Отже, послідовні наближення шукаємо за формулами

$$\psi_n(x)=\frac{x}{10}+\frac{1}{3}\psi_{n-1}(x)-\frac{2}{3}\int_0^1\left(-\frac{7xs^2}{4}\right)\psi_{n-1}(s)\,ds,\quad n\in\mathbf{N}.$$

Послідовно знаходимо

$$\psi_1(x)=\frac{x}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{10}+\frac{7}{6}\int_0^1 xs^2\cdot\frac{s}{10}ds=\frac{13}{80}x,$$

$$\psi_2(x) = \frac{x}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{80} x + \frac{7}{6} \int_0^1 x s^2 \cdot \frac{13}{80} s\, ds = \frac{129}{640} x,$$

$$\psi_3(x) = \frac{x}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{129}{640} x + \frac{7}{6} \int_0^1 x s^2 \cdot \frac{129}{640} s\, ds = \frac{1157}{5120} x.$$

Звідси

$$y_3(x) = \psi_3(x) + x^2 = \frac{1157}{5120} x + x^2.$$

Порівнюючи з точним розв'язком

$$y(x) = 4x/15 + x^2,$$

одержуємо похибку

$$|y(x) - y_3(x)| = \left| \frac{4}{15} x + x^2 - \frac{1157}{5120} x - x^2 \right| \approx 0,04x \le 0,04. \quad \bullet$$

Пропонуємо читачам самостійно проаналізувати, чи залежить похибка від вибору σ, беручи, наприклад, $\sigma = 2$, $\sigma = 4$.

§ 5.6. Метод усереднення функціональних поправок

Ще однією модифікацією методу послідовних наближень задля підвищення швидкості збіжності та розширення області застосування ітераційних алгоритмів є ***метод усереднення функціональних поправок***.

Застосовуючи цей метод до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду, вважають, що функція $f(x)$ у рівнянні (5.15) неперервна на відрізку $[a,b]$, ядро $K(x,s)$ неперервне у квадраті $Q = [a,b;\ a,b]$ і, крім того,

$$D = h - \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)ds \ne 0, \quad h = b - a > 0.$$

Наближено розв'язуючи інтегральне рівняння (5.15) методом усереднення функціональних поправок, у першому наближенні беруть

$$y_1(x) = f(x) + \alpha_1 \int_a^b K(x,s)\, ds, \tag{5.16}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{1}{h}\int_a^b y_1(x)\,dx. \tag{5.17}$$

Зінтегрувавши обидві частини рівності (5.16) за змінною x на відрізку $[a,b]$, з урахуванням (5.17) знаходимо

$$\alpha_1 = \frac{1}{D}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким чином,

$$y_1(x) = f(x) + \frac{1}{D}\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b K(x,s)\,ds.$$

У n-му наближенні отримуємо

$$y_n(x) = f(x) + \int_a^b K(x,s)\big(y_{n-1}(s) + \alpha_n\big)\,ds =$$

$$= f(x) + \int_a^b K(x,s)\,y_{n-1}(s)\,ds + \alpha_n \int_a^b K(x,s)ds,$$

де

$$\alpha_n = \frac{1}{h}\int_a^b \delta_n(x)\,dx,$$

$$\delta_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x), \quad n = 2,3,..., \qquad \delta_1(x) = y_1(x).$$

Звідси випливає, що

$$\delta_n(x) = \int_a^b K(x,s)\delta_{n-1}(s)\,ds + (\alpha_n - \alpha_{n-1})\int_a^b K(x,s)\,ds,$$

а тому

$$h\alpha_n = \int_a^b dx\int_a^b K(x,s)\delta_{n-1}(s)\,ds + (\alpha_n - \alpha_{n-1})\int_a^b dx\int_a^b K(x,s)\,ds.$$

Отже,

$$\alpha_n = \frac{1}{D}\left(\int_a^b dx\int_a^b K(x,s)\delta_{n-1}(s)\,ds - \alpha_{n-1}\int_a^b dx\int_a^b K(x,s)\,ds\right).$$

Приклад 5.5. *Знайти наближений розв'язок рівняння*

$$y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)\,ds + x^2$$

методом усереднення функціональних поправок.

Розв'язання. Оскільки

$$D = 1 - \int_0^1 dx \int_0^1 xs^2 ds = \frac{5}{6} \neq 0,$$

то за відповідними формулами послідовно знаходимо:

$$\alpha_1 = \frac{6}{5}\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{5},$$

$$y_1(x) = x^2 + \frac{2}{5}\int_0^1 xs^2 ds = x^2 + \frac{2}{15}x,$$

$$\alpha_2 = \frac{6}{5}\left(\int_0^1 dx \int_0^1 xs^2\left(s^2 + \frac{2}{15}s\right)ds - \frac{2}{5}\int_0^1 dx \int_0^1 xs^2 ds\right) = \frac{3}{50},$$

$$y_2(x) = x^2 + \int_0^1 xs^2\left(s^2 + \frac{2}{15}s + \frac{3}{50}\right)ds = x^2 + \frac{19}{75}x.$$

Тоді

$$\delta_2(x) = y_2(x) - y_1(x) = \frac{9x}{75} = \frac{3x}{25},$$

$$\alpha_3 = \frac{6}{5}\left(\int_0^1 dx \int_0^1 xs^2 \frac{3}{25}s\,ds - \frac{3}{50}\int_0^1 dx \int_0^1 xs^2 ds\right) = \frac{3}{500},$$

$$y_3(x) = x^2 + \int_0^1 xs^2\left(s^2 + \frac{19}{75}s + \frac{3}{500}\right)ds = x^2 + \frac{199}{750}x.$$

Для похибки наближення $y_3(x)$ отримуємо оцінку

$$\left|y(x) - y_3(x)\right| = \left|\frac{4}{15}x + x^2 - \frac{199}{750}x - x^2\right| = \frac{1}{750} < 0{,}002. \quad \bullet$$

Зауважимо, що метод усереднення функціональних поправок завжди може бути реалізований за виконання достатньої умови

$$L + (1 + L)\frac{N}{D} < 1,$$

де

$$\int_a^b \left|K(x,s)\right| ds \le L, \quad x \in [a,b],$$

$$D = h - \int_a^b dx \int_a^b K(x,s)\,ds \neq 0, \quad N = \int_a^b dx \int_a^b \left|K(x,s)\right| ds.$$

Зокрема, для прикладу 5.5 ця умова виконується:

$$L=\frac{1}{3},\quad N=\frac{1}{6},\quad D=\frac{5}{6},\quad L+(1+L)\frac{N}{D}=\frac{3}{5}<1.$$

Рекомендована література: [5, с. 314–327], [6, с. 278–289], [7, с. 36–46], [9, с. 60–76], [10, с. 71–84, 183–189], [22, с. 50–58].

Питання до розділу 5

1. Які достатні умови для розв'язування методом простої ітерації
   а) лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду;
   б) нелінійних інтегральних рівнянь Урисона?
2. Чому лінійні інтегральні рівняння Вольтерри другого роду у просторах $C[a,b]$ і $L_2[a,b]$ можна розв'язування методом простої ітерації для довільного значення параметра λ?
3. Які дії необхідно виконати для знаходження методом простої ітерації розв'язку:
   а) лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду;
   б) лінійного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду;
   в) нелінійного інтегрального рівняння Урисона?
4. Яким чином метод простої ітерації застосовують до розв'язування систем лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду?
5. У чому полягає метод простої ітерації наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь другого роду?
6. Наведіть формули для оцінки похибок наближених розв'язків лінійних інтегральних рівнянь другого роду, знайдених методом простої ітерації.
7. У чому полягає метод Положія наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду? Які переваги цього методу, порівнюючи з методом простої ітерації?
9. У чому полягає метод функціональних поправок?
10. Чи можуть бути застосовані метод Положія та метод функціональних поправок для наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду? Чому?

Вправи до розділу 5

1. Методом послідовних наближень розв'яжіть лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду:

   а) $y(x) = \int_0^1 x^2 s^3 y(s)\,ds + 5x^2$;

   б) $y(x) = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos s\, y(s)\,ds + \sin x.$

2. Методом послідовних наближень розв'яжіть лінійні інтегральні рівняння Вольтерри другого роду:

   а) $y(x) = -\int_0^x e^{x-s} y(s)\,ds + x;$

   б) $y(x) = -\int_0^x (x-s)\, y(s)\,ds + x.$

3. Знайдіть друге послідовне наближення розв'язку нелінійного інтегрального рівняння

$$y(x) = \int_0^x \left(1 + y^2(s)\right) ds + 1.$$

4. Знайдіть перші послідовні наближення розв'язку системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду

$$\begin{cases} y(x) = e^x - \int_0^x y(s)ds + 4\int_0^x e^{x-s} z(s)ds, \\ z(x) = 1 - \int_0^x e^{-(x-s)} y(s)ds + \int_0^x z(s)ds. \end{cases}$$

5. Оцініть похибки наближень точних розв'язків рівнянь з вправи 1 функціями $\bar{y}(x) = y_3(x)$ у просторах $C[a,b]$ та $L_2[a,b]$. Яким потрібно вибрати n для досягнення точності до 0,001?
6. Знайдіть другі послідовні наближення розв'язку лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \int_0^1 x^2 s^3 y(s)\,ds + 5x^2$$

   методами: а) Положія; б) усереднення функціональних поправок. Порівняйте отримані функції з точним розв'язком $y(x) = 6x^2$.

Розділ 6

АПРОКСИМАЦІЙНІ ТА ПРОЕКЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО РОДУ

§ 6.1. Метод квадратур для лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

Важливий клас методів наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь утворюють апроксимаційні методи, в яких інтеграл замінюють деякою скінченною сумою.

До апроксимаційних методів належить ***метод квадратур***. У його основі покладено деяку квадратурну формулу

$$\int_a^b F(s)ds = \sum_{j=0}^{n} A_j F(s_j) + R(F),$$

де точки s_j, $j = 0,1,...,n$, належать відрізку $[a,b]$, A_j – коефіцієнти, які не залежать від функції $F(s)$, а $R(F)$ – похибка заміни інтеграла скінченною сумою.

Якщо у лінійному неоднорідному інтегральному рівнянні Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s)\, ds + f(x) \tag{6.1}$$

зафіксувати $x = x_i$, $i = 0,1,...,n$, то отримаємо початкове для методу квадратур співвідношення

$$y(x_i) = \lambda \int_a^b K(x_i,s) y(s)\, ds + f(x_i), \quad i = 0,1,...,n,$$

з якого після заміни інтеграла скінченною сумою маємо систему рівнянь

$$y(x_i) = \lambda \sum_{j=0}^{n} A_j K(x_i, x_j) y(x_j) + f(x_i) + \lambda R_i, \quad i = 0,1,...,n,$$

де $R_i = R\big(K(x_i,s) y(s)\big)$.

Відкидаючи малу величину λR_i, для відшукання наближених значень $\overline{y}(x_i) = \overline{y}_i$ розв'язку $y(x)$ у вузлах $x_0, x_1, ..., x_n$ отримуємо лінійну систему алгебраїчних рівнянь

$$\bar{y}_i - \lambda\sum_{j=0}^{n} A_j K_{ij}\bar{y}_j = f_i, \qquad i = 0,1,\ldots,n, \tag{6.2}$$

де $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $f(x_i) = f_i$. Розв'язавши систему (6.2), отримаємо значення $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$, за допомогою яких шляхом інтерполяції знайдемо наближений розв'язок інтегрального рівняння (6.1) на всьому відрізку $[a,b]$.

Зокрема, як наближений розв'язок можна взяти функцію, отриману з таблиці $\{\bar{y}_i\}$ шляхом лінійної інтерполяції, тобто таку функцію, яка збігається з $\bar{y}_i$ у точках x_i і є лінійною на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$.

Крім того, часто як аналітичний вираз наближеного розв'язку інтегрального рівняння (6.1) вибирають функцію

$$\bar{y}(x) = f(x) + \lambda\sum_{j=0}^{n} A_j K(x, x_j)\bar{y}_j,$$

яка також у вузлах $x_0, x_1, \ldots, x_n$ набуває значень $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ відповідно.

Приклад 6.1. *Розв'язати методом квадратур рівняння*

$$y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)ds + x^2.$$

Розв'язання. Виберемо три вузли $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$ й обчислимо значення функції $f(x) = x^2$ та ядра $K(x,s) = xs^2$ у них:

$$f(0) = 0, \qquad f(0{,}5) = 0{,}25, \qquad f(1) = 1;$$

$$K(0;0) = 0, \qquad K(0;0{,}5) = 0, \qquad K(0;1) = 0,$$

$$K(0{,}5;0) = 0, \qquad K(0{,}5;0{,}5) = 0{,}125, \qquad K(0{,}5;1) = 0{,}5,$$

$$K(1;0) = 0, \qquad K(1;0{,}5) = 0{,}25, \qquad K(1;1) = 1.$$

Для заміни інтеграла скінченною сумою використаємо формулу Сімпсона

$$\int_0^1 F(s)\,ds \approx \frac{1}{6}\left(F(0) + 4F\left(\frac{1}{2}\right) + F(1)\right).$$

У результаті отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \bar{y}_0 - \left(0\cdot\bar{y}_0 + 4\cdot 0\cdot\bar{y}_1 + 0\cdot\bar{y}_2\right)/6 = 0, \\ \bar{y}_1 - \left(0\cdot\bar{y}_0 + 4\cdot 0{,}125\cdot\bar{y}_1 + 0{,}5\cdot\bar{y}_2\right)/6 = 0{,}25, \\ \bar{y}_2 - \left(0\cdot\bar{y}_0 + 4\cdot 0{,}25\cdot\bar{y}_1 + 1\cdot\bar{y}_2\right)/6 = 1. \end{cases}$$

Її розв'язком є $\bar{y}_0 = 0,\ \bar{y}_1 = 0{,}389,\ \bar{y}_2 = 1{,}278.$ Отже,

$$\bar{y}(x) = x^2 + \left(1\cdot 0\cdot 0 + 4\cdot 0{,}25x\cdot 0{,}389 + 1\cdot x\cdot 1{,}278\right)/6 =$$
$$= x^2 + 0{,}278x. \quad \bullet$$

Відзначимо, що похибка такого наближення на відрізку $[0;1]$ дорівнює приблизно $0{,}01$. Для досягнення більшої точності можна вибрати більшу кількість вузлів або використати точніші квадратурні формули, наприклад, формулу кубічних парабол

$$\int_0^1 F(s)\,ds \approx \frac{1}{8}\left(F(0) + 3F\left(\frac{1}{3}\right) + 3F\left(\frac{2}{3}\right) + F(1)\right)$$

для вузлів $x_0 = 0,\ x_1 = 1/3,\ x_2 = 2/3,\ x_3 = 1.$

Наведемо загальну формулу Сімпсона для наближеного обчислення інтегралів при розбитті відрізка $[a,b]$ на $n = 2k$ рівних частин точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2k} = b$:

$$\int_a^b F(s)\,ds \approx$$
$$\approx \frac{b-a}{6k}\Big(\big(F(x_0) + F(x_{2k})\big) + 2\big(F(x_2) + F(x_4) + \ldots + F(x_{2k-2})\big) +$$
$$+\ 4\big(F(x_1) + F(x_3) + \ldots + F(x_{2k-1})\big)\Big).$$

Похибка цієї формули

$$R(F) = \frac{(b-a)^5}{180n^4} F^{(4)}(\xi), \quad a \le \xi \le b.$$

§ 6.2. Метод квадратур для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду

Хоча лінійне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)y(s)\,ds + f(x), \quad a \le x \le b, \tag{6.3}$$

є окремим випадком лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, застосування методу квадратур для його наближеного розв'язування має певну специфіку.

Розв'язуючи рівняння (6.3) методом квадратур, необхідно використати співвідношення

$$y(x_i) = \lambda \int_a^{x_i} K(x_i, s) y(s)\, ds + f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

яке отримуємо з рівняння (6.3) для фіксованих значень x_i незалежної змінної *x*. Вибираючи значення x_i як вузли квадратурної формули та замінюючи з її допомогою інтеграл скінченною сумою, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\bar{y}_i - \lambda \sum_{j=0}^{i} A_j K_{ij} \bar{y}_j = f_i, \quad i = 0,1,\ldots,n. \qquad (6.4)$$

Запишемо систему (6.4) у вигляді

$$-\lambda \sum_{j=0}^{i-1} A_j K_{ij} \bar{y}_j + (1 - \lambda A_i K_{ii}) \bar{y}_i = f_i, \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Якщо $1 - \lambda A_i K_{ii} \neq 0,\ i = 1,\ldots,n,$ то всі значення $\bar{y}_i$ можуть бути знайдені за рекурентними формулами

$$\bar{y}_i = (1 - \lambda A_i K_{ii})^{-1} \left(f_i + \lambda \sum_{j=0}^{i-1} A_j K_{ij} \bar{y}_j \right),\ i = 1,\ldots,n, \quad \bar{y}_0 = f_0. \qquad (6.5)$$

Застосовуючи для наближеного обчислення інтеграла формулу трапецій

$$\int_a^b F(s)\, ds \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{1}{2}\big(F(x_0) + F(x_{2k})\big) + F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_{n-1}) \right),$$

похибка якої

$$R(F) = \frac{(b-a)^3}{12n^2} F''(\xi), \quad a \le \xi \le b,$$

рекурентну формулу (6.5) можемо записати у вигляді

$$\bar{y}_0 = f_0, \qquad \bar{y}_1 = \left(1 - 0,5 h \lambda K_{11}\right)^{-1} \left(f_1 + 0,5 h \lambda K_{10} \bar{y}_0 \right),$$

$$\bar{y}_i = \left(1 - 0,5 h \lambda K_{ii}\right)^{-1} \left(f_i + 0,5 h \lambda K_{i0} \bar{y}_0 + h\lambda \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} \bar{y}_j \right), \quad i = 2,3,\ldots,n,$$

де *h* – відстань між сусідніми вузлами.

Приклад 6.2. *Розв'язати методом квадратур рівняння*

$$y(x) = \int_0^x (x-s)\,y(s)\,ds + 1.$$

Розв'язання. Наближений розв'язок шукаємо у точках

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0,2,\ x_2 = 0,4,\ x_3 = 0,6,\ x_4 = 0,8,\ x_5 = 1$$

з кроком $h = 0,2$. Маємо

$$\lambda = 1, \quad a = 0, \quad K(x,s) = x - s, \quad f(x) = 1.$$

Таким чином, всі $K_{ii} = 0$, $f_i = 1$ і, крім того,

$$K_{10} = 0,2, \quad K_{20} = 0,4, \quad K_{21} = 0,2, \quad K_{30} = 0,6, \quad K_{31} = 0,4, \quad K_{32} = 0,2,$$

$$K_{40} = 0,8, \quad K_{41} = 0,6, \quad K_{42} = 0,4, \quad K_{43} = 0,2,$$

$$K_{50} = 1,0, \quad K_{51} = 0,8, \quad K_{52} = 0,6, \quad K_{53} = 0,4, \quad K_{54} = 0,2;$$

$$1 - 0,5h\lambda K_{ii} = 1, \quad i = 0,1,\ldots,5.$$

Отже, за формулами (6.5) послідовно знаходимо

$$\bar{y}_0 = f_0 = 1,$$

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{1-0,5h\lambda K_{11}}\left(f_1 + 0,5h\lambda K_{10}\bar{y}_0\right) = 1,02,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{1-0,5h\lambda K_{22}}\left(f_2 + 0,5h\lambda K_{20}\bar{y}_0 + h\lambda K_{21}\bar{y}_1\right) = 1,081,$$

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{1-0,5h\lambda K_{33}}\left(f_3 + 0,5h\lambda K_{30}\bar{y}_0 + h\lambda\left(K_{31}\bar{y}_1 + K_{32}\bar{y}_2\right)\right) \approx 1,185,$$

$$\bar{y}_4 = \frac{1}{1-0,5h\lambda K_{44}}\left(f_4 + 0,5h\lambda K_{40}\bar{y}_0 + h\lambda\left(K_{41}\bar{y}_1 + K_{42}\bar{y}_2 + K_{43}\bar{y}_3\right)\right) \approx$$

$$\approx 1,336,$$

$$\bar{y}_5 = \frac{1}{1-0,5h\lambda K_{55}} \times$$

$$\times\left(f_5 + 0,5h\lambda K_{50}\bar{y}_0 + h\lambda\left(K_{51}\bar{y}_1 + K_{52}\bar{y}_2 + K_{53}\bar{y}_3 + K_{54}\bar{y}_4\right)\right) \approx 1,541.$$

Для порівняння наведемо відповідні значення точного розв'язку $y(x) = \operatorname{ch} x$:

1,000; 1,020; 1,081; 1,186; 1,337; 1,543.

Як бачимо, похибка у вибраних вузлах не перевищує 0,002. ●

§ 6.3. Основні ідеї проекційних методів розв'язування інтегральних рівнянь. Метод найменших квадратів

Проекційні методи розв'язування інтегральних рівнянь ґрунтуються на представленні наближеного розв'язку $\bar{y}(x)$ функцією

$$\bar{y}(x) \equiv \Phi(x, C),$$

де $C = (C_1, C_2, ..., C_n),$ яка залежить від довільних (невизначених до кінця процесу розв'язування) параметрів $C_i,\ i = 1, 2, ..., n.$ Знаходження цих параметрів побудовано на використанні виразу для неув'язки

$$\varepsilon(x, C) \equiv U\Phi(x, C),$$

де U – оператор, отриманий після перенесення всіх членів інтегрального рівняння в один бік. Наприклад, для лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$\varepsilon(x, C) \equiv \Phi(x, C) - \lambda \int_a^b K(x, s)\Phi(s, C)\, ds - f(x).$$

Далі процес розв'язування зводиться до визначення такої сукупності параметрів $C_i,\ i = 1, 2, ..., n,$ яка робить неув'язку $\varepsilon(x, C)$ у певному сенсі малою. У загальному випадку це мінімізує деякий функціонал J від неув'язки, тобто реалізується умова

$$J[\varepsilon] = \min_C J\left[U\Phi(x, C)\right].$$

Зрозуміло, що точний розв'язок перетворює неув'язку в нуль, тобто $\varepsilon(x, C) = 0.$

Доволі зручно представити наближений розв'язок у вигляді функції, яка лінійно залежить від параметрів C_i, наприклад,

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x), \tag{6.6}$$

де $\varphi_i(x),\ i = 1, 2, ..., n,$ – деякі відомі лінійно незалежні функції, які називають ***координатними функціями***. Іноді до правої частини в (6.6) дописують доданок $f(x)$. Від вдалого вибору координатних функцій залежить точність отриманого наближеного розв'язку.

Оцінимо похибку наближення вигляду $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i$ для операторного рівняння другого роду

$$y = \lambda A y + f.$$

Для нього неув'язка

$$\varepsilon_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(\varphi_i - \lambda A \varphi_i) - f.$$

Віднімаючи від точного рівняння наближене рівняння у вигляді

$$\overline{y} = \lambda A \overline{y} + f + \varepsilon_n,$$

отримуємо оцінку

$$\|y - \overline{y}\| \le \left\|(I - \lambda A)^{-1}\right\| \cdot \|\varepsilon_n\|.$$

Звідси випливає, що для обмеженого оператора $(I - \lambda A)^{-1}$ зменшення похибки наближеного розв'язку досягається зменшенням неув'язки, тобто збільшенням кількості координатних функцій.

Залежно від способів представлення наближеного розв'язку та визначення довільних параметрів розрізняють різні проекційні методи розв'язування інтегральних рівнянь. Одним з них є ***метод найменших квадратів***.

Наближений розв'язок рівняння (6.1) шукаємо у вигляді (6.6). При такому виборі $\overline{y}(x)$ знайдемо неув'язку $\varepsilon(x, C)$:

$$\varepsilon(x,C) = U\,\overline{y}(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(s)\,ds - f(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \left(\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s)\,ds \right) - f(x).$$

Сталі C_i, $i = 1, 2, ..., n,$ визначимо з умови мінімуму інтеграла $J = \int_a^b \varepsilon^2(x, C)\,dx,$ тобто з системи

$$\frac{\partial J}{\partial C_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Це приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda) C_j = b_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

де

$$a_{ij}(\lambda)=$$

$$=\int_a^b\left(\varphi_i(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)\,ds\right)\left(\varphi_j(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_j(s)ds\right)dx, \tag{6.7}$$

$$b_i=\int_a^b f(x)\left(\varphi_i(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)\,ds\right)dx. \tag{6.8}$$

Приклад 6.3. *Розв'язати методом найменших квадратів рівняння*

$$y(x)=\int_0^1 xs^2 y(s)ds+x^2.$$

Розв'язання. Як наближений розв'язок візьмемо функцію

$$\bar{y}(x)=C_1x+C_2x^2,$$

тобто $\varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=x^2$. Для визначення сталих C_1, C_2 складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}C_1+a_{12}C_2=b_1, \\ a_{21}C_1+a_{22}C_2=b_2, \end{cases}$$

де числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ шукаємо за формулами (6.7), (6.8):

$$a_{11}=\int_0^1\left(x-\frac{x}{4}\right)^2 dx\approx 0{,}188,\qquad a_{22}=\int_0^1\left(x^2-\frac{x}{5}\right)^2 dx\approx 0{,}113,$$

$$a_{12}=a_{21}=\int_0^1\left(x^2-\frac{x}{5}\right)\left(x-\frac{x}{4}\right)dx\approx 0{,}138,$$

$$b_1=\int_0^1 x^2\cdot\left(x-\frac{x}{4}\right)dx\approx 0{,}188,\qquad b_2=\int_0^1 x^2\cdot\left(x^2-\frac{x}{5}\right)dx=0{,}15.$$

Таким чином, для знаходження сталих C_1, C_2 маємо систему

$$\begin{cases} 0{,}188\cdot C_1+0{,}138\cdot C_2=0{,}188, \\ 0{,}138\cdot C_1+0{,}113\cdot C_2=0{,}15, \end{cases}$$

звідки знаходимо $C_1\approx 0{,}2273,\ C_2\approx 1{,}0455$. Отже,

$$\bar{y}(x)=0{,}227\cdot x+1{,}046\cdot x^2.$$

Оскільки точним розв'язком є функція $y(x)=4x/15+x^2$, то на відрізку $[0;1]$ похибка отриманого наближення становить близько $0{,}01$. ●

§ 6.4. Методи Гальоркіна – Петрова та Бубнова – Гальоркіна

Одним із найзагальніших серед проекційних методів наближеного розв’язування інтегральних рівнянь є ***метод Гальоркіна – Петрова***. Виберемо дві системи лінійно незалежних функцій $\varphi_i(x)$ та $\psi_i(x),\ i=1,2,...,n,$ з простору $L_2[a,b]$ і запишемо розв’язок рівняння (6.1) у вигляді

$$\bar{y}(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x). \tag{6.9}$$

Після цього коефіцієнти $C_1, C_2, ..., C_n$ знаходимо з умови ортогональності неув’язки

$$\varepsilon(x,C) = U\,\bar{y}C(x)$$

до кожної з функцій $\psi_j(x),\ j=1,2,...,n,$ тобто з системи

$$\int_a^b U\,\bar{y}(x)\psi_j(x)\,dx = 0, \quad j=1,2,...,n,$$

яку запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \int_a^b \varphi_i(x)\psi_j(x)\,dx - \lambda \sum_{i=1}^{n} C_i \int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)\,\varphi_i(s)ds \cdot \psi_j(x) \right) dx =$$

$$= \lambda \int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds \cdot \psi_j(x) \right) dx, \quad j=1,2,...,n.$$

Остаточно для визначення сталих C_i маємо систему

$$\begin{cases} a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + ... + a_{1n}C_n = b_1, \\ a_{21}C_1 + a_{22}C_2 + ... + a_{2n}C_n = b_2, \\ \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{n1}C_1 + a_{n2}C_2 + ... + a_{nn}C_n = b_n, \end{cases}$$

де

$$a_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\psi_j(x)\,dx - \lambda \int_a^b \psi_j(x) \int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)\,dsdx,$$

$$b_j = \lambda \int_a^b \psi_j(x) \int_a^b K(x,s) f(s)ds\,dx, \quad i,j=1,2,...,n.$$

Приклад 6.4. *Розв’язати наближено методом Гальоркіна – Петрова рівняння*

$$y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)ds + x^2.$$

Розв'язання. Наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$\overline{y}(x) = x^2 + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x),$$

де $\varphi_1(x) = 1,\ \varphi_2(x) = x,\ \psi_1(x) = x,\ \psi_2(x) = x^2.$

З умови ортогональності неув'язки $\varepsilon(x,C) = U\,\overline{y}(x)$ до функцій $\psi_1(x) = x,\ \psi_2(x) = x^2$ отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \left(C_1 + C_2 x - \int_0^1 xs^2(s^2 + C_1 + C_2 s)\,ds \right) x\,dx = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \left(C_1 + C_2 x - \int_0^1 xs^2(s^2 + C_1 + C_2 s)\,ds \right) x^2 dx = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} a_{11}C_1 + a_{12}C_2 = b_1, \\ a_{21}C_1 + a_{22}C_2 = b_2, \end{cases}$$

де

$$a_{11} = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1\int_0^1 x^2 s^2 ds\,dx \approx 0,389, \quad a_{21} = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1\int_0^1 x^3 s^2 dsdx = 0,25,$$

$$a_{12} = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1\int_0^1 x^2 s^3 dsdx = 0,25, \quad a_{22} = \int_0^1 x^3 dx - \int_0^1\int_0^1 x^3 s^3 dsdx \approx 0,188,$$

$$b_1 = \int_0^1 x \int_0^1 xs^4 ds\,dx \approx 0,067, \quad b_2 = \int_0^1 x^2 \int_0^1 xs^4 ds\,dx = 0,05.$$

Отже,

$$\begin{cases} 0,389\cdot C_1 + 0,25\cdot C_2 = 0,067, \\ 0,25\cdot C_1 + 0,188\cdot C_2 = 0,05, \end{cases}$$

звідки знаходимо $C_1 \approx -0,002,\ C_2 \approx 0,268.$

Таким чином,

$$\overline{y}(x) = x^2 + 0,268\cdot x - 0,002.$$

Порівнюючи знайдений наближений розв'язок з точним розв'язком $y(x) = 4x/15 + x^2$, переконуємося, що його похибка на відрізку [0;1] становить менше, ніж 0,01. ●

Окремим випадком методу Гальоркіна – Петрова є ***метод Бубнова – Гальоркіна***, в якому обидві системи координатних функцій збігаються, тобто $\varphi_i(x)=\psi_i(x),\ \ i=1,2,...,n.$ Шукаючи тоді наближений розв'язок рівняння (6.1) у вигляді (6.9), з умови ортогональності неув'язки $\varepsilon(x,C)=U\,\bar{y}(x)$ до кожної з функцій $\varphi_i(x),\ i=1,2,...,n,$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} C_j(\alpha_{ij}-\lambda\beta_{ij})=\lambda\gamma_i,\quad i=1,2,...,n, \tag{6.10}$$

де

$$\alpha_{ij}=\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx,\qquad \beta_{ij}=\int_a^b dx\int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)\varphi_j(s)\,ds,$$

$$\gamma_i=\int_a^b dx\int_a^b K(x,s)\varphi_i(x)f(s)\,ds,\quad i,j=1,2,...,n.$$

Розв'язавши систему (6.10), знайдемо значення коефіцієнтів $C_i,$ а з ними і наближений розв'язок заданого інтегрального рівняння.

Приклад 6.5. *Розв'язати наближено методом Бубнова – Гальоркіна рівняння*

$$y(x)=\int_0^1 xs^2y(s)\,ds+x^2.$$

Розв'язання. Наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$\bar{y}(x)=x^2+C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x),$$

де $\varphi_1(x)=1,\ \varphi_2(x)=x.$ Умова ортогональності неув'язки до цих функцій приводить до системи рівнянь

$$\begin{cases}\int_0^1\left(C_1+C_2x-\int_0^1 xs^2(s^2+C_1+C_2s)\,ds\right)dx=0,\\ \int_0^1\left(C_1+C_2x-\int_0^1 xs^2(s^2+C_1+C_2s)\,ds\right)x\,dx=0,\end{cases}$$

яка після обчислення інтегралів набуває вигляду

$$\begin{cases}0,833\cdot C_1+0,375\cdot C_2=0,1,\\ 0,389\cdot C_1+0,25\cdot C_2=0,067.\end{cases}$$

Звідси $C_1\approx-0,002,\ C_2\approx0,271,$ а отже, $\bar{y}(x)=0,271\cdot x+x^2-0,002.$

Порівнюючи з точним розв'язком $y(x)=4x/15+x^2$, бачимо, що похибка отриманого наближення становить близько 0,01. ●

Для покращення точності наближеного розв'язку рівняння (6.1) для побудови системи функцій $\varphi_i(x), i=1,2,...,n,$ у методі Бубнова – Гальоркіна застосовують ***метод моментів***. Він полягає у тому, що спочатку фіксують деяку функцію $\varphi_1(x)$, а потім визначають наступні координатні функції за формулами

$$\varphi_i(x)=\int_a^b K(x,s)\varphi_{i-1}(s)\,ds, \quad i=2,3,...,n.$$

Приклад 6.6. *Розв'язати наближено методом моментів рівняння*

$$y(x)=\int_0^1 xs^2 y(s)\,ds+x^2.$$

Розв'язання. Виберемо $\varphi_1(x)=1$ і визначимо

$$\varphi_2(x)=\int_0^1 xs^2\varphi_1(x)\,ds=\int_0^1 xs^2 ds=\frac{x}{3}.$$

Тому наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$\bar{y}(x)=x^2+C_1\cdot 1+C_2\cdot x/3.$$

З умови ортогональності неув'язки до функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \int_0^1\left(C_1+C_2\cdot x/3-\int_0^1 xs^2\left(s^2+C_1+C_2\cdot s/3\right)ds\right)dx=0, \\ \int_0^1\left(C_1+C_2\cdot x/3-\int_0^1 xs^2\left(s^2+C_1+C_2\cdot s/3\right)ds\right)\cdot x/3\,dx=0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 0{,}833\cdot C_1+0{,}125\cdot C_2=0{,}1, \\ 0{,}130\cdot C_1+0{,}028\cdot C_2=0{,}022. \end{cases}$$

Оскільки $C_1\approx 0{,}007,\ C_2\approx 0{,}750,$ то наближено маємо

$$\bar{y}(x)=x^2+0{,}250\cdot x+0{,}007.$$

Порівнюючи знайдений наближений розв'язок з точним розв'язком $y(x)=4x/15+x^2$, переконуємося, що його похибка на відрізку [0;1] становить менше, ніж 0,01. ●

§ 6.5. Метод колокації

У §§ 6.3, 6.4 ми намагалися зробити неув'язку у певному сенсі найменшою. Наступний наближений метод – ***метод колокації*** – характерний тим, що неув'язка $\varepsilon(x,C)$ перетворюється в нуль у наперед заданій системі точок x_j, $j=1,2,...,n$, з відрізка $[a,b]$, які називають ***точками колокації***, тобто

$$\varepsilon(x_j,C)=0, \ \ j=1,2,...,n.$$

Якщо наближений розв'язок рівняння (6.1) задано як

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i\gamma_i(x),$$

то для визначення коефіцієнтів C_i, $i=1,2,...,n$, отримуємо лінійну алгебраїчну систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\left(\varphi_i(x_j)-\lambda\int_a^b K(x_j,s)\varphi_i(s)\,ds\right)= f(x_i), \ \ j=1,2,..,n,$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\psi_i(x_j,\lambda)= f(x_j), \ \ \ j=1,2,...,n, \tag{6.11}$$

де

$$\psi_i(x,\lambda)=\varphi_i(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)\,ds, \ \ i=1,2,...,n.$$

Якщо визначник системи (6.11) відмінний від нуля, то з неї можна однозначно визначити коефіцієнти C_i, $i=1,2,...,n$, і, отже, матимемо наближений розв'язок $\overline{y}(x)$.

Приклад 6.7. *Знайти методом колокації наближений розв'язок рівняння*

$$y(x)=\int_0^1 xs^2y(s)\,ds+x^2.$$

Розв'язання. Наближений розв'язок шукаємо у вигляді

$$\overline{y}(x)=C_1+C_2x+C_3x^2.$$

Підставляючи його у задане рівняння, отримуємо неув'язку

$$\varepsilon(x,C_1,C_2,C_3)=C_1+C_2x+C_3x^2-\int_0^1 xs^2(C_1+C_2s+C_3s^2)ds-x^2=$$
$$=C_1\left(1-x/3\right)+C_2\left(x-x/4\right)+C_3\left(x^2-x/5\right)-x^2.$$

Вибираючи точки колокації $x_1=0,\ x_2=0,5,\ x_3=1$ і вимагаючи щоб неув'язка у цих точках перетворювалася в нуль, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1=0, \\ 0,833\cdot C_1+0,375\cdot C_2+0,15\cdot C_3=0,25, \\ 0,667\cdot C_1+0,75\cdot C_2+0,8\cdot C_3=1. \end{cases}$$

Звідси $C_1=0,\ \ C_2\approx 0,267,\ \ C_3=1$, а отже, отримуємо наближений розв'язок $\overline{y}(x)=0,267\cdot x+x^2$, який з точністю до 0,001 збігається з точним розв'язком $y(x)=4x/15+x^2$. ●

Зауважимо, що записуючи і розв'язуючи у прикладах 6.3–6.7 системи лінійних рівнянь точно, отримаємо $\overline{y}(x)\equiv y(x)$.

Рекомендована література: [3, с. 37–51], [5, с. 327–337], [6, с. 294–304], [8, с. 15–28], [9, с. 35–53, 203–214], [19, с. 389–398].

Питання до розділу 6

1. У чому полягає метод квадратур наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду?
2. Запишіть квадратурні формули прямокутників, трапеції та формули Сімпсона для наближеного обчислення інтегралів.
3. Які особливості застосування методу квадратур до наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду?
4. Наведіть основні ідеї проекційних методів наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду.
5. У чому полягає метод найменших квадратів наближеного розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду?

6. Що об’єднує метод Гальоркіна – Петрова і метод Бубнова – Гальоркіна? Чим вони відрізняються?
7. Який зв'язок між методом моментів і методом Бубнова – Гальоркіна?
8. Що є спільного і які відмінності методу колокації від інших проекційних методів наближеного розв’язування лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду?
9. Від чого залежить точність знайдених наближених розв’язків лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду проекційними методами?
10. Як, на вашу думку, з допомогою проекційних методів можна отримати точний розв’язок лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з виродженим ядром?

Вправи до розділу 6

1. Розв’яжіть лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду $y(x) = \int_0^1 x^2 s^3 y(s)ds + 5x^2$ методом квадратур, використовуючи для наближення інтеграла квадратурну формулу Сімпсона для трьох вузлів.
2. Знайдіть наближений розв’язок лінійного інтегрального рівняння Вольтерри другого роду $y(x) = -\int_0^x (x-s)y(s)ds + x$ на відрізку [0,1] методом квадратур, використовуючи для наближеного обчислення інтеграла квадратурну формулу трапецій для $n = 5$.
3. Розв’яжіть лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду $y(x) + 4\int_0^1 (x^2 s - xs^2) y(s)\, ds = 4x^2/3$, покладаючи $n = 2$ у таких проекційних методах:
   а) найменших квадратів; б) Гальоркіна – Петрова;
   в) Бубнова – Гальоркіна; г) моментів; д) колокації.

4. Знайдіть наближений розв’язок рівняння $y(x) = \int_0^1 e^{xs} y(s)ds + 1,$ покладаючи $n = 2$ у таких проекційних методах:
   а) найменших квадратів; б) Гальоркіна – Петрова;
   в) Бубнова – Гальоркіна; г) моментів; д) колокації.

Розділ 7
СИМЕТРИЧНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

§ 7.1. Інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з симетричними ядрами

У § 2.4 для операторного рівняння другого роду

$$x = \lambda Ax + f \tag{7.1}$$

з компактним самоспряженим оператором A у гільбертовому просторі H отримано зображення його розв'язку у вигляді

$$x = f + \lambda \sum_k \frac{\mu_k f_k \varphi_k}{1 - \lambda\mu_k}, \tag{7.2}$$

де $1 - \lambda\mu_k \neq 0$, $\{\mu_k\}$ – система відмінних від нуля власних значень оператора A, $\{\varphi_k\}$ – відповідна ортогональна нормована система власних функцій, $f_k = (f, \varphi_k)$.

Розглянемо тепер у гільбертовому просторі $L_2[a,b]$ лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s)\,ds + f(x) \tag{7.3}$$

з симетричним ядром $K(x,s) = K(s,x)$. Оскільки інтегральний оператор Фредгольма

$$Ay(x) = \int_a^b K(x,s) y(s)\,ds$$

є компактним і самоспряженим у просторі $L_2[a,b]$, то згідно з (7.2) розв'язком інтегрального рівняння (7.3) є

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_k \frac{\mu_k \int_a^b f(s)\varphi_k(s)\,ds \cdot \varphi_k(x)}{1 - \lambda\mu_k}, \quad 1 - \lambda\mu_k \neq 0.$$

Враховуючи тепер, що характеристичними числами інтегрального оператора Фредгольма є $\lambda_k = 1/\mu_k$, остаточно отримуємо для нехарактеристичних значень λ таке зображення єдиного розв'язку рівняння (7.3):

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} f(s)\,ds, \qquad \lambda \neq \lambda_k, \tag{7.4}$$

або

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) f(s)\,ds, \qquad \lambda \neq \lambda_k,$$

де $R(x,s;\lambda)$ – резольвента симетричного ядра,

$$R(x,s;\lambda) = \sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda}, \qquad \lambda \neq \lambda_k.$$

Для характеристичного значення λ лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду (7.3) має розв'язок лише тоді, коли функція $f(x)$ є ортогональною до всіх власних функцій, які відповідають цьому характеристичному числу. При цьому загальний розв'язок рівняння (7.3) має вигляд

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{\substack{k \\ \lambda_k \neq \lambda}} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} f(s)\,ds + \sum_{\substack{k \\ \lambda_k = \lambda}} C_k \varphi_k(x), \tag{7.5}$$

де C_k – довільні сталі.

Як випливає з формул (7.4), (7.5), для отримання розв'язку інтегрального рівняння (7.3) з симетричним ядром необхідно знати характеристичні числа та власні функції цього ядра. Для їх знаходження розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\,\varphi(s)\,ds. \tag{7.6}$$

Ті значення параметра λ, для яких воно має ненульові розв'язки, є характеристичними числами ядра $K(x,s)$, а самі ненульові розв'язки – відповідними власними функціями.

Для виродженого симетричного ядра

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{m} p_i a_i(x) a_i(s), \tag{7.7}$$

де функції $a_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, є лінійно незалежні, а числа $p_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, для знаходження характеристичних чисел і власних функцій шукаємо розв'язок рівняння (7.6) у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i a_i(x). \tag{7.8}$$

Підставляючи (7.8) у (7.6), отримуємо тотожність

$$\sum_{i=1}^{m} C_i a_i(x) \equiv \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{m} p_i a_i(x) a_i(s) \sum_{j=1}^{m} C_j a_j(s)\, ds$$

або

$$\sum_{i=1}^{m} C_i a_i(x) \equiv \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} C_j \lambda \int_a^b p_i a_i(s) a_j(s)\, ds \right) a_i(x).$$

Позначимо

$$\alpha_{ij} = \int_a^b p_i a_i(s) a_j(s)\, ds, \quad i, j = 1, 2, ..., m.$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля однакових функцій $a_i(x)$, $i = 1, 2, ..., m,$ для знаходження чисел C_i, $i = 1, 2, ..., m,$ маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$C_i = \lambda \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} C_j, \; i = 1, 2, ..., m. \tag{7.9}$$

Якщо визначник $D(\lambda)$ однорідної системи (7.9) дорівнює нулю, то вона має ненульові розв'язки. Таким чином, характеристичними числами симетричного ядра (7.7) є корені рівняння $D(\lambda) = 0$. Зрозуміло, що кількість цих коренів не перевищує m. Розв'язавши для кожного такого кореня λ_k систему рівнянь

$$C_i = \lambda_k \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} C_j, \; i = 1, 2, ..., m,$$

отримаємо лінійно незалежну систему власних функцій

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{m} C_i^k a_i(x).$$

Приклад 7.1. *Знайти характеристичні числа та власні функції симетричного ядра*

$$K(x, s) = xs - 1/3, \quad 0 \le x \le 1, \; 0 \le s \le 1.$$

Розв'язання. Оскільки $a_1(x) = x$, $a_2(x) = 1$, то згідно з (7.8) розв'язок інтегрального рівняння

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 \left(xs - \frac{1}{3} \right)\varphi(s)\, ds$$

шукаємо у вигляді $\varphi(x) = C_1 x + C_2$.

Підставляючи у праву частину рівняння, після очевидних перетворень одержуємо рівність

$$\lambda\int_0^1 \left(xs - \frac{1}{3} \right)(C_1 s + C_2)\, ds = \lambda\left(\frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2} \right)x - \lambda\left(\frac{C_1}{6} + \frac{C_2}{3} \right).$$

Згідно з (7.9) система рівнянь для коефіцієнтів C_1, C_2 має вигляд

$$\begin{cases} C_1 = \lambda\left(C_1/3 + C_2/2 \right), \\ C_2 = -\lambda\left(C_1/6 + C_2/3 \right) \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} (6-2\lambda)C_1 - 3\lambda C_2 = 0, \\ \lambda C_1 + (6+2\lambda)C_2 = 0. \end{cases} \tag{7.10}$$

Оскільки

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-2\lambda & -3\lambda \\ \lambda & 6+2\lambda \end{vmatrix} = 36 - \lambda^2,$$

то характеристичними числами є $\lambda_{1,2} = \pm 6$. Підставляючи $\lambda_{1,2}$ у систему (7.10), отримуємо $C_1 = -3C_2$ для $\lambda_1 = 6$ і $C_1 = -C_2$ для $\lambda_2 = -6$. Покладаючи у кожному з випадків $C_2 = -1$, знаходимо власні функції $\varphi_1(x) = 3x - 1$, $\varphi_2(x) = x - 1$.

При цьому

$$\int_0^1 (3x-1)(x-1)\, dx = \int_0^1 (3x^2 - 4x + 1)\, dx = (x^3 - 2x^2 + x)\Big|_0^1 = 0.$$

Оскільки

$$\|\varphi_1\|^2 = \int_0^1 (3x-1)^2 dx = 1, \qquad \|\varphi_2\|^2 = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{3},$$

то функції

$$\varphi_1(x) = 3x - 1,\ \varphi_2(x) = \sqrt{3}(x-1)$$

утворюють ортогональну нормовану систему власних функцій заданого ядра. ●

§ 7.2. Зведення задачі про власні функції симетричного ядра до крайової задачі

Для симетричних ядер вигляду

$$K(x,s)=\begin{cases} k_1(x)k_2(s), & a\le x\le s, \\ k_1(s)k_2(x), & s\le x\le b, \end{cases} \qquad (7.11)$$

де функції $k_1(x)$, $k_2(x)$ є лінійно незалежними та двічі неперервно диференційовними а відрізку $[a,b]$, задачу про знаходження характеристичних чисел і власних функцій можна звести до однорідної лінійної крайової задачі

$$\left.\begin{aligned} \varphi''(x)+g(x)\varphi'(x)+h(x,\lambda)\varphi(x)=0, \\ \alpha_1\varphi'(a)+\alpha\varphi(a)=0, \quad \beta_1\varphi'(b)+\beta\varphi(b)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (7.12)$$

де $|\alpha_1|+|\alpha|\neq 0$, $|\beta_1|+|\beta|\neq 0$. Ті значення λ, для яких задача (7.12) має ненульові розв’язки, будуть характеристичними числами ядра $K(x,s)$, а самі ненульові розв’язки – власними функціями ядра (7.11).

Запишемо інтегральне рівняння

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\,\varphi(s)\,ds$$

у вигляді

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^x k_1(s)k_2(x)\,\varphi(s)\,ds+\lambda\int_x^b k_1(x)k_2(s)\,\varphi(s)\,ds$$

або

$$\varphi(x)=\lambda\,k_2(x)\int_a^x k_1(s)\,\varphi(s)\,ds+\lambda\,k_1(x)\int_x^b k_2(s)\,\varphi(s)\,ds. \qquad (7.13)$$

Далі двічі здиференціюємо обидві частини рівності (7.13) за змінною x:

$$\varphi'(x)=\lambda\,k_2'(x)\int_a^x k_1(s)\,\varphi(s)\,ds+\lambda\,k_1'(x)\int_x^b k_2(s)\,\varphi(s)\,ds, \qquad (7.14)$$

$$\begin{aligned}\varphi''(x)=\lambda W(x)\varphi(x)+\lambda\,k_2''(x)\int_a^x k_1(s)\,\varphi(s)\,ds+ \\ +\lambda\,k_1''(x)\int_x^b k_2(s)\,\varphi(s)\,ds,\end{aligned} \qquad (7.15)$$

де

$$W(x)=W\left[k_1(x),k_2(x)\right]=\begin{vmatrix} k_1(x) & k_2(x) \\ k_1'(x) & k_2'(x)\end{vmatrix}$$

є вронскіаном функцій $k_1(x),\ k_2(x)$.

Виключаючи з (7.13)–(7.15) інтеграли

$$\int_a^x k_1(s)\,\varphi(s)\,ds, \qquad \int_x^b k_2(s)\,\varphi(s)ds,$$

одержуємо звичайне диференціальне рівняння

$$\varphi''(x)+\frac{W'(x)}{W(x)}\varphi'(x)+\left(\frac{W\left[k_1'(x),k_2'(x)\right]}{W(x)}-\lambda W(x)\right)\varphi(x)=0,$$

причому $W(x)\neq 0$, оскільки $k_1(x),\ k_2(x)$ є лінійно незалежними функціями. Крім того, з (7.13), (7.14) маємо крайові умови

$$k_1(a)\varphi'(a)-k_1'(a)\varphi(a)=0,$$

$$k_2(b)\varphi'(b)-k_2'(b)\varphi(b)=0.$$

Приклад 7.2. *Знайти характеристичні числа та власні функції симетричного ядра*

$$K(x,s)=\begin{cases}\sin x\cos s, & 0\le x\le s,\\ \sin s\cos x, & s\le x\le \pi.\end{cases}$$

Розв'язання. Послідовно знаходимо:

$$\varphi(x)=\lambda\cos x\int_0^x \sin s\,\varphi(s)\,ds+\lambda\sin x\int_x^\pi \cos s\,\varphi(s)\,ds,$$

$$\varphi'(x)=-\lambda\sin x\int_0^x \sin s\,\varphi(s)\,ds+\lambda\cos x\int_x^\pi \cos s\,\varphi(s)\,ds,$$

$$\varphi''(x)=-\lambda\varphi(x)-\left(\lambda\cos x\int_0^x \sin s\,\varphi(s)\,ds+\lambda\sin x\int_x^\pi \cos s\,\varphi(s)\,ds\right).$$

Враховуючи, що вираз у дужках дорівнює $\varphi(x)$, приходимо до крайової задачі для лінійного диференціального рівняння

$$\varphi''(x)=-(\lambda+1)\,\varphi(x) \tag{7.16}$$

з однорідними крайовими умовами

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi'(\pi)=0. \tag{7.17}$$

Нехай $\lambda+1<0$. Тоді загальним розв'язком рівняння (7.16) є

$$\varphi(x)=C_1e^{\sqrt{-(\lambda+1)}\,x}+C_2e^{-\sqrt{-(\lambda+1)}\,x},$$

а для знаходження коефіцієнтів C_1, C_2 з крайових умов (7.17) отримуємо однорідну систему

$$\begin{cases} C_1+C_2=0, \\ C_1\sqrt{-(\lambda+1)}e^{\sqrt{-(\lambda+1)}\,\pi}-C_2\sqrt{-(\lambda+1)}e^{-\sqrt{-(\lambda+1)}\,\pi}=0, \end{cases}$$

єдиним розв'язком якої є $C_1=C_2=0.$ Отже, у цьому випадку крайова задача не має ненульових розв'язків.

Нехай $\lambda+1=0.$ Тоді $\varphi(x)=C_1+C_2x,$ а коефіцієнти C_1, C_2 знаходимо з системи

$$\begin{cases} C_1+C_2\cdot 0=0, \\ C_2\cdot\pi=0, \end{cases}$$

яка також має єдиний розв'язок $C_1=C_2=0.$ Отже, і у цьому випадку крайова задача не має ненульових розв'язків.

Нехай $\lambda+1>0.$ Тоді

$$\varphi(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda+1}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda+1}\,x,$$

а для знаходження коефіцієнтів C_1, C_2 маємо систему

$$\begin{cases} C_1=0, \\ C_2\cdot\sqrt{\lambda+1}\cos\sqrt{\lambda+1}\cdot\pi=0. \end{cases}$$

Ненульовий розв'язок цієї системи існує лише тоді, коли

$$\cos\sqrt{\lambda+1}\,\pi=0,$$

звідки знаходимо характеристичні числа

$$\lambda_k=\left(k-1/2\right)^2-1,\quad k\in\mathbf{N}.$$

Їм відповідають власні функції

$$\varphi_k(x)=C_{2k}\sin\sqrt{\lambda_k+1}\,x=C_{2k}\sin\left(k-1/2\right)x,\quad k\in\mathbf{N},$$

які попарно ортогональні у просторі $L_2[0,\pi].$ Оскільки

$$\|\varphi_k\|^2=\int_0^{\pi}\left(C_{2k}\sin\left(k-1/2\right)x\right)^2dx=(C_{2k})^2\cdot\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbf{N},$$

то ортогональна нормована система власних функцій має вигляд

$$\varphi_k(x)=\sqrt{2/\pi}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x,\quad k\in\mathbf{N}.\qquad\bullet$$

§ 7.3. Розвинення симетричного ядра та його ітерованих ядер за власними функціями ядра

У §7.1 отримано білінійне розвинення резольвенти симетричного ядра у просторі $L_2[a,b]$ за власними функціями цього ядра:

$$R(x,s;\lambda)=\sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k-\lambda}, \quad \lambda\neq\lambda_k.$$

Покажемо, що симетричне ядро також можна розвинути у білінійний ряд за його власними функціями. Для цього розглянемо ядро $K(x,s)$ як функцію змінної $s\in[a,b]$ і параметра x. За теоремою Фубіні ядро $K(x,s)$ майже для всіх значень параметра $x\in[a,b]$ як функція змінної s належить простору $L_2[a,b]$ і, отже, може бути розвинене у ряд Фур'є за ортогональною нормованою системою $\{\varphi_k(x)\}$ своїх власних функцій, тобто

$$K(x,s)=\sum_k c_k(x)\varphi_k(s), \tag{7.18}$$

де

$$c_k(x)=\int_a^b K(x,s)\varphi_k(s)\,ds=\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}.$$

Зауважимо, що остання рівність записана з врахуванням того, що $\varphi_k(x)$ є власною функцію ядра, яка відповідає власному значенню $\lambda_k\neq 0$. Звідси випливає, що

$$K(x,s)=\sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k}. \tag{7.19}$$

Кількість доданків у розвиненні (7.19) буде скінченною лише тоді, коли ядро $K(x,s)$ є виродженим. У випадку нескінченної кількості доданків ряд (7.19) збігається у середньому квадратичному. Щодо білінійного розвинення для довільних неперервних ядер у просторі $C[a,b]$, де необхідна рівномірна збіжність, то у загальному зображення вигляду (7.19) неправильне. Але, *якщо ядро* $K(x,s)$ *неперервне у квадраті* $Q=[a,b;\,a,b]$, *а його характеристичні числа додатні, то ряд* (7.19) *такого ядра збігається рівномірно* (***теорема Мерсера***).

Отримане представлення ядра дає спосіб наближеного розв'язування симетричних лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду методом вироджених ядер, обмежуючись у розвиненні (7.19) скінченною кількістю доданків.

Вкажемо й на те, що з отриманого представлення ядра безпосередньо випливають рівності

$$\int_a^b K(x,x)\,dx = \sum_k \frac{1}{\lambda_k},$$

$$B^2 = \iint_Q |K(x,s)|^2\,dx\,ds = \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2}.$$

Розглянемо тепер ітеровані ядра симетричного ядра $K(x,s)$. Використовуючи (7.19) та ортогональність і нормованість системи власних функцій, маємо

$$K_2(x,s) = \int_a^b K(x,t)K(t,s)\,dt =$$

$$= \int_a^b \sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)}{\lambda_k} \sum_k \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(s)}{\lambda_k}\,dt = \sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k^2}.$$

Міркуючи аналогічно, отримуємо

$$K_n(x,s) = \sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k^n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Звідси випливають рівності

$$\int_a^b K_n(x,x)\,dx = \sum_k \frac{1}{\lambda_k^n},$$

$$\iint_Q |K_n(x,s)|^2\,dx\,ds = \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{2n}}.$$

Вважаючи, що $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \ldots \le |\lambda_k| \le \ldots$, для достатньо великих n можемо наближено обчислити модуль найближчого до нуля характеристичного числа λ_1, а саме:

$$|\lambda_1| \approx \left| \int_a^b K_n(x,x)\,dx \right|^{-1/n}, \qquad |\lambda_1| \approx \left(\iint_Q |K_n(x,s)|^2\,dx\,ds \right)^{-1/(2n)}.$$

§ 7.4. Інтегральні рівняння та крайові задачі, звідні до інтегральних рівнянь із симетричним ядром

До інтегральних рівнянь із симетричним ядром зводяться деякі інтегральні рівняння, ядра яких не є симетричними.

Розглянемо, наприклад, рівняння

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,s)\,q(s)y(s)\,ds+f(x), \tag{7.20}$$

де $G(x,s)$ – симетричне ядро, а $q(x)>0$. Помноживши обидві частини рівняння (7.20) на $\sqrt{q(x)}$, запишемо його у вигляді

$$y(x)\sqrt{q(x)}=\lambda\int_a^b G(x,s)\sqrt{p(x)p(s)}\;y(s)\sqrt{q(s)}ds+f(x)\sqrt{q(x)}.$$

Позначивши тепер $K(x,s)=G(x,s)\sqrt{q(x)q(s)}$, $z(x)=y(x)\sqrt{q(x)}$, $g(x)=f(x)\sqrt{q(x)}$, отримуємо інтегральне рівняння

$$z(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\,z(s)ds+g(x)$$

із симетричним ядром $K(x,s)$. Розв’язавши його, знайдемо також

$$y(x)=\frac{z(x)}{\sqrt{q(x)}}.$$

Зауважимо, що рівняння

$$y(x)=\lambda\int_a^b H(x,s)\,p(x)y(s)\,ds+f(x), \tag{7.21}$$

де $H(x,s)$ – симетричне ядро, $p(x)>0$, також можна звести до рівняння з симетричним ядром

$$z(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)\,z(s)ds+g(x),$$

де

$$K(x,s)=H(x,s)\sqrt{p(x)p(s)},$$

$$z(x)=\frac{y(x)}{\sqrt{p(x)}},\qquad g(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{p(x)}}.$$

Розв’язавши це рівняння, знайдемо $y(x)=z(x)\sqrt{p(x)}$.

Розглянемо тепер диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + g(x)y' + h(x)y = f_0(x), \qquad (7.22)$$

де $g(x),\ h(x),\ f_0(x)$ – неперервні на відрізку $[a,b]$ функції. Якщо помножити обидві його частини на функцію $p(x) = e^{\int_a^x g(t)dt}$, то рівняння (7.22) можемо записати у самоспряженому вигляді

$$\left(p(x)\,y'\right)' - q(x)y = f(x), \qquad (7.23)$$

де $q(x) = -p(x)h(x),\ f(x) = p(x)\,f_0(x).$

Шукатимемо розв'язок рівняння (7.23), який задовольняє лінійні крайові умови

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = A, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = B, \end{cases} \qquad (7.24)$$

де $\alpha_1, \alpha, \beta_1, \beta,\ A, B$ – задані числа, $|\alpha_1| + |\alpha| \neq 0$, $|\beta_1| + |\beta| \neq 0$. Задачу відшукання таких розв'язків називають ***крайовою задачею***.

Якщо $A = B = 0$, то умови (7.24) називають ***однорідними умовами***. Якщо, крім того, $f(x) \equiv 0$, то крайову задачу (7.23), (7.24) називають ***однорідною задачею.***

Запровадивши заміну $y(x) = z(x) + \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – довільна двічі неперервно диференційовна на відрізку $[a,b]$ функція, яка задовольняє неоднорідні крайові умови, отримуємо рівняння

$$\left(p(x)\,z'\right)' - q(x)z = f(x) - \left(p(x)\varphi'(x)\right)' + q(x)\varphi(x).$$

При цьому функція $z(x)$ задовольняє відповідні однорідні крайові умови. У зв'язку з цим надалі розглядатимемо лише крайову задачу для рівняння (7.23) з однорідними крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a) + \alpha y(a) = 0, \\ \beta_1 y'(b) + \beta y(b) = 0. \end{cases} \qquad (7.25)$$

Функцією Ґріна крайової задачі (7.23), (7.25) називають функцію $G(x,s)$, яка визначена для будь-яких $x, s \in [a,b]$ і задовольняє умови:

1) $G(x,s)$ *для кожного* $s \in (a,b)$ *як функція змінної* x *на проміжках* $[a,s)$ *і* $(s,b]$ *є розв'язком однорідного рівняння*

$$\left(p(x)y'\right)' - q(x)y = 0;$$

2) $G(x,s)$ *для кожного* $s \in [a,b]$ *як функція змінної x задовольняє однорідні крайові умови* (7.25);

3) $G(x,s)$ *для кожного* $s \in (a,b)$ *як функція змінної x неперервна на* $[a,b]$, *а її похідна у точці* $x = s$ *має розрив зі стрибком*

$$G'_x(x,s)\big|_{x=s+0} - G'_x(x,s)\big|_{x=s-0} = \frac{1}{p(s)}.$$

Якщо однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок, то неоднорідна крайова задача має єдиний розв'язок

$$y(x) = \int_a^b G(x,s) f(s)\,ds \qquad (7.26)$$

для будь-якої неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $f(x)$. При цьому функція $G(x,s)$ може бути знайдена у вигляді

$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s) y_1(x), & a \le x \le s, \\ c_2(s) y_2(x), & s \le x \le b, \end{cases}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – розв'язки однорідного рівняння, які відповідно задовольняють однорідні умови

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1'(a) + \alpha y_1(a) = 0, \\ \beta_1 y_2'(b) + \beta y_2(b) = 0, \end{cases}$$

а коефіцієнти c_1, c_2 однозначно визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} c_2(s) y_2(s) - c_1(s) y_1(s) = 0, \\ c_2(s) y_2'(s) - c_1(s) y_1'(s) = \dfrac{1}{p(s)}. \end{cases}$$

Функція Ґріна $G(x,s)$ є симетричною функцією своїх аргументів, тобто $G(x,s) = G(s,x)$.

З (7.26) випливає, що крайова задача для рівняння

$$\left(p(x) y'\right)' - q(x) y = \lambda y(x) + f_0(x)$$

з однорідними крайовими умовами (7.25) еквівалентна симетричному інтегральному рівнянню Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x,s) y(s)\,ds + f(x),$$

де $G(x,s)$ – функція Ґріна відповідної однорідної крайової задачі, а

$$f(x)=\int_a^b G(x,s)f_0(s)\,ds.$$

Рекомендована література: [3, с. 185–224], [5, с. 362–369], [7, с. 137–166], [8, с. 91–102], [9, с. 61–99], [20, с. 418–433].

Питання до розділу 7

1. Які ядра інтегральних операторів називають симетричними ядрами?
2. Запишіть формулу для резольвенти симетричного ядра.
3. Як виглядає розв'язок лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром, якщо λ не є характеристичним числом?
4. Запишіть формулу загального розв'язку лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з симетричним ядром для характеристичних значень параметра λ та вкажіть умови існування такого розв'язку.
5. З якого рівняння знаходять характеристичні числа та власні функції ядер інтегральних операторів?
6. Як знайти характеристичні числа та власні функції виродженого симетричного ядра?
7. Яким чином задачу на знаходження характеристичних чисел і власних функцій ядра $K(x,s)=\begin{cases} k_1(x)k_2(s), & a\le x\le s, \\ k_1(s)k_2(x), & s\le x\le b, \end{cases}$ можна звести до розв'язування крайової задачі?
8. Запишіть формули білінійного розвинення у ряд симетричного ядра та його ітерованих ядер за власними функціями цього ядра.
9. Наведіть приклади інтегральних рівнянь, які зводяться до інтегральних рівнянь із симетричними ядрами.
10. Яку функцію називають функцію Ґріна крайової задачі з однорідними крайовими умовами, і як через неї виражається розв'язок цієї задачі?

Вправи до розділу 7

1. Доведіть, що інтегральний оператор Фредгольма з симетричним ядром є самоспряженим у просторі $L_2[a,b]$.
2. Доведіть, що ядро вигляду
$$K(x,s)=\begin{cases} k_1(x)k_2(s), & a\le x\le s,\\ k_1(s)k_2(x), & s\le x\le b,\end{cases}$$
є симетричним у квадраті $Q=[a,b;a,b]$.
3. Знайдіть характеристичні числа та власні функції вироджених у квадраті $Q=[0,1;0,1]$ симетричних ядер:
   а) $K(x,s)=xs$;
   б) $K(x,s)=2xs-1$;
   в) $K(x,s)=\sin\pi x\cdot\sin\pi s$.
4. Знайдіть характеристичні числа та власні функції ядра
$$K(x,s)=\begin{cases} \sin x\cos s, & 0\le x\le s,\\ \sin s\cos x, & s\le x\le 1,\end{cases}$$
звівши їх знаходження до розв'язування крайової задачі.
5. Розв'яжіть лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду
$$y(x)=\int_0^x \sin s\cos x\, y(s)\,ds+\int_x^\pi \sin x\cos s\, y(s)\,ds+\sin x,$$
знаючи характеристичні числа та власні функції його ядра:
$$\lambda_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)^2-1,\quad \varphi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x,\quad k\in\mathbf{N}.$$
6. Зведіть лінійні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду до рівнянь із симетричними ядрами:
   а) $y(x)=\int_0^1 xse^{2x}y(s)\,ds+x^2$;
   б) $y(x)=\int_0^1 xs(s+1)^2y(s)\,ds-1$.
7. Знайдіть функцію Ґріна та виразіть через неї розв'язок крайової задачі
$$y''-y=f(x),\quad y'(0)=0,\ y(1)=0.$$

Розділ 8
ЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО РОДУ

§ 8.1. Лінійні інтегральні рівняння Фредгольма першого роду. Теорема Пікара

Оскільки інтегральний оператор Фредгольма

$$Ay(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds$$

є компактним у просторах $C[a,b]$, $L_2[a,b]$, то у кожному з них він не має обмеженого оберненого оператора. Отже, лінійне інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x)$$

матиме розв'язки не для всіх функцій $f(x)$, які належать цим просторам. Наприклад, рівняння $\int_a^b y(s)\,ds = x$ не має розв'язків у $C[a,b]$, $L_2[a,b]$ (його ліва частина є числом).

Детальніше проаналізуємо умови існування розв'язку інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду з довільним виродженим фредгольмовим ядром $K(x,s) = \sum_{i=1}^{m} a_i(x)b_i(s)$.

Припускаючи, що рівняння

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{m} a_i(x)b_i(s)y(s)\,ds = f(x) \tag{8.1}$$

має розв'язок, позначимо

$$b_i = \int_a^b b_i(s)y(s)\,ds, \quad i = 1,2,\ldots,m.$$

Тоді

$$\sum_{i=1}^{m} b_i a_i(x) \equiv f(x), \tag{8.2}$$

тобто функція $f(x)$ повинна бути лінійною комбінацією функцій $a_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,m$.

Нехай

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m} f_i\, a_i(x). \tag{8.3}$$

З (8.2), (8.3) випливає, що $b_i = f_i,\ i=1,2,...,m,$ тобто

$$\int_a^b b_i(s)y(s)ds = f_i, \quad i=1,2,...,m.$$

Шукаючи тепер розв'язок $y(x)$ рівняння (8.1) у вигляді

$$y(x)=\sum_{j=1}^{m} c_j a_j(x), \tag{8.4}$$

одержуємо

$$\int_a^b b_i(s)\sum_{j=1}^{m} c_j a_j(s)\,ds = f_i, \quad i=1,2,...,m.$$

Позначивши

$$\alpha_{ij}=\int_a^b b_i(s)a_j(s)\,ds, \quad i, j=1,2,...,m,$$

одержуємо лінійну неоднорідну систему рівнянь

$$\sum_{j=1}^{m} c_j\alpha_{ij} = f_i, \quad i=1,2,...,m.$$

Якщо визначник цієї системи відмінний від нуля, то, розв'язавши її, за формулою (8.4) знайдемо також розв'язок інтегрального рівняння (8.1). Якщо згаданий визначник дорівнює нулю, то інтегральне рівняння (8.1) або не матиме розв'язку вигляду (8.4), або матиме безліч таких розв'язків. Але наголосимо, що це зовсім не означає, що рівняння (8.1) не має розв'язків іншого вигляду.

Приклад 8.1. *Дослідити, чи має розв'язки інтегральне рівняння*

$$\int_0^1 (xs^2+1)y(s)\,ds = x.$$

Розв'язання. Шукаємо розв'язок у вигляді $y(x)=C_1x+C_2$. Тоді

$$\int_0^1 (xs^2+1)(C_1s+C_2)\,ds = x,$$

Звідки $C_1/4+C_2/3=1,\ C_1/2+C_2=0,$ а отже, $C_1=12,\ C_2=-6,$

$$y(x) = 12x - 6.$$

Однак легко переконатися, що розв'язком заданого рівняння є також функція $y(x) = 15(3x^2 - 1)/4$. ●

Встановимо необхідні і достатні умови існування та єдиності розв'язку інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду з симетричним ядром.

Симетричне ядро $K(x,s)$ називають ***замкненим*** у просторі $L_2[a,b]$, якщо для кожної функції $\omega(x) \in L_2[a,b]$ такої, що $\int_a^b K(x,s)\,\omega(s)ds = 0$, випливає, що $\omega(x) = 0$ майже скрізь на відрізку $[a,b]$. Замкнене ядро характерне тим, що його нормовані власні функції $\varphi_k(x)$, які відповідають характеристичним числам λ_k, утворюють повну у просторі $L_2[a,b]$ ортогональну систему функцій.

Наприклад, для симетричного ядра

$$K(x,s) = \begin{cases} \sin x \cos s, & 0 \le x \le s, \\ \sin s \cos x, & s \le x \le \pi, \end{cases}$$

(див. § 7.2) ортогональна нормована система власних функцій

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2/\pi}\sin\left(k - 1/2\right)x, \quad k \in \mathbf{N},$$

яка відповідає системі характеристичних чисел $\lambda_k = \left(k - 1/2\right)^2 - 1$, $k \in \mathbf{N}$, є повною у просторі $L_2[0,\pi]$. Отже, це симетричне ядро є замкненим у цьому просторі.

Теорема 8.1 (Пікара). *Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду*

$$\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x), \qquad f(x) \in L_2[a,b], \tag{8.5}$$

із замкненим симетричним ядром має єдиний розв'язок у просторі $L_2[a,b]$ *тоді і тільки тоді, коли збіжним є ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2$, *де*

$$f_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Доведення. Припустимо, що рівняння (8.5) має розв'язок $y(x)$ з простору $L_2[a,b]$. Тоді

$$f_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = \int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds \right) \varphi_k(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)\varphi_k(x)\,dx \right) y(s)\,ds = \int_a^b \left(\int_a^b K(s,x)\varphi_k(x)\,dx \right) y(s)\,ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k} \int_a^b \varphi_k(s)y(s)\,ds.$$

Звідси випливає, що числа

$$\lambda_k f_k = \int_a^b y(s)\varphi_k(s)\,ds$$

є коефіцієнтами Фур'є функції $y(x) \in L_2[a,b]$. Згідно з нерівністю Бесселя (§ 2.2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2$ є збіжним.

Навпаки, нехай ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2$ є збіжним. Тоді за теоремою Ріса – Фішера (§ 2.2) існує єдина функція $y(x) \in L_2[a,b]$, для якої числа $\lambda_k f_k$ є її коефіцієнтами Фур'є. Звідси, з врахуванням рівності

$$\int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds \right) \varphi_k(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_k} \int_a^b y(s)\varphi_k(s)\,ds = f_k,$$

випливає, що функції $f(x)$ та $\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds$ мають однакові коефіцієнти Фур'є відносно системи $\{\varphi_k(x)\}$ і, отже, збігаються за нормою простору $L_2[a,b]$. Тому функція

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k \varphi_k(x) \tag{8.6}$$

є єдиним розв'язком інтегрального рівняння (8.5) у просторі $L_2[a,b]$. ■

Якщо ядро $K(x,s)$ не є замкненим, то розв'язок (8.6) рівняння (8.5) не єдиний. А саме, якщо $\omega_1(x), \omega_2(x), ..., \omega_n(x)$ – такі функції з простору $L_2[a,b]$, для яких

$$\int_a^b K(x,s)\omega_i(s)ds = 0, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

то разом з довільним розв'язком $y_0(x)$ рівняння (8.5) має також розв'язок

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i \omega_i(x),$$

де C_i, $i = 1, 2, ..., n,$ – довільні сталі. У випадку виродженого симетричного ядра кількість таких функцій $\omega_i(x)$ та сталих C_i може бути нескінченною.

З іншого боку, умова замкненості ядра є суттєвою не лише для єдиності, а й для існування розв'язку. Наприклад, рівняння $\int_a^b y(s)\,ds = x$ з незамкненим симетричним ядром $K(x,s) \equiv 1$, очевидно, не має розв'язку у просторі $L_2[a,b]$.

§ 8.2. Лінійні інтегральні рівняння Вольтерри першого роду та методи їх зведення до рівнянь Вольтерри другого роду

Розглянемо лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_a^x K(x,s)y(s)\,ds = f(x). \tag{8.7}$$

Якщо ядро $K(x,s) \equiv 1$, то маємо рівняння $\int_a^x y(s)ds = f(x)$, ліва частина якого при $x = a$ дорівнює нулю. Для існування розв'язку цього рівняння необхідно, щоб $f(a) = 0$. Якщо, крім того, функція $y(x)$ – неперервна, то похідна лівої частини рівняння існує та дорівнює $y(x)$, тобто є неперервною функцією. Тому й похідна $f'(x)$ теж повинна існувати та бути неперервною функцією. Якщо ці дві необхідні умови виконуються, то, диференціюючи обидві частини рівняння за змінною x, отримаємо його єдиний розв'язок

$y(x) = f'(x)$ у просторі $C[a,b]$. Таким чином, необхідні умови виявилися водночас і достатніми для існування та єдиності розв'язку найпростішого інтегрального рівняння Вольтерри першого роду.

Розглянемо загальний випадок рівняння (8.7) з довільним неперервним ядром. При $x = a$ його ліва частина також перетворюється в нуль. Тому умова $f(a) = 0$ залишається необхідною. Якщо додатково припустити, що похідна $K'_x(x,s)$ є неперервною, то ліва частина рівняння (8.7) матиме неперервну похідну за змінною *x*. Отже, $f'(x)$ також має бути неперервною функцією. За виконання цих умов здиференціюємо обидві частини рівняння (8.7) за змінною *x*:

$$K(x,x)y(x) + \int_a^x K'_x(x,s)y(s)ds = f'(x). \qquad (8.8)$$

Проаналізуємо можливі випадки, які виникають при цьому:

1) $K(x,x) \neq 0$ *в усіх точках відрізка* $[a,b]$.

Тоді одержуємо еквівалентне рівнянню (8.7) рівняння Вольтерри першого роду

$$y(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x,s)}{K(x,x)} y(s)\,ds = \frac{f'(x)}{K(x,x)}$$

з неперервним ядром і неперервним вільним членом. Це рівняння має єдиний розв'язок у просторі $C[a,b]$;

2) $K(x,x) = 0$ *лише у деяких точках відрізка* $[a,b]$.

Такі рівняння називають ***рівняннями Вольтерри третього роду***;

3) $K(x,x) \equiv 0$.

Тоді знову отримуємо інтегральне рівняння Вольтерри першого роду:

$$\int_a^x K'_x(x,s)y(s)\,ds = f'(x).$$

Якщо $f'(a) = 0$ і функція $K''_{x^2}(x,s)$ є неперервною, то $f''(x)$ також має бути неперервною. Диференціюючи за виконання цих умов обидві частини останнього рівняння за змінною *x*, отримуємо рівняння

$$K'_x(x,x)y(x)+\int_a^x K''_{x^2}(x,s)y(s)\,ds = f''(x),$$

для якого знову можна розглядати три можливі випадки, тепер уже стосовно функції $K'_x(x,x)$.

Таку процедуру можна продовжувати доти, поки на деякому кроці не отримаємо інтегральне рівняння Вольтерри третього роду, яке розв'язати наявними методами не вдасться, або інтегральне рівняння Вольтерри першого роду, яке не має розв'язків внаслідок невиконання необхідних умов, або інтегральне рівняння Вольтерри рівняння другого роду з неперервними ядром і вільним членом. В останньому випадку отримане рівняння вигляду

$$K^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x,x)y(x)+\int_a^x K^{(n)}_{x^n}(x,s)y(s)\,ds = f^{(n)}(x),$$

де

$$K^{(n-1)}_{x^{n-1}}(x,x)\neq 0,\;\; f^{(n)}(a)=0,$$

а функції $K^{(n)}_{x^n}(x,s)$, $f^{(n)}(x)$ є неперервними, матиме єдиний розв'язок, який збігається з єдиним розв'язком інтегрального рівняння Вольтерри першого роду (8.7).

Приклад 8.2. *Розв'язати інтегральні рівняння Вольтерри першого роду зведенням їх до інтегральних рівнянь другого роду*:

1) $\int_0^x e^{x-s}y(s)\,ds=\sin x;$ 2) $\int_0^x \sin(x-s)y(s)\,ds=e^{x^2/2}-1;$

3) $\int_0^x \cos(x-s)y(s)\,ds=\sin x.$

Розв'язання. 1. Оскільки $f(0)=0$, а функції $K'_x(x,s)=e^{x-s}$ і $f'(x)=\cos x$ є неперервними, $K(x,x)=1$, то отримуємо еквівалентне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x)+\int_0^x e^{x-s}y(s)\,ds=\cos x.$$

Воно має єдиний розв'язок, який збігається з розв'язком заданого рівняння. З врахуванням заданого рівняння знаходимо

$$y(x)=\cos x-\sin x.$$

2. Функції $K'_x(x,s)=\cos(x-s)$, $f'(x)=xe^{x^2/2}$ є неперервними, $f(0)=0$, але $K(x,x)\equiv 0$. Диференціюючи обидві частини рівняння за змінною x, знову отримуємо інтегральне рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_0^x \cos(x-s)y(s)\,ds = xe^{x^2/2},$$

яке задовольняє необхідні умови існування розв'язку. Ще раз диференціюючи за змінною x, отримуємо інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x)-\int_0^x \sin(x-s)y(s)\,ds = e^{x^2/2}(1+x^2),$$

еквівалентне обом попереднім інтегральним рівнянням першого роду. З врахуванням початкового рівняння знаходимо розв'язок

$$y(x)=(e^{x^2/2}-1)+e^{x^2/2}(1+x^2)=e^{x^2/2}(2+x^2)-1.$$

3. Міркуючи аналогічно, одержуємо еквівалентне заданому рівнянню інтегральне рівняння Вольтерри другого роду

$$y(x)-\int_0^x \sin(x-s)y(s)\,ds = \cos x. \tag{8.9}$$

Для заходження його розв'язку здифереренціюємо обидві частини рівняння (8.9) за змінною x. У результаті одержуємо інтегро-диференціальне рівняння

$$y'(x)-\int_0^x \cos(x-s)y(s)\,ds = -\sin x.$$

З врахуванням початкового рівняння першого роду знаходимо, що $y'(x)=\sin x-\sin x=0$ і, отже, $y(x)=\mathrm{const}$. Але з (8.9) випливає, що $y(0)=1$. Тому розв'язком є $y(x)=1$. ●

Звести лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду (8.7) до рівняння Вольтерри другого роду можна також інтегруванням частинами.

Покладемо в (8.7)

$$\int_a^x y(s)\,ds = Y(x), \quad x\in[a,b].$$

Позначивши $u = K(x,s),\ dv = y(s)\,ds,$ отримуємо рівняння

$$K(x,x)Y(x) - \int_a^x K'_s(x,s)Y(s)\,ds = f(x).$$

Якщо $K(x,x) \neq 0,\ x \in [a,b],$ то

$$Y(x) - \int_a^x \frac{K'_s(x,s)}{K(x,x)} Y(s)\,ds = \frac{f(x)}{K(x,x)}.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно $Y(x),$ знайдемо шукану функцію $y(x) = Y'(x).$

Наприклад, рівняння

$$\int_0^x e^{x-s} y(s)ds = \sin x \qquad (8.10)$$

таким способом зводиться до рівняння

$$Y(x) + \int_0^x Y(s)ds = \sin x.$$

Оскільки $Y(0) = 0,$ то, диференціюючи обидві частини останнього рівняння за змінною x, одержимо еквівалентну задачу Коші

$$Y'(x) + Y(x) = \cos x, \quad Y(0) = 0.$$

Вкажемо на інший підхід при інтегруванні частинами. Позначивши у (8.7) $u = y(s),\ dv = K(x,s)\,ds,$ отримуємо рівняння

$$v(x,x)y(x) - \int_a^x v(x,s)y'(s)\,ds = f(x),$$

де $v(x,s) = \int_a^s K(x,t)\,dt.$ Якщо

$$v(x,x) = \int_a^x K(x,s)\,ds \neq 0, \quad x \in [a,b],$$

то одержуємо інтегро-диференціальне рівняння

$$y(x) - \int_a^x \frac{v(x,s)}{v(x,x)} y'(s)\,ds = \frac{f(x)}{v(x,x)},$$

з початковою умовою $y(a) = f(a)/v(a,a).$

Для рівняння (8.10) описану тут процедуру зведення до інтегро-диференціального рівняння здійснити не вдасться, бо $v(x,x) \equiv 0.$

§ 8.3. Метод квадратур для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду

Методика заміни інтеграла скінченною сумою у рівняннях Вольтерри першого роду та одержання апроксимуючої алгебраїчної системи залишається такою ж, як і для рівняння Вольтерри другого роду. Проте особливість рівнянь першого роду, пов'язана з відсутністю шуканої функції поза знаком інтеграла, приводить до деяких відмінностей.

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на n частин і запишемо вираз

$$\int_a^{x_i} K(x_i, s) y(s)\, ds = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

З цього виразу з допомогою квадратурної формули

$$\int_a^b \varphi(s)\, ds = \sum_{j=0}^{n} A_j \varphi(s_j) + R(\varphi),$$

де $R(\varphi)$ – похибка заміни інтеграла скінченною сумою, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{i} A_j K_{ij} \bar{y}_j = f_i, \ \ i = 0,1,\ldots,n, \tag{8.11}$$

де A_j – коефіцієнти квадратурної формули, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$, $f_i = f(x_i)$, $\bar{y}_i$ – наближені значення шуканої функції у вузлах x_i.

Припускаючи, що $K(x,x) \neq 0,\ x \in [a,b]$, з (8.11) знаходимо

$$\bar{y}_i = \frac{1}{A_i K_{ii}} \left(f_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_j K_{ij} \bar{y}_j \right), \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Вважаючи функції $K'_x(x,s)$ та $f'(x)$ неперервними, з рівності (8.8) при $x = a$ маємо

$$\bar{y}_0 = y(a) = \frac{f'(a)}{K(a,a)} = \frac{f'(a)}{K_{00}}.$$

Використаємо квадратурну формулу трапецій. Тоді

$$\bar{y}_0 = \frac{f'(a)}{K_{00}}, \qquad \bar{y}_1 = \frac{f_1 - (x_1 - x_0)/2 \cdot K_{10} \bar{y}_0}{(x_1 - x_0)/2 \cdot K_{11}}, \tag{8.12}$$

$$\bar{y}_i = \frac{f_i - \dfrac{x_1 - x_0}{2} K_{i0}\bar{y}_0 - \sum\limits_{j=1}^{i-1} \dfrac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} K_{ij}\bar{y}_j}{(x_i - x_{i-1})/2 \cdot K_{ii}}, \quad i = 2,3,\ldots,n. \quad (8.13)$$

Якщо відрізок $[a,b]$ розбити на n рівних частин точками

$$x_i = a + ih,\ \ i = 0,1,\ldots,n, \quad h = (b-a)/n,$$

то

$$\bar{y}_0 = \frac{f'(a)}{K_{00}}, \qquad \bar{y}_i = \frac{2}{K_{ii}}\left(\frac{f_i}{h} - \sum_{j=0}^{i-1} a_j K_{ij}\bar{y}_j\right),\ \ i = 1,2,\ldots,n, \quad (8.14)$$

де

$$f'(a) = \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}, \qquad a_j = \begin{cases} 1/2, & j = 0, \\ 1, & j > 0. \end{cases}$$

Приклад 8.3. *Знайти методом квадратур наближений розв'язок рівняння*

$$\int_0^x (1 + x - s)y(s)\,ds = x.$$

Розв'язання. Виберемо крок $h = 0,2$. Оскільки

$$K(x,s) = 1 + x - s, \quad f(x) = x, \quad f'(x) = 1, \quad f'(0) = 1,$$

то згідно з (8.14)

$$\bar{y}_0 = \frac{f'(0)}{K_{00}} = 1,$$

$$\bar{y}_1 = \frac{2}{K_{11}}\left(\frac{f_1}{h} - 0,5 \cdot K_{10}\bar{y}_0\right) = \frac{2}{1}\left(\frac{0,2}{0,2} - 0,5 \cdot 1,2 \cdot 1\right) = 0,8,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{2}{K_{22}}\left(\frac{f_2}{h} - 0,5 \cdot K_{20}\bar{y}_0 - K_{21}\bar{y}_1\right) =$$

$$= \frac{2}{1}\left(\frac{0,4}{0,2} - 0,5 \cdot 1,4 \cdot 1 - 1,2 \cdot 0,8\right) = 0,68,$$

$$\bar{y}_3 = \frac{2}{K_{33}}\left(\frac{f_3}{h} - 0,5 \cdot K_{30}\bar{y}_0 - K_{31}\bar{y}_1 - K_{32}\bar{y}_2\right) =$$

$$= \frac{2}{1}\left(\frac{0,6}{0,2} - 0,5 \cdot 1,6 \cdot 1 - 1,4 \cdot 0,8 - 1,2 \cdot 0,68\right) = 0,528,$$

$$\overline{y}_4=\frac{2}{K_{44}}\left(\frac{f_4}{h}-0,5\cdot K_{40}\overline{y}_0-K_{41}\overline{y}_1-K_{42}\overline{y}_2-K_{43}\overline{y}_3\right)=$$

$$=\frac{2}{1}\left(\frac{0,8}{0,2}-0,5\cdot 1,8\cdot 1-1,6\cdot 0,8-1,4\cdot 0,68-1,2\cdot 0,528\right)=0,4688,$$

$$\overline{y}_5=\frac{2}{K_5}\left(\frac{f_5}{h}-0,5\cdot K_{50}\overline{y}_0-K_{51}\overline{y}_1-K_{52}\overline{y}_2-K_{53}\overline{y}_3-K_{54}\overline{y}_4\right)=$$

$$=\frac{2}{1}\left(\frac{1}{0,2}-0,5\cdot 2\cdot 1-1,8\cdot 0,8-1,6\cdot 0,68-1,4\cdot 0,528-1,2\cdot 0,4688\right)=$$

$$=0,34048.$$

Знайдемо також точний розв’язок заданого рівняння. Для цього двічі здиференціюємо обидві його частини за змінною x:

$$y(x)+\int_0^x y(s)\,ds=1,\qquad y'(x)+y(x)=0.$$

Оскільки $y(0)=1$, то точним розв’язком є $y(x)=e^{-x}$. Для нього

$$y_0=e^0=1,\qquad y_1=e^{-0,2}\approx 0,81873,\qquad y_2=e^{-0,4}\approx 0,67032,$$

$$y_3=e^{-0,6}\approx 0,54881,\qquad y_4=e^{-0,8}\approx 0,44933,\qquad y_5=e^{-1}\approx 0,36788.$$

Як бачимо, похибка отриманого наближення менша, ніж 0,03. ●

У загальному випадку формули для представлення похибки розв’язку методом квадратур визначають із врахуванням системи

$$\sum_{j=0}^{i}A_jK_{ij}y_j=f_i-R_i,\quad i=0,1,\ldots,n,$$

де R_i – квадратурні лишки. Тоді

$$\sum_{j=0}^{i}A_jK_{ij}\Delta y_j=-R_i,\quad i=0,1,\ldots,n,$$

де $\Delta y_i=y_i-\overline{y}_i$ – різниця між точним та наближеним розв’язком. У результаті отримуємо:

$$\Delta y_0\approx\Delta y_1\approx 0,$$

$$\Delta y_i\approx-\frac{R_i+\sum_{j=1}^{i-1}\left(x_{j+1}-x_{j-1}\right)/2\cdot K_{ij}\Delta y_j}{h_iK_{ii}/2},\quad i=2,3,\ldots,n,$$

де $h_i=x_i-x_{i-1}$,

$$R_i \approx -\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{i} h_j^3 \left(K(x_i,s)y(s)\right)''_{s^2}\Big|_{s=x_j}.$$

При цьому

$$\left(K(x_i,s)y(s)\right)''_{s^2}\Big|_{s=x_j} \approx$$

$$\approx \begin{cases} 2\left(\dfrac{K_{ij-1}\overline{y}_{j-1}}{h_j(h_j+h_{j+1})} - \dfrac{K_{ij}\overline{y}_j}{h_j h_{j+1}} + \dfrac{K_{ij+1}\overline{y}_{j+1}}{(h_j+h_{j+1})h_{j+1}}\right), & j=1,2,\dots,i-1, \\ \dfrac{K_{ij-2}\overline{y}_{j-2}}{h_{j-1}(h_{j-1}+h_j)} - \dfrac{K_{ij-1}\overline{y}_{j-1}}{h_{j-1}h_j} + \dfrac{K_{ij}\overline{y}_j}{(h_{j-1}+h_j)h_j}, & j=i. \end{cases}$$

Якщо $x_i = a + ih,\ i = 0,1,\dots,n,$ то формули для наближеного зображення похибки набувають вигляду

$$\Delta y_0 \approx \Delta y_1 \approx 0,$$

$$\Delta y_i \approx \frac{1}{K_{ii}}\left(P_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij}\Delta y_j\right), \quad i = 2,3,\dots,n,$$

де

$$P_i \approx \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{i} G_{ij}, \quad i = 2,3,\dots,n,$$

$$G_{ij} \approx \begin{cases} 2\left(K_{ij-1}\overline{y}_{j-1} - 2K_{ij}\overline{y}_j + K_{ij+1}\overline{y}_{j+1}\right), & j=1,2,\dots,i-1, \\ K_{ij-2}\overline{y}_{j-2} - 2K_{ij-1}\overline{y}_{j-1} + K_{ij}\overline{y}_j, & j=i. \end{cases}$$

Рекомендована література: [1, с. 111–124], [3, с. 225–243], [9, с. 103–115], [10, с. 106–124] , [16, с. 46–63] , [20, с. 433–437].

Питання до розділу 8

1. Чому інтегральні оператори Фредгольма та Вольтерри не мають обмежених обернених у просторах $C[0,1]$ та $L_2[0,1]$?
2. Якою є необхідна умова існування розв’язку лінійного неоднорідного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з виродженим ядром?
3. Яке ядро інтегрального оператора Фредгольма називають замкненим?

4. Сформулюйте необхідну і достатню умову існування єдиного розв'язку лінійного неоднорідного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду зі замкненим симетричним ядром.
5. Чи може лінійне неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма першого роду з виродженим симетричним ядром мати єдиний розв'язок?
6. Якими є необхідні та достатні умови існування єдиного розв'язку лінійного неоднорідного інтегрального рівняння Вольтерри першого роду з ядром $K(x,s)=1$ у просторі $C[a,b]$?
7. Які додаткові вимоги накладають на ядро інтегрального рівняння Вольтерри першого роду для його зведення до інтегрального рівняння Вольтерри другого роду методом диференціювання?
8. Чи кожне лінійне неоднорідне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду з достатню кількість разів диференційованими функціями $K(x,s)$ та $f(x)$ методом диференціювання можна звести до інтегрального рівняння Вольтерри другого роду?
9. Яким чином, на вашу думку, повинні бути пов'язані між собою порядок нуля ядра $K(x,s)$ при $s=x$ та порядок нуля функції $f(x)$ у точці $x = a$ для існування єдиного розв'язку лінійного неоднорідного інтегрального рівняння Вольтерри першого роду?
10. У чому полягають особливості застосування методу квадратур для лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду?

Вправи до розділу 8

1. Перевірте, які з рівнянь мають неперервні розв'язки:

   а) $\int_0^1 xsy(s)ds = x;$ б) $\int_0^1 xsy(s)\,ds = x+1;$

   в) $\int_0^1 (x+s)y\left(s\right)ds = x;$ г) $\int_0^1 (x+s)y(s)\,ds = x+1.$

2. Для рівнянь з вправи 1, які мають неперервні розв'язки, знайдіть принаймні два з них.
3. Для власних функцій $\varphi_k(x)=\sqrt{2/\pi}\sin\left(k-1/2\right)x,$ які відповідають характеристичним числам $\lambda_k = \left(k-1/2\right)^2-1,\ k\in \mathbf{N},$ ядра

$$K(x,s)=\begin{cases}\sin x\cos s, & 0\le x\le s,\\ \sin s\cos x, & s\le x\le \pi,\end{cases}$$

перевірте виконання рівності Парсеваля, якщо $f(x)=1$.

4. Враховуючи замкненість ядра $K(x,s)$ з вправи 3, знайдіть розв'язок лінійного інтегрального рівняння Фредгольма першого роду $\int_0^{\pi} K(x,s)y(s)ds=1$.

5. Не розв'язуючи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду, визначте, котрі з них не мають неперервних розв'язків:

   а) $\int\limits_0^x (x-s)\,y(s)\,ds = 2x^2$; б) $\int\limits_0^x (e^{x-s}-1)\,y(s)\,ds = \sin x$;

   в) $\int\limits_0^x e^{x-s} y(s)\,ds = x$; г) $\int\limits_0^x (x-s)^2 y(s)\,ds = e^{2x}-2x-1$.

6. Розв'яжіть лінійні інтегральні рівняння Вольтерри першого роду, звівши їх до рівнянь другого роду методами диференціювання та інтегрування частинами:

   а) $\int\limits_0^x (x-s)\,y(s)ds = e^{3x}-3x-1$; б) $\int\limits_0^x e^{x-s} y(s)\,ds = x^2$;

   в) $\int\limits_0^x \cos(x-s)y(s)\,ds = x+x^2$; г) $\int\limits_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)\,ds = x^2 e^{-x}$.

7. Знайдіть наближений розв'язок лінійного інтегрального рівняння Вольтерри першого роду

$$\int\limits_0^x e^{x-s} y(s)\,ds = x^2$$

   на відрізку [0,1] методом квадратур, використовуючи для наближеного обчислення інтеграла квадратурну формулу трапецій для $n=5$. Порівняйте отриманий результат з точним розв'язком $y(x)=2x-x^2$.

Розділ 9
ОПЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ ТИПУ ЗГОРТКИ

§ 9.1. Перетворення Лапласа та його властивості. Формули зображень

Операційне числення широко використовується в різних галузях науки і техніки. Особливо велику роль воно відіграє у дослідженні перехідних процесів у лінійних системах електротехніки, радіотехніки, механіки та інших галузей знань.

Проілюструємо його ефективність на прикладах застосування перетворення Лапласа до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри та лінійних інтегро-диференціальних рівнянь.

Оригіналом називають довільну комплекснозначну функцію $f(x)$ дійсної змінної x, яка задовольняє умови:

1) $f(x)$ визначена та неперервна (або кусково-неперервна) разом зі своїми похідними до деякого порядку для $x \geq 0$;

2) $|f(x)|$ зростає не швидше, ніж деяка показникова функція, тобто існують такі додатні числа M і s_0, не залежні від x, що для всіх $x \geq 0$ виконується нерівність $|f(x)| \leq Me^{s_0 x}$;

3) $f(x) \equiv 0$ для $x < 0$.

Клас усіх оригіналів позначимо символом D. Зрозуміло, що така множина є лінійним простором.

Зображенням оригінала $f(x)$ називають функцію $F(p)$ комплексної змінної $p = \sigma + i\omega$, визначену ***інтегралом Лапласа***

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dx. \tag{9.1}$$

Функцію $F(p)$ також називають ***перетворенням Лапласа*** функції $f(x)$. Надалі записуватимемо $F(p) = L[f(x)]$.

Інтеграл Лапласа невласний. Він рівномірно збігається, якщо функція $f(x)$ задовольняє накладені на оригінал умови. Дійсно, для $\operatorname{Re} p = \sigma > s_0$ маємо

$$\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-pt}dt \le M\int_0^{+\infty} e^{-px}e^{s_0 x}dx = M\int_0^{+\infty} e^{(s_0-p)x}dx =$$

$$= \frac{M}{s_0-p}e^{(s_0-p)x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{p-s_0}.$$

Безпосередньо з означення перетворення Лапласа випливає його ***лінійність***, тобто

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x)\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k L\left[f_k(x)\right].$$

Відзначимо також, що $\lim\limits_{\operatorname{Re} p\to+\infty} F(p)=0$ для довільного оригінала $f(x)$. Справді, якщо $f(x)\in D,$ то можна вибрати такі сталі $M>0$ і $s_0>0,$ що $|f(x)|\le Me^{s_0 x}$. Тоді при $\operatorname{Re} p=\sigma>s_0$ отримуємо

$$|F(p)| = \left|\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx\right| \le \int_0^{+\infty} |f(x)|e^{-px}dx \le M\int_0^{+\infty} e^{s_0 x}e^{-px}dx =$$

$$= M\int_0^{+\infty} e^{-(p-s_0)x}dx = \frac{M}{\sigma-s_0} \to 0, \quad \text{якщо } \operatorname{Re} p\to\infty.$$

Відомо, що *кожне зображення* $F(p)$ *при* $\operatorname{Re} p>s_0$ *є аналітичною функцією та може бути розвинене у степеневий ряд, а отже, є необмежену кількість разів інтегровним і диференційовним в області збіжності ряду.*

Знайдемо зображення деяких елементарних функцій. При цьому, не змінюючи позначень для функції $f(x)$, кожного разу замість неї розглядатимемо функцію $\sigma(x)f(x),$ де $\sigma(x)$ – ***функція Гевісайда***, визначена формулою

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

1. $L[1] = \int_0^{+\infty} e^{-px}dx = -\frac{e^{-px}}{p}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}, \ \operatorname{Re} p>0.$

2. $L[e^{\alpha x}] = \int_0^{+\infty} e^{\alpha x}e^{-px}dx = -\frac{e^{-(p-\alpha)x}}{p-\alpha}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p>\operatorname{Re}\alpha.$

Покладаючи тут $\alpha=i\omega$ та $\alpha=-i\omega,$ відповідно отримуємо:

3. $L[e^{i\omega x}]=\dfrac{1}{p-i\omega}, \quad L[e^{-i\omega x}]=\dfrac{1}{p+i\omega}, \ \operatorname{Re} p>0.$

Далі, враховуючи лінійність перетворення Лапласа та вже отримані зображення, при відповідних їм $\operatorname{Re} p$ маємо:

4. $L[\operatorname{ch}\alpha x]=L\left[\dfrac{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}{2}\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-\alpha}+\dfrac{1}{p+\alpha}\right)=\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}.$

5. $L[\operatorname{sh}\alpha x]=L\left[\dfrac{e^{\alpha x}-e^{-\alpha x}}{2}\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-\alpha}-\dfrac{1}{p+\alpha}\right)=\dfrac{\alpha}{p^2-\alpha^2}.$

6. $L[\cos\omega x]=L\left[\dfrac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-i\omega}+\dfrac{1}{p+i\omega}\right)=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}.$

7. $L[\sin\omega x]=L\left[\dfrac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}\right]=\dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{p-i\omega}-\dfrac{1}{p+i\omega}\right)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}.$

Припустимо тепер, що нам відоме зображення

$$F(p)=L[f(x)], \quad \operatorname{Re} p>s_0.$$

Застосуємо перетворення Лапласа до функції $f(x)e^{\alpha x}$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}e^{\alpha x} f(x)dx=\int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)x} f(x)\,dx = F(p-\alpha), \ \ \operatorname{Re}(p-\alpha)>s_0. \quad (9.2)$$

Формулу (9.2) називають ***формулою зміщення аргумента зображення***. З неї, зокрема, отримуємо такі зображення:

8. $L[e^{\alpha x}\cos\omega x]=\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}.$

9. $L[e^{\alpha x}\sin\omega x]=\dfrac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}.$

У практичних застосуваннях часто використовують ***формулу зміщення аргумента оригінала***:

$$L\big[f_a(x)\big]=e^{-ap}F(p), \quad a>0,$$

де

$$F(p)=L[f(x)], \qquad f_a(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ f(x-a), & x\ge a.\end{cases}$$

Знайдемо тепер перетворення Лапласа функції $xf(x)$ за відомим зображенням $F(p)=L[f(x)]$. Оскільки інтеграл Лапласа збігається рівномірно, то його можна диференціювати за параметром p. У результаті одержуємо

$$\frac{dF(p)}{dp} = \frac{d}{dp}\left(\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dx\right) = \int_0^{+\infty} \frac{de^{-px}}{dp} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-px}\left(-x f(x)\right)dx = -L[x f(x)].$$

Таким чином,

$$L[x f(x)] = -\frac{dF(p)}{dp}.$$

Диференціюючи n разів, одержуємо формулу

$$L[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}. \qquad (9.3)$$

Підставляючи у (9.3) $f(x) = 1$, знаходимо зображення оригінала x^n :

10. $L[x^n] = \left(-1\right)^n \dfrac{d^n}{dp^n}\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}, \; n \in \mathbf{N}.$

Наведемо приклади зображень, які випливають з формули (9.3) і часто використовуються для розв'язування інтегральних рівнянь:

11. $L[x^n e^{\alpha x}] = \dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}, \quad n \in \mathbf{N}.$

12. $L[x \operatorname{ch} \alpha x] = \dfrac{p^2 + \alpha^2}{(p^2 - \alpha^2)^2}.$

13. $L[x \operatorname{sh} \alpha x] = \dfrac{2\alpha p}{(p^2 - \alpha^2)^2}.$

14. $L[x \cos \omega x] = \dfrac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$

15. $L[x \sin \omega x] = \dfrac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}.$

Корисною буде також формула

16. $L[\sin \omega x - \omega x \cos \omega x] = \dfrac{2\omega^3}{(p^2 + \omega^2)^2}.$

§ 9.2. Методи відновлення оригінала за його зображенням

Розв'язуючи інтегральні рівняння з допомогою перетворення Лапласа, необхідно вміти не лише знаходити зображення оригіналів, а й відновлювати такі функції за їхніми зображеннями. Можливість такого відновлення гарантує наступна теорема.

Теорема 9.1 (теорема єдиності). *Якщо два зображення* $F(p)$ *та* $\Phi(p)$ *збігаються, то збігаються також відповідні оригінали в усіх точках, за винятком, можливо, точок розриву.*

Відновити оригінал можна за допомогою ***оберненого перетворення Лапласа***

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)e^{px}dp=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega}F(p)e^{px}dp.$$

Проте часто обчислення таких інтегралів є доволі громіздким. Тому вкажемо на інший підхід до відновлення оригінала у випадку, коли $F(p)$ є відношенням двох многочленів. При цьому з властивості $F(p)\to 0$ при $\operatorname{Re} p\to\infty$ (§ 9.1) випливає, що такий дріб буде правильним і, отже, може бути поданий у вигляді скінченної суми простих дробів вигляду:

$$\frac{A}{p-\alpha},\quad \frac{A}{(p-\alpha)^k},\quad \frac{Ap+B}{p^2+bp+c},\quad \frac{Ap+B}{(p^2+bp+c)^k},$$

де $k=2,3,\ldots,$ $b^2-4c<0.$ Враховуючи лінійність оберненого перетворення Лапласа, у такому разі достатньо буде знайти обернені перетворення Лапласа для таких простих дробів. Розглянемо кожен з цих дробів окремо:

1) $F(p)=\dfrac{A}{p-\alpha}\quad\Rightarrow\quad f(x)=Ae^{\alpha x},$

що безпосередньо випливає з формули 2 зображення функції $e^{\alpha x}$.

2) $F(p)=\dfrac{A}{(p-\alpha)^k}\quad\Rightarrow\quad f(x)=\dfrac{A}{(k-1)!}x^{k-1}e^{\alpha x},$

що випливає з формули 11 при $n=k-1\in\mathbf{N}.$

3) $F(p)=\dfrac{Ap+B}{p^2+bp+c},\quad b^2-4c<0.$

Запишемо $F(p)$ у вигляді

$$F(p)=\frac{A\left(p+b/2\right)+\left(B-Ab/2\right)}{\left(p+b/2\right)^2+\left(c-b^2/4\right)}.$$

З врахуванням формул 8, 9 отримуємо, що

$$f(x)=Ae^{-bx/2}\cos\sqrt{c-b^2/4}\,x+\frac{B-Ab/2}{\sqrt{c-b^2/4}}e^{-bx/2}\sin\sqrt{c-b^2/4}\,x.$$

4) $F(p)=\dfrac{Ap+B}{(p^2+bp+c)^k},\quad k=2,3,...,\quad b^2-4c<0.$

Обмежуючись випадком $k=2,$ запишемо $F(p)$ у вигляді

$$F(p)=\frac{A\left(p+b/2\right)+\left(B-Ab/2\right)}{\left(\left(p+b/2\right)^2+\left(c-b^2/4\right)\right)^2}.$$

Звідси, з врахуванням формул 15, 16 і формули зміщення аргумента зображення, отримуємо:

$$f(x)=\frac{A}{2\sqrt{c-b^2/4}}xe^{-bx/2}\sin\sqrt{c-b^2/4}\,x+$$

$$+\frac{B-Ab/2}{2\sqrt{\left(c-b^2/4\right)^3}}e^{-bx/2}\left(\sin\sqrt{c-b^2/4}\,x-\sqrt{c-b^2/4}\,x\cdot\cos\sqrt{c-b^2/4}\,x\right).$$

Розглянемо, наприклад, знаходження оригінала $f(x)$, якщо його зображенням є

$$F(p)=\frac{2p^3-5p^2-3p-9}{p^4-p^2-2p+2}=\frac{2p^3-5p^2-3p-9}{(p-1)^2(p^2+2p+2)}.$$

Записуючи зображення $F(p)$ у вигляді

$$F(p)=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{(p-1)^2}+\frac{Cp+D}{p^2+2p+2}$$

з невизначеними коефіцієнтами A, B, C, D, після зведення до спільного знаменника прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенів p у чисельниках заданого та отриманого дробів. У результаті з системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases}A+C=2,\\ A+B+D-2C=-5,\\ 2B+C-2D=-3,\\ -2A+2B+D=-9\end{cases}$$

знайдемо $A=1,\ B=-3,\ C=1,\ D=-1.$

Отже,

$$F(p)=\frac{1}{p-1}-\frac{3}{(p-1)^2}+\frac{p-1}{p^2+2p+2}=$$
$$=\frac{1}{p-1}-\frac{3}{(p-1)^2}+\frac{(p+1)-2}{(p+1)^2+1^2},$$

а тому

$$f(x)=e^x-3xe^x+e^{-x}\cos x-2e^{-x}\sin x.$$

§ 9.3. Застосування перетворення Лапласа до розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри типу згортки

При розв'язуванні багатьох інтегральних рівнянь виникають інтеграли вигляду

$$\int_0^x g(x-s)f(s)\,ds. \tag{9.4}$$

Інтеграл (9.4) називають ***згорткою*** функцій $g(x),\ f(x)$ і позначають $g(x)*f(x)$.

Припустимо, що функції $g(x),\ f(x)$ є оригіналами, причому

$$L[g(x)]=G(p),\qquad L[f(x)]=F(p).$$

Тоді

$$L[g(x)*f(x)]=L\left[\int_0^x g(x-s)f(s)\,ds\right]=\int_0^{+\infty}e^{-px}\int_0^x g(x-s)f(s)\,ds\,dx.$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримуємо

$$L[g(x)*f(x)]=\int_0^{+\infty}f(s)\int_s^{+\infty}g(x-s)e^{-px}dx\,ds=$$

$$=\int_0^{+\infty}f(s)\int_0^{+\infty}g(x)e^{-p(x+s)}dx\,ds=\int_0^{+\infty}g(x)e^{-px}dx\cdot\int_0^{+\infty}f(s)e^{-ps}ds=G(p)F(p).$$

Таким чином, згортка двох оригіналів також є оригіналом, а її зображення дорівнює добутку зображень цих оригіналів.

Розглянемо тепер ***лінійне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду типу згортки***, тобто рівняння вигляду

$$y(x)=\lambda\int_0^x k(x-s)y(s)ds+f(x). \qquad (9.5)$$

Якщо у (9.5) функції $y(x),\ k(x),\ f(x)$ є оригіналами, то, застосовуючи до обох частин цього рівняння перетворення Лапласа, отримуємо рівняння у зображеннях

$$Y(p)=\lambda K(p)Y(p)+F(p).$$

З нього знаходимо зображення розв’язку $y(x)$ – функцію

$$Y(p)=\frac{F(p)}{1-\lambda K(p)}.$$

Для завершення розв’язання залишається відновити функцію $y(x)$ за її зображенням.

Приклад 9.1. *Розв’язати операційним методом рівняння*

$$y(x)=\int_0^x (x-s)y(s)\,ds+4e^x.$$

Розв’язання. Оскільки $k(x)=x,\ \ f(x)=4e^x$, то

$$K(p)=\frac{1}{p^2},\qquad F(p)=\frac{4}{p-1}.$$

З рівняння у зображеннях

$$Y(p)=\frac{1}{p^2}Y(p)+\frac{4}{p-1}.$$

знаходимо

$$Y(p)=\frac{4p^2}{(p-1)^2(p+1)}=\frac{3}{p-1}+\frac{2}{(p-1)^2}+\frac{1}{p+1}.$$

Отже, шуканим розв’язком є функція $y(x)=3e^x+2xe^x+e^{-x}$. ●

Приклад 9.2. *Розв’язати операційним методом рівняння*

$$y(x)+\int_0^x e^{x-s}y(s)\,ds=\cos x.$$

Розв’язання. Зображеннями функцій $k(x)=e^x,\ \ f(x)=\cos x$ є відповідно $K(p)=\dfrac{1}{p-1}$ і $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$. Тому рівнянням у зображеннях є

$$Y(p)+\frac{1}{p-1}Y(p)=\frac{p}{p^2+1}$$

або

$$Y(p)=\frac{p-1}{p^2+1}=\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+1}.$$

Звідси знаходимо $y(x)=\cos x-\sin x.$ ●

Відзначимо, що рівняння

$$y(x)-\int_0^x \sin(x-s)y(s)\,ds=e^{x^2/2}(1+x^2),$$

розв’язане у прикладі 8.2, не можна розв’язати операційним методом, бо права частина цього рівняння не є оригіналом.

Перетворення Лапласа можна застосувати і для розв’язування ***лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду типу згортки***, тобто для рівнянь вигляду

$$\int_0^x k(x-s)y(s)\,ds=f(x). \tag{9.6}$$

Якщо у (9.6) функції $y(x)$, $k(x)$, $f(x)$ є оригіналами, то відповідним рівнянням у зображеннях є $K(p)Y(p)=F(p)$. Звідси

$$Y(p)=\frac{F(p)}{K(p)},$$

і залишається відновити розв’язок $y(x)$ за його зображенням.

Приклад 9.3. *Розв’язати операційним методом рівняння*

$$\int_0^x e^{x-s}y(s)\,ds=\sin x.$$

Розв’язання. З рівняння у зображеннях

$$\frac{1}{p-1}Y(p)=\frac{1}{p^2+1}.$$

знаходимо

$$Y(p)=\frac{p-1}{p^2+1}=\frac{p}{p^2+1}-\frac{1}{p^2+1},$$

а отже, $y(x)=\cos x-\sin x.$ ●

Відзначимо, що рівняння $\int_0^x \sin(x-s)y(s)ds = e^{x^2/2} - 1,$ розв'язане у прикладі 8.2, не можна розв'язати операційним методом, бо його права частина не є оригіналом.

Акцентуємо увагу, що перед розв'язуванням інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду операційним методом потрібно перевірити виконання необхідних умов існування та єдиності розв'язку. До чого може привести ігнорування цієї вимоги, проілюструємо на прикладі рівняння

$$\int_0^x e^{x-s} y(s)\, ds = \cos x.$$

Для нього рівнянням у зображеннях є

$$\frac{1}{p-1} Y(p) = \frac{p}{p^2+1},$$

звідки

$$Y(p) = \frac{p(p-1)}{p^2+1}.$$

Оскільки $\lim_{p\to\infty} Y(p) = 1 \neq 0,$ то ця функція не є зображенням жодного оригінала. Отриманий результат не є випадковим, бо функція $f(x) = \cos x$ не задовольняє необхідну умову $f(0) = 0.$ Отже, інтегральне рівняння не має розв'язків.

З допомогою перетворення Лапласа можна розв'язувати також ***системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду типу згортки***, тобто системи рівнянь вигляду

$$y_i(x) = \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_0^x k_{ij}(x-s) y_j(s)\, ds + f_i(x), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

за умови, що функції $k_{ij}(x),\ i, j = 1, 2, ..., n,$ та $f_i(x),\ i = 1, 2, ..., n,$ є оригіналами. Якщо позначити

$$Y_i(p) = L[y_i(x)],$$

$$K_{ij}(p) = L[k_{ij}(x)], \quad F_i(p) = L[f_i(x)],$$

то одержуємо систему рівнянь у зображеннях

$$Y_i(p)=\lambda\sum_{j=1}^{n}K_{ij}(p)Y_j(p)+F_i(p),\quad i=1,2,\ldots,n,$$

відносно невідомих функцій $Y_i(p),\ i=1,2,\ldots,n.$

Приклад 9.4. *Розв'язати операційним методом систему інтегральних рівнянь*

$$\begin{cases} y_1(x)=\int\limits_0^x y_1(s)\,ds-\int\limits_0^x e^{x-s}y_2(s)\,ds+e^x, \\ y_2(x)=-\int\limits_0^x (x-s)y_1(s)\,ds+\int\limits_0^x y_2(s)\,ds-x. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки

$$L[1]=\frac{1}{p},\qquad L[e^x]=\frac{1}{p-1},\qquad L[x]=\frac{1}{p^2},$$

то маємо таку систему рівнянь у зображеннях:

$$\begin{cases} Y_1(p)=\dfrac{1}{p}Y_1(p)-\dfrac{1}{p-1}Y_2(p)+\dfrac{1}{p-1}, \\ Y_2(p)=-\dfrac{1}{p^2}Y_1(p)+\dfrac{1}{p}Y_2(p)-\dfrac{1}{p^2}. \end{cases}$$

З цієї системи знаходимо

$$Y_1(p)=\frac{1}{p-2},\quad Y_2(p)=-\frac{1}{p(p-2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-2}\right).$$

Здійснюючи перехід від зображень до оригіналів, отримуємо розв'язок заданої системи

$$y_1(x)=e^{2x},\quad y_2(x)=(1-e^{2x})/2.\quad \bullet$$

З допомогою перетворення Лапласа можна розв'язати ***системи лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду типу згортки***, тобто системи рівнянь вигляду

$$\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^x k_{ij}(x-s)y_j(s)\,ds=f_i(x),\quad i=1,2,\ldots,n,$$

за умови, що вони мають розв'язок у класі оригіналів, а функції $k_{ij}(x),\ i,j=1,2,\ldots,n,$ та $f_i(x),\ i=1,2,\ldots,n,$ є оригіналами.

§ 9.4. Лінійні інтегро-диференціальні рівняння типу згортки

Маючи на меті застосувати перетворення Лапласа до розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь, знайдемо зображення похідних функції $f(x)$.

Припустимо, що $f(x)$ диференційовна для $x>0$, причому $f'(x)\in D$. Тоді функція $f(x)$ також є оригіналом.

Якщо $F(p)=L[f(x)]$, то

$$L[f'(x)]=\int_0^{+\infty} f'(x)e^{-px}dx=\begin{vmatrix} u=e^{-px}, & du=-pe^{-px}dx \\ dv=f'(x)dx, & v=f(x) \end{vmatrix}=$$

$$=f(x)e^{-px}\Big|_{+0}^{+\infty}+p\int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx=-f(+0)+pF(p).$$

Зокрема, якщо функція $f(x)$ є неперервною у точці $x=0$, то

$$L[f'(x)]=pF(p)-f(0).$$

Припускаючи для $f(x)$ існування неперервних похідних вищих порядків і належність їх до класу оригіналів, отримуємо:

$$L[f''(x)]=pL[f'(x)]-f'(0)=p\big(pF(p)-f(0)\big)-f'(0)=$$

$$=p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$

$$L[f'''(x)]=p\Big(p^2F(p)-pf(0)-f'(0)\Big)-f''(0)=$$

$$=p^3F(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0),\ \ldots$$

$$L[f^{(n)}(x)]=$$

$$=p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0).$$

Розглянемо тепер ***лінійне інтегро-диференціальне рівняння типу згортки***

$$y^{(n)}(x)+a_1y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_{n-1}y'(x)+a_ny(x)+$$
$$+\sum_{m=0}^{q}\int_0^x k_m(x-s)y^{(m)}(s)\,ds=f(x) \tag{9.7}$$

зі сталими коефіцієнтами $a_i,\ i=1,2,\ldots,n,$ та початковими умовами

$$y(0)=y_0,\ \ y'(0)=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}.$$

Припустимо, що у (9.7) функції $k_m(x),\ m=0,1,\ldots,q,\ \ f(x)$ та шуканий розв'язок $y(x)$ є оригіналами, і застосуємо до обох частин рівняння (9.7) перетворення Лапласа. У результаті відносно функції $Y(p)=L[y(x)]$ отримуємо лінійне алгебраїчне рівняння

$$p^nY(p)-p^{n-1}y(0)-p^{n-2}y'(0)-\ldots-py^{(n-2)}(0)-y^{(n-1)}(0)+$$
$$+a_1\left(p^{n-1}Y(p)-p^{n-2}y(0)-p^{n-3}y'(0)-\ldots-py^{(n-3)}(0)-y^{(n-2)}(0)\right)+$$
$$+\ \ldots\ +a_{n-1}\left(pY(p)-y(0)\right)+a_nY(p)+$$
$$+\sum_{m=0}^{q}K_m(p)\left(p^mY(p)-p^{m-1}y(0)-p^{m-2}y'(0)-\ldots-y^{(m-1)}(0)\right)=F(p).$$

Отримане рівняння можна записати також у вигляді

$$\left(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n+\sum_{m=0}^{q}p^mK_m(p)\right)Y(p)=A(p),$$

де $A(p)$ – деяка відома функція аргумента p, і знайти

$$Y(p)=\frac{A(p)}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n+\sum\limits_{m=0}^{q}p^mK_m(p)}.$$

Приклад 9.5. *Розв'язати операційним методом інтегро-диференціальне рівняння типу згортки*

$$y''(x)+y(x)+\int_0^x \operatorname{sh}(x-s)y(s)\,ds+\int_0^x \operatorname{ch}(x-s)y'(s)\,ds=\operatorname{ch}x,$$

якщо $y(0)=-1,\ y'(0)=1.$

Розв'язання. Застосовуючи до обох частин рівняння перетворення Лапласа, отримуємо

$$p^2Y(p)+p-1+Y(p)+\frac{1}{p^2-1}Y(p)+\frac{p}{p^2-1}\left(pY(p)+1\right)=\frac{p}{p^2-1}.$$

Звідси

$$Y(p)=\frac{-p^3+p^2+p-1}{p^4+p^2}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p^2+1}-\frac{2p}{p^2+1}.$$

Здійснюючи перехід від зображення до оригінала, одержуємо розв'язок

$$y(x)=1-x+2\sin x-2\cos x. \quad \bullet$$

Зауважимо, що іноді для знаходження значень похідних функції $y(x)$ у точці $x=0$ буває доцільним здиференціювати обидві частини інтегро-диференціального рівняння за змінною x.

Приклад 9.6. *Розв'язати операційним методом інтегро-диференціальне рівняння типу згортки*

$$y'(x) - 2y(x) + \int_0^x (x-s)y'''(s)\,ds = -x^2 + x + 2, \quad y(0) = -1.$$

Розв'язання. Оскільки $y'(0) - 2y(0) = 2$, то $y'(0) = 0$. Далі, здиференціювавши обидві частини рівняння за змінною x, отримуємо

$$y''(x) - 2y'(x) + \int_0^x y'''(s)\,ds = -2x + 1.$$

Тоді

$$y''(0) - 2y'(0) = 1,$$

а тому $y''(0) = 1$ і рівняння у зображеннях має вигляд

$$pY(p) + 1 - 2Y(p) + \frac{1}{p^2}\left(p^3 Y(p) + p^2 - 1\right) = -\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}.$$

Звідси

$$Y(p) = \frac{-p^3 + p^2 + p - 1}{p^4 - p^3} = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p}.$$

Тому шуканим розв'язком є

$$y(x) = x^2/2 - 1. \quad \bullet$$

Рекомендована література: [3, с. 146–159], [9, с. 116–128], [10, с. 94–105], [11, с. 9–80, 112–118], [20, с. 129–150].

Питання до розділу 9

1. Які функції називають оригіналами? Наведіть приклади оригіналів і функцій, які не є оригіналами.
2. Яку функцію називають зображенням оригінала? Наведіть приклади зображень.
3. Сформулюйте основні властивості перетворення Лапласа.
4. Опишіть способи відновлення оригінала за його зображенням.
5. Який інтеграл називають згорткою функцій? Чому дорівнює перетворення Лапласа згортки двох оригіналів?
6. Які рівняння називаються інтегральними рівняння типу згортки?

7. Як можна застосувати перетворення Лапласа до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри першого та другого роду типу згортки?
8. Які особливості застосування перетворення Лапласа до розв'язування лінійних інтегральних рівнянь Вольтерри першого роду типу згортки?
9. Завдяки чому перетворення Лапласа може бути застосоване до розв'язування лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з інтегралами типу згортки?
10. Яким чином перетворення Лапласа можна використати для розв'язування систем лінійних інтегральних чи інтегро-диференціальних рівнянь типу згортки?

Вправи до розділу 9

1. За означенням перетворення Лапласа знайдіть зображення оригіналів:

   а) $f(x)=x$; б) $f(x)=x^2$.

2. Використовуючи формули відомих зображень, знайдіть зображення оригіналів:

   а) $f(x)=x^2\sin x$; б) $f(x)=\cos^2 x$; в) $f(x)=\sin^3 x$.

3. Визначте, які з функцій $F(p)$ не можуть бути зображеннями оригіналів:

   а) $F(p)=\dfrac{2p-1}{p^2-4}$; б) $F(p)=\dfrac{p^2-2p-1}{(p-1)^2-1}$;

   в) $F(p)=\dfrac{p^2-3p}{p^3-1}$, г) $F(p)=\dfrac{p^3+p-1}{p^2-2p+2}$.

4. Відновіть оригінали за їх зображеннями:

   а) $F(p)=\dfrac{1}{p(p+1)}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p(p+1)^2}$;

   в) $F(p)=\dfrac{3(p^2+1)}{p(p^2+3)}$; г) $F(p)=\dfrac{5p^2+5p+4}{p^3+2p^2+2}$.

5. Розв'яжіть операційним методом лінійні інтегральні рівняння Вольтерри другого роду типу згортки:

а) $y(x) = x - \int_0^x e^{x-s} y(s)\,ds$; б) $y(x) = 2\int_0^x \cos(x-s) y(s)\,ds + 1$;

в) $y(x) = x - \int_0^x (x-s)\, y(s)\,ds$; г) $y(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-s)\, y(s)ds$.

6. Розв'яжіть операційним методом лінійні інтегральні рівняння Вольтерри першого роду типу згортки:

а) $\int_0^x (x-s)\, y(s)\,ds = e^{3x} - 3x - 1$; б) $\int_0^x e^{x-s} y(s)\,ds = x^2$;

в) $\int_0^x \cos(x-s)\, y(s)\,ds = x + x^2$; г) $\int_0^x \operatorname{sh}(x-s) y(s)\,ds = x^2 e^{-x}$.

7. Наведіть приклад інтегрального рівняння типу згортки, яке має єдиний розв'язок, що є оригіналом, але не може бути знайденим за допомогою перетворення Лапласа.

8. Розв'яжіть операційним методом систему інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} y(x) = e^x - \int_0^x y(s)ds + 4\int_0^x e^{x-s} z(s)ds, \\ z(x) = 1 - \int_0^x e^{-(x-s)} y(s)ds + \int_0^x z(s)ds. \end{cases}$$

9. Розв'яжіть операційним методом інтегро-диференціальні рівняння:

а) $y''(x) + 2y'(x) - 2\int_0^x \sin(x-s) y'(s)\,ds = \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0$;

б) $y'(x) + y(x) + \int_0^x (x-s)^2 y'''(s)\,ds = x + 1, \quad y(0) = 0$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Завдання 1. *Перевірити, чи є функція* $y(x)$ *розв'язком інтегрального рівняння.*

1.1. $y(x)=\dfrac{xe^x+1}{e^x}$, $\quad y(x)-\dfrac{1}{2}\int\limits_0^1 xe^s y(s)\,ds=e^{-x}$;

1.2. $y(x)=\cos^2 x$, $\quad \int\limits_0^{\pi}(x+s)y(s)\,ds=\dfrac{\pi}{2}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$;

1.3. $y(x)=xe^{x^3/3}$, $\quad y(x)-\int\limits_0^x xsy(s)\,ds=x$;

1.4. $y(x)=x-\dfrac{x^2}{2}$, $\quad \int\limits_0^x e^{x-s}y(s)\,ds=\dfrac{x^2}{2}$;

1.5. $y(x)=\cos x$, $\quad \int\limits_0^{\pi}(\cos s+\sin x)\left(1-y^2(s)\right)ds=\dfrac{\pi}{2}\sin x$;

1.6. $y(x)=2\sin x+1$, $\quad y(x)-\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cos s\cdot y(s)\,ds=1$;

1.7. $y(x)=xe^x$, $\quad \int\limits_0^1 (x-e^{-s})\cdot y(s)\,ds=x-\dfrac{1}{2}$;

1.8. $y(x)=e^x\operatorname{ch}x$, $\quad y(x)-\int\limits_0^x \dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}s}y(s)\,ds=\operatorname{ch}x$;

1.9. $y(x)=1-\ln 3\cdot x$, $\quad \int\limits_0^x 3^{x-s}y(s)\,ds=x$;

1.10. $y(x)=\sin x$, $\quad \int\limits_0^{\pi/2}(\cos s-\sin x)\left(1+y^2(s)\right)ds=\dfrac{4}{3}-\dfrac{3\pi}{4}\sin x$;

1.11. $y(x)=x-\pi\cos x$, $\quad y(x)-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(x+2s)y(s)\,ds=x$;

1.12. $y(x)=\sin^2 2x$, $\quad \int\limits_0^{2\pi}(x-s)y(s)\,ds=\pi x-\pi^2$;

1.13. $y(x)=2-e^{-x}$, $\quad y(x)-\int\limits_0^x e^{2(s-x)}y(s)\,ds=1$;

1.14. $y(x)=\dfrac{1-2\sin x}{2}e^{-x}, \quad \int\limits_0^x (1+x-s)y(s)\,ds=\dfrac{e^{-x}\sin x}{2};$

1.15. $y(x)=\sin 2x, \quad \int\limits_0^{\pi/2} (\cos s+2e^x)\Big(y(s)+y^2(s)\Big)ds=\dfrac{4}{3}+\pi e^x;$

1.16. $y(x)=\cos x+\sin x, \quad y(x)-\dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos x\sin s\, y(s)\,ds=\sin x;$

1.17. $y(x)=\cos x+\sin x, \quad \int\limits_0^{\pi/2}(x-s)\,y(s)\,ds=2x-\dfrac{\pi}{2};$

1.18. $y(x)=2^x(1-e^{-x}), \quad y(x)+\int\limits_0^x 2^{x-s}\,y(s)ds=2^x x;$

1.19. $y(x)=1-\dfrac{x^2}{2}, \quad \int\limits_0^x \mathrm{ch}(x-s)y(s)ds=x;$

1.20. $y(x)=\cos x, \quad y(x)+12\int\limits_0^{\pi} sx(1+y^2(s))\,ds=9\pi^2x+\cos x.$

Завдання 2. *Звести задачу Коші для звичайного диференціального рівняння до:*

а) *інтегрального рівняння;*

б) *інтегро-диференціального рівняння.*

2.1. $y''-\cos x\cdot y'+2e^x y=x, \; y(0)=1, \; y'(0)=1;$

2.2. $y''-\sin x\cdot y'+e^x y=x, \; y(0)=1, \; y'(0)=-1;$

2.3. $y''+(1+x^2)y=\cos x, \; y(0)=0, \; y'(0)=2;$

2.4. $y''+2xy'+y=x^2, \; y(0)=y'(0)=1;$

2.5. $y''-e^x y'+e^{2x}y=3x, \; y(0)=y'(0)=0;$

2.6. $y''-2xy'+x^2y=0, \; y(0)=1, \; y'(0)=0;$

2.7. $y''+x^2y'=\sin^2 x, \; y(0)=-1, \; y'(0)=0;$

2.8. $y''+xy=x^2+1, \; y(0)=1, \; y'(0)=0;$

2.9. $y''+xy'+y=0, \; y(0)=1, \; y'(0)=0;$

2.10. $y''+(1-x^2)y=\cos 2x, \; y(0)=0, \; y'(0)=1;$

2.11. $y''+(1-x^2)y=\cos 2x, \; y(0)=1, \; y'(0)=0;$

2.12. $y''+(1+x^2)y=\sin x, \; y(0)=1, \; y'(0)=0;$

2.13. $xy'' + y' + x^2 y = x^2, \ y(0) = y'(0) = 1;$

2.14. $y'' + \sin 2x \cdot y' + xy = e^x, \ y(0) = y'(0) = -1;$

2.15. $y'' - e^x y' + xy = 2x, \ y(0) = 2, \ y'(0) = 1;$

2.16. $y'' + \cos x \cdot y' - e^x y = x, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 2;$

2.17. $x^2 y'' + xy' - 4y = x, \ y(0) = y'(0) = 1;$

2.18. $y'' - xy' + x^2 y = 0, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1;$

2.19. $y'' + x^2 y' = \cos^2 x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1;$

2.20. $x^2 y'' + xy' + 2y = x, \ y(0) = y'(0) = 2;$

Завдання 3. *Оцінити норму інтегрального оператора Фредгольма* $Ay(x) = \int\limits_a^b K(x,s) y(s)\, ds$ *у просторах* $C[a,b], \ L_2[a,b]$*, якщо*:

3.1. $K(x,s) = xs, \ a = 0, \ b = 1;$

3.2. $K(x,s) = (1-x)\sin 2\pi s, \ a = 0, \ b = 1;$

3.3. $K(x,s) = \sin(x+s) + \sin(x-s), \ a = 0, \ b = \pi;$

3.4. $K(x,s) = x/(s^2+1), \ a = 0, \ b = 1;$

3.5. $K(x,s) = \cos^2 x, \ a = 0, \ b = \pi;$

3.6. $K(x,s) = \mathrm{ch}(x-s), \ a = 0, \ b = 1;$

3.7. $K(x,s) = e^{x-s}, \ a = 0, \ b = 1;$

3.8. $K(x,s) = s \sin x, \ a = 0, \ b = \pi;$

3.9. $K(x,s) = \cos(x+s)\sin(x+s), \ a = 0, \ b = \pi;$

3.10. $K(x,s) = \cos(x+s) + \cos(x-s), \ a = 0, \ b = \pi;$

3.11. $K(x,s) = s^{-1} \ln x, \ a = 1, \ b = e;$

3.12. $K(x,s) = xe^s, \ a = 0, \ b = 1;$

3.13. $K(x,s) = xs^2, \ a = 0, \ b = 3;$

3.14. $K(x,s) = \mathrm{sh}(x-s), \ a = 0, \ b = 1;$

3.15. $K(x,s) = se^{s-x}, \ a = 0, \ b = 2;$

3.16. $K(x,s) = \sqrt{xs^{-3}}, \ a = 1, \ b = 2;$

3.17. $K(x,s) = \sqrt{xs}, \ a = 0, \ b = 1;$

3.18. $K(x,s) = xe^{x-s}, \ a = 0, \ b = 1;$

3.19. $K(x,s) = s \cos 2x, \ a = 0, \ b = \pi;$

3.20. $K(x,s) = 2^{x-s}, \ a = 0, \ b = 1.$

Завдання 4. а) *Розв'язати інтегральні рівняння Фредгольма другого роду методом ітерованих ядер*; б) *знайти наближений розв'язок рівняння методом ітерованих ядер з точністю до* $0{,}01$.

4.1. $y(x)-\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cos s\cdot y(s)ds=1;$

4.2. $y(x)-\frac{\ln 2}{2}\int\limits_0^1 2^{x+s}y(s)ds=x;$

4.3. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}y(s)ds=\sin x;$

4.4. $y(x)+\pi\int\limits_0^1 x\sin(2\pi s)y(s)ds=\cos(2\pi x);$

4.5. $y(x)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 xe^s y(s)ds=e^{-x};$

4.6. $y(x)-\frac{1}{e^2-1}\int\limits_0^1 e^{x+s}y(s)ds=\sin(\pi x);$

4.7. $y(x)+\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cos s\, y(s)ds=\cos x;$

4.8. $y(x)-\frac{e}{3}\int\limits_{-1}^1 xe^s y(s)ds=(3x^2+1)e^{-x};$

4.9. $y(x)-2\int\limits_{-1}^1 x^2s^2\, y(s)ds=e^x;$

4.10. $y(x)-\int\limits_{-1}^0(1+x)(1+s)\, y(s)ds=\pi\cos\pi x;$

4.11. $y(x)-\frac{1}{2}\int\limits_0^1(2x-1)(2s-1)y(s)ds=3x^2;$

4.12. $y(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin 2x\cos 2s\, y(s)\, ds=\cos x+\sin x;$

4.13. $y(x)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin x\cos s\, y(s)\, ds=\cos 2x;$

4.14. $y(x)-\frac{1}{6\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos x\cos s\,y(s)\,ds=5\cos x;$

4.15. $y(x)-\frac{1}{e^{\pi}+1}\int\limits_0^{\pi}e^{x}\cos s\,y(s)\,ds=\frac{x}{4};$

4.16. $y(x)+\int\limits_0^{1}e^{x-s}y(s)\,ds=x^2e^{x};$

4.17. $y(x)-2\int\limits_0^{1}xe^{s}y(s)ds=e^{x};$

4.18. $y(x)-3\int\limits_0^{1}x^2s^2\,y(s)ds=e^{2x};$

4.19. $y(x)-\int\limits_0^{2}(x+1)(s+1)\,y(s)ds=\cos 2x;$

4.20. $y(x)-e\int\limits_0^{1}xe^{s}y(s)ds=x^2e^{-x}.$

Завдання 5. а) *Розв'язати інтегральні рівняння Вольтерри другого роду методом ітерованих ядер*; б) *знайти наближений розв'язок рівняння методом ітерованих ядер з точністю до* $0{,}01$.

5.1. $y(x)+\int\limits_0^{x}e^{x-s}y(s)ds=x;$

5.2. $y(x)+\int\limits_0^{x}(x-s)\cos(x-s)y(s)ds=\cos x;$

5.3. $y(x)-\int\limits_0^{x}\sin(x-s)y(s)ds=x;$

5.4. $y(x)+\int\limits_0^{x}\mathrm{sh}(x-s)y(s)ds=x;$

5.5. $y(x)+\int\limits_0^{x}\mathrm{ch}(x-s)y(s)ds=\mathrm{sh}\,x;$

5.6. $y(x)+4\int\limits_0^{x}(x-s)^2\,y(s)ds=x;$

5.7. $y(x)-\int_0^x 3^{x-s}y(s)ds=2x+1;$

5.8. $y(x)+\int_0^x e^{s-x}\sin(x-s)y(s)ds=x;$

5.9. $y(x)+\int_0^x (x-s)y(s)ds=x;$

5.10. $y(x)+\int_0^x e^{s-x}\sin(x-s)y(s)ds=e^{-x};$

5.11. $y(x)+\int_0^x e^{x-s}y(s)ds=e^{x};$

5.12. $y(x)-2\int_0^x \cos(x-s)y(s)ds=1;$

5.13. $y(x)+\int_0^x 2^{x-s}y(s)ds=x^2;$

5.14. $y(x)+\int_0^x e^{s-x}y(s)ds=x;$

5.15. $y(x)+\int_0^x e^{x-s}\cos(x-s)y(s)ds=1;$

5.16. $y(x)-\int_0^x \sin(x-s)y(s)ds=\dfrac{1}{x^2+1};$

5.17. $y(x)+\int_0^x e^{x-s}y(s)ds=e^{x};$

5.18. $y(x)+\dfrac{1}{2}\int_0^x \cos(s-x)y(s)ds=e^{2x};$

5.19. $y(x)-\int_0^x (x-s)^2y(s)ds=1;$

5.20. $y(x)+\int_0^x (x-s)\sin(x-s)y(s)ds=\sin x.$

Завдання 6. *Розв'язати інтегральні рівняння Фредгольма другого роду* $y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x)$:

а) *за формулами Фредгольма*;

б) *зведенням до системи алгебраїчних рівнянь.*

6.1. $K(x,s)=x^2s^3-xs^4,\ f(x)=4x^2,\ \lambda=2,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.2. $K(x,s)=xs-x^2,\ f(x)=3x,\ \lambda=1,\ x\in[a,b]=[-2;2]$;

6.3. $K(x,s)=x^2s-xs^2,\ f(x)=x-5,\ \lambda=1,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.4. $K(x,s)=x^3s-x^2s^2,\ f(x)=x^2+1,\ \lambda=-5,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.5. $K(x,s)=x^4s-x^3s^2,\ f(x)=2x+3,\ \lambda=-0{,}5,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.6. $K(x,s)=xs^4-x^2s^3,\ f(x)=2x,\ \lambda=1{,}5,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.7. $K(x,s)=x^2s^3-x^3s^2,\ f(x)=x^2,\ \lambda=-5,\ x\in[a,b]=[-2;2]$;

6.8. $K(x,s)=xs^3-x^2s^2,\ f(x)=x^2-1,\ \lambda=2,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.9. $K(x,s)=x^3-xs^2,\ f(x)=x,\ \lambda=3,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.10. $K(x,s)=xs^4-x^3s^2,\ f(x)=x^2,\ \lambda=-1,\ x\in[a,b]=[-2;2]$;

6.11. $K(x,s)=x^2s^3-xs^4,\ f(x)=x+2,\ \lambda=1,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.12. $K(x,s)=xs-x^2,\ f(x)=x/2,\ \lambda=-1,\ x\in[a,b]=[-2;2]$;

6.13. $K(x,s)=x^2s-xs^2,\ f(x)=x+4,\ \lambda=4,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.14. $K(x,s)=x^3s-x^2s^2,\ f(x)=x+1,\ \lambda=-1,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.15. $K(x,s)=x^4s-x^3s^2,\ f(x)=3x+2,\ \lambda=0{,}5,\ x\in[a,b]=[-2;2]$;

6.16. $K(x,s)=xs^4-x^2s^3,\ f(x)=x+3,\ \lambda=1,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.17. $K(x,s)=x^2s^3-x^3s^2,\ f(x)=2x+5,\ \lambda=-4,\ x\in[a,b]=[-2;2]$;

6.18. $K(x,s)=xs^3-x^2s^2,\ f(x)=x^2+1,\ \lambda=-1,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.19. $K(x,s)=x^3-xs^2,\ f(x)=2x-1,\ \lambda=2,\ x\in[a,b]=[-1;1]$;

6.20. $K(x,s)=xs^4-x^3s^2,\ f(x)=5x,\ \lambda=-1,\ x\in[a,b]=[-1;1]$.

Завдання 7. *Дослідити, для яких значень параметрів a, b, c інтегральне рівняння Фредгольма другого роду*

$$y(x)-\lambda\int_0^1 K(x,s)y(s)ds = ax^2+bx+c$$

з відповідним виродженим ядром з прикладу 6 має розв'язки для всіх дійсних значень параметра λ.

Завдання 8. *Розв'язати наближено інтегральні рівняння Фредгольма другого роду заміною ядра на двочленне вироджене ядро та оцінити похибку наближеного розв'язку.*

8.1. $y(x)+2\int_0^1 \frac{y(s)ds}{(xs+3)(x+s-4)}=1;$

8.2. $y(x)-\int_0^1 e^{xs}y(s)ds=1;$

8.3. $y(x)-\int_0^1 \sin(xs)y(s)ds=x;$

8.4. $y(x)-\int_0^1 \mathrm{tg}(x-s)y(s)ds=x;$

8.5. $y(x)-\int_0^1 \frac{y(s)ds}{x+s+2}=x;$

8.6. $y(x)-\int_{-1}^1 \mathrm{ch}(xs)y(s)ds=1;$

8.7. $y(x)-\int_0^1 x(1-\cos xs^2)y(s)ds=\frac{\sin x+x}{2};$

8.8. $y(x)-\int_0^1 \ln(2-xs)y(s)ds=x;$

8.9. $y(x)-\int_0^1 \sqrt{x+x^2s^2}\,y(s)ds=1;$

8.10. $y(x)-\int_0^1 (1-x\cos xs)y(s)ds=\sin x;$

8.11. $y(x)+\int_0^1 x(e^{xs}-1)y(s)ds=e^x-x;$

8.12. $y(x)-\int_0^1 x(e^{-xs^2}-1)y(s)\,ds=\frac{e^{-x}+3x-1}{2};$

8.13. $y(x)-\int_0^1 x(\sin xs-1)y(s)ds=\cos x+x;$

8.14. $y(x)+\int_0^1 \frac{y(s)ds}{(xs+1)(x+s-2)}=x;$

8.15. $y(x)+3\int_0^1 e^{2xs}y(s)ds=x+1;$

8.16. $y(x)+4\int_0^1 \sin(xs)y(s)ds=2x-1;$

8.17. $y(x)+\int_0^1 \mathrm{tg}(s-x)y(s)ds=2x-1;$

8.18. $y(x)-\int_0^1 \frac{y(s)ds}{2x+2s+3}=x+1;$

8.19. $y(x)+2\int_{-1}^1 \mathrm{ch}(2xs)y(s)ds=x+1;$

8.20. $y(x)+2\int_{-1}^1 x(1-\sin 2xs)y(s)\,ds=\cos x-x.$

Завдання 9. *Розв'язати інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з завдання 4 методом послідовних наближень і знайти цим методом наближені розв'язки рівняння з точністю до* $0{,}01$.

Завдання 10. *Знайти другі послідовні наближення розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з завдання 4 методом Положія та методом усереднення функціональних поправок. Оцінити похибки отриманих наближених розв'язків, порівнюючи знайдені наближені розв'язки з точними розв'язками рівнянь.*

Завдання 11. *Розв'язати інтегральні рівняння Вольтерри другого роду з завдання 5 методом послідовних наближень та знайти наближені розв'язки з точністю до* $0{,}01$.

Завдання 12. *Розв'язати наближено інтегральні рівняння Фредгольма другого роду з завдання 4 при* $n=2$ *методом*:

а) *квадратур*;
б) *найменших квадратів*;
в) *Гальоркіна – Петрова*;
г) *Бубнова – Гальоркіна*;
ґ) *моментів*;
д) *колокації.*

Оцінити похибки отриманих наближень.

Завдання 13. *Знайти дійсні характеристичні числа та відповідні їм власні функції виродженого ядра.*

13.1. $y(x) = \lambda \int_0^1 (xs - 2x^2) y(s) ds;$

13.2. $y(x) = \lambda \int_0^1 (1 + 2x) s y(s) ds;$

13.3. $y(x) = \lambda \int_0^1 (1 - x^2) y(s) ds;$

13.4. $y(x) = \lambda \int_0^1 (x + s) y(s) ds;$

13.5. $y(x) = \lambda \int_0^1 (x e^s + 2s) y(s) ds;$

13.6. $y(x) = \lambda \int_0^1 \left(x \sin 2\pi s - \frac{1}{2\pi} \right) y(s) ds;$

13.7. $y(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x + s) y(s) ds;$

13.8. $y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x - s) y(s) ds;$

13.9. $y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos s \sin x \, y(s) ds;$

13.10. $y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos x \cos s \, y(s) ds;$

13.11. $y(x) = \lambda \int_0^\pi x \sin s \, y(s) ds;$

13.12. $y(x) = \lambda \int_0^\pi \left(\cos 2\pi (x - s) - 1 \right) y(s) ds;$

13.13. $y(x) = \lambda \int_0^\pi (\cos 2\pi x + 2x \sin 2\pi s) y(s) ds;$

13.14. $y(x) = \lambda \int_0^\pi \cos(x + s) y(s) ds;$

13.15. $y(x)=\lambda\int_0^{\pi}\sin(x-s)y(s)ds;$

13.16. $y(x)=\lambda\int_0^{1}x(x+s)y(s)ds;$

13.17. $y(x)=\lambda\int_0^{1}(1+x^2)y(s)ds;$

13.18. $y(x)=\lambda\int_0^{\pi}\cos x\sin s\, y(s)ds;$

13.19. $y(x)=\lambda\int_0^{1}(1-3x)sy(s)ds;$

13.20. $y(x)=\lambda\int_0^{1}(x\sin 2\pi s+2)y(s)ds.$

Завдання 14. *Знайти характеристичні числа та нормовані власні функції невиродженого симетричного ядра зведенням до крайової задачі на власні значення та записати з їх допомогою розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма другого роду*

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds+x.$$

14.1. $K(x,s)=\begin{cases}\sin(s-1)\sin x, & 0\le x\le s,\\ \sin s\sin(x-1), & s\le x\le 1;\end{cases}$

14.2. $K(x,s)=\begin{cases}\cos\left(x+\pi/4\right)\cos\left(s-\pi/4\right), & 0\le x\le s,\\ \cos\left(s+\pi/4\right)\cos\left(x-\pi/4\right), & s\le x\le \pi;\end{cases}$

14.3. $K(x,s)=\begin{cases}(s-1)x, & 0\le x\le s,\\ s(x-1), & s\le x\le 1;\end{cases}$

14.4. $K(x,s)=\begin{cases}\operatorname{sh}(s-1)\operatorname{sh}x, & 0\le x\le s,\\ \operatorname{sh}s\operatorname{sh}(x-1), & s\le x\le 1;\end{cases}$

14.5. $K(x,s)=\begin{cases}-x, & 0\le x\le s,\\ -s, & s\le x\le 1;\end{cases}$

14.6. $K(x,s)=\begin{cases} -x-1, & 0\le x\le s, \\ -s-1, & s\le x\le 1; \end{cases}$

14.7. $K(x,s)=\begin{cases} \cos s\sin x, & 0\le x\le s, \\ \sin s\cos x, & s\le x\le 1; \end{cases}$

14.8. $K(x,s)=\begin{cases} 1-x, & 0\le x\le s, \\ 1-s, & s\le x\le 1; \end{cases}$

14.9. $K(x,s)=\begin{cases} e^{-s}\operatorname{ch} x, & 0\le x\le s, \\ e^{-x}\operatorname{ch} s, & s\le x\le 2; \end{cases}$

14.10. $K(x,s)=\begin{cases} s(x+1), & 0\le x\le s, \\ (s+1)x, & s\le x\le 1; \end{cases}$

14.11. $K(x,s)=\begin{cases} s(2-x), & 0\le x\le s, \\ x(2-s), & s\le x\le 2; \end{cases}$

14.12. $K(x,s)=\begin{cases} \sin s\cos x, & 0\le x\le s, \\ \cos s\sin x, & s\le x\le \pi; \end{cases}$

14.13. $K(x,s)=\begin{cases} x(2-s), & 0\le x\le s, \\ s(2-x), & s\le x\le 2; \end{cases}$

14.14. $K(x,s)=\begin{cases} \sin\left(x+\pi/4\right)\sin\left(s-\pi/4\right), & 0\le x\le s, \\ \sin\left(s+\pi/4\right)\sin\left(x-\pi/4\right), & s\le x\le \pi; \end{cases}$

14.15. $K(x,s)=\begin{cases} e^{-s}\operatorname{sh} x, & 0\le x\le s, \\ e^{-x}\operatorname{sh} s, & s\le x\le 1; \end{cases}$

14.16. $K(x,s)=\begin{cases} \operatorname{ch}(s-1)\operatorname{ch} x, & 0\le x\le s, \\ \operatorname{ch} s\operatorname{ch}(x-1), & s\le x\le 1; \end{cases}$

14.17. $K(x,s)=\begin{cases} \cos(s-1)\cos x, & 0\le x\le s, \\ \cos s\cos(x-1), & s\le x\le \pi; \end{cases}$

14.18. $K(x,s)=\begin{cases} (x-3)s, & 0\le x\le s, \\ (s-3)x, & s\le x\le 3; \end{cases}$

14.19. $K(x,s)=\begin{cases}\sin(s-2)\sin x, & 0\le x\le s,\\ \sin s\sin(x-2), & s\le x\le 2;\end{cases}$

14.20. $K(x,s)=\begin{cases}(s-4)x, & 0\le x\le s,\\ s(x-4), & s\le x\le 4.\end{cases}$

Завдання 15. *Дослідити, чи має розв'язок інтегральне рівняння Фредгольма першого роду з виродженим ядром* $K(x,s)$ *і вільним членом* $f(x)$.

15.1. $K(x,s)=x^2s^3-xs^4,\ f(x)=4x^2,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

15.2. $K(x,s)=xs-x^2,\ f(x)=3x,\ x\in[a,b]=[-2;2];$

15.3. $K(x,s)=x^2s-xs^2,\ f(x)=x,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

15.4. $K(x,s)=x^3s-x^2s^2,\ f(x)=x^2+x,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

15.5. $K(x,s)=x^4s-x^3s^2,\ f(x)=2x+3,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

15.6. $K(x,s)=xs^4-x^2s^3,\ f(x)=2x,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

15.7. $K(x,s)=x^2s^3-x^3s^2,\ f(x)=x^2,\ x\in[a,b]=[-2;2];$

15.8. $K(x,s)=xs^3-x^2s^2,\ f(x)=x^2-1,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

15.9. $K(x,s)=x^3-xs^2,\ f(x)=x,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

15.10. $K(x,s)=xs^4-x^3s^2,\ f(x)=x^3,\ x\in[a,b]=[-2;2];$

15.11. $K(x,s)=x^2s^3-xs^4,\ f(x)=x+2,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

15.12. $K(x,s)=xs-x^2,\ f(x)=x/2,\ x\in[a,b]=[-2;2];$

15.13. $K(x,s)=x^2s-xs^2,\ f(x)=x^2-x,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

15.14. $K(x,s)=x^3s-x^2s^2,\ f(x)=x+1,\ x\in[a,b]=[-1;1];.$

15.15. $K(x,s)=x^4s-x^3s^2,\ f(x)=3x+2,\ x\in[a,b]=[-2;2];$

15.16. $K(x,s)=xs^4-x^2s^3,\ f(x)=x+3,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

15.17. $K(x,s)=x^2s^3-x^3s^2,\ f(x)=2x+5,\ x\in[a,b]=[-2;2];$

15.18. $K(x,s)=xs^3-x^2s^2,\ f(x)=x^2+x,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

15.19. $K(x,s)=x^3-xs^2,\ f(x)=x,\ x\in[a,b]=[-1;1];$

15.20. $K(x,s)=xs^4-x^3s^2,\ f(x)=x-1,\ x\in[a,b]=[-1;1].$

Завдання 16. *Розв'язати інтегральні рівняння Вольтерри першого роду з ядром типу згортки*:

а) *зведенням до рівняння другого роду*;
б) *інтегруванням частинами.*

16.1. $\int\limits_0^x (x-s)\sin(x-s)y(s)ds = \sin^2 x;$

16.2. $\int\limits_0^x (x-s)e^{x-s}y(s)ds = e^{2x}/2 - xe^x - 1/2;$

16.3. $\int\limits_0^x e^{x-s}\,\mathrm{sh}(x-s)y(s)ds = e^{2x} - 2x - 1;$

16.4. $\int\limits_0^x (x-s)\sin(x-s)y(s)ds = x^3;$

16.5. $\int\limits_0^x (x-s)y(s)ds = \mathrm{ch}\,x - 1;$

16.6. $\int\limits_0^x \sin(x-s)y(s)ds = x^4/2;$

16.7. $\int\limits_0^x e^{x-s}\cos(x-s)y(s)ds = xe^x;$

16.8. $\int\limits_0^x (x-s)2^{x-s}y(s)ds = e^{2x} - x - 1;$

16.9. $\int\limits_0^x \cos(x-s)y(s)ds = x\sin x;$

16.10. $\int\limits_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds = 2\sin^2\frac{x}{2};$

16.11. $\int\limits_0^x (x-s)^2 y(s)ds = x^2(x+1);$

16.12. $\int\limits_0^x 3^{x-s}y(s)ds = x;$

16.13. $\int\limits_0^x (x-s)y(s)ds = e^x - x - 1;$

16.14. $\int\limits_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds = \mathrm{sh}\,x - x;$

16.15. $\int_0^x e^{x-s} y(s)ds = x^2/2;$

16.16. $\int_0^x \sin(x-s) y(s)ds = 2\sin^2 \frac{x}{2};$

16.17. $\int_0^x (x-s)^2 y(s)ds = x^3;$

16.18. $\int_0^x \cos(x-s) y(s)ds = x\cos x;$

16.19. $\int_0^x \sin(x-s)\cos(x-s) y(s)ds = 2x;$

16.20. $\int_0^x (x-s)3^{x-s} y(s)ds = e^x + x - 1.$

Завдання 17. *Наближено розв'язати методом квадратур інтегральні рівняння Вольтерри першого роду із завдання 16. Оцінити похибки отриманих наближених розв'язків.*

Завдання 18. *Розв'язати інтегральні рівняння Вольтерри з завдань 5 і 16 з допомогою перетворення Лапласа.*

Завдання 19. *Розв'язати системи інтегральних рівнянь Вольтерри типу згортки з допомогою перетворення Лапласа.*

19.1. $$\begin{cases} y_1(x) = x^2 + \int_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = x + \int_0^x y_3(s)ds, \\ y_3(x) = 1 + \int_0^x y_1(s)ds; \end{cases}$$

19.2. $$\begin{cases} y(x) = x + \int_0^x z(s)ds, \\ z(x) = 1 + \int_0^x y(s)ds; \end{cases}$$

19.3. $$\begin{cases} y_1(x) = x + \int\limits_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = 1 + \int\limits_0^x y_3(s)ds, \\ y_3(x) = \int\limits_0^x y_1(s)ds; \end{cases}$$

19.4. $$\begin{cases} y_1(x) = 2 + \int\limits_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = 9x - x^2 - x^4 + \int\limits_0^x y_3(s)ds, \\ y_3(x) = 15 + \int\limits_0^x y_1(s)ds; \end{cases}$$

19.5. $$\begin{cases} y(x) = 2x - \int\limits_0^x (x-s)y(s)ds + \int\limits_0^x z(s)ds, \\ z(x) = -2 - 4\int\limits_0^x y(s)ds + 3\int\limits_0^x (x-s)z(s)ds; \end{cases}$$

19.6. $$\begin{cases} y_1(x) = x + \int\limits_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = 1 - x^3 + \int\limits_0^x y_3(s)ds, \\ y_3(x) = 2x^2 + \int\limits_0^x y_1(s)ds; \end{cases}$$

19.7. $$\begin{cases} y_1(x) = 1 - \int\limits_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = \cos x - 1 + \int\limits_0^x y_3(s)ds, \\ y_3(x) = \cos x + \int\limits_0^x y_1(s)ds; \end{cases}$$

19.8. $\begin{cases} y_1(x) = x+1-\int\limits_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = -x+\int\limits_0^x (x-s)y_1(s)ds, \\ y_3(x) = \cos x - 1 - \int\limits_0^x y_1(s)ds; \end{cases}$

19.9. $\begin{cases} y_1(x) = x+\int\limits_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = 1-\int\limits_0^x y_1(s)ds, \\ y_3(x) = \sin x + \frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-s)y_1(s)ds; \end{cases}$

19.10. $\begin{cases} y(x) = e^x - \int\limits_0^x y(s)ds + 4\int\limits_0^x e^{x-s}z(s)ds, \\ z(x) = 1-\int\limits_0^x e^{-(x-s)}y(s)ds + \int\limits_0^x z(s)ds; \end{cases}$

19.11. $\begin{cases} y(x) = e^x + \int\limits_0^x z(s)ds, \\ z(x) = 1-\int\limits_0^x e^{2(x-s)}y(s)ds; \end{cases}$

19.12. $\begin{cases} y_1(x) = 1+\int\limits_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = x^2+\int\limits_0^x y_3(s)ds, \\ y_3(x) = x+\int\limits_0^x y_1(s)ds; \end{cases}$

19.13. $\begin{cases} y(x) = 1+\int\limits_0^x z(s)ds, \\ z(x) = x+\int\limits_0^x y(s)ds; \end{cases}$

19.14. $$\begin{cases} y_1(x) = \int_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = x + \int_0^x y_3(s)ds, \\ y_3(x) = 1 + \int_0^x y_1(s)ds; \end{cases}$$

19.15. $$\begin{cases} y_1(x) = 2x^2 + \int_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = x + \int_0^x y_1(s)ds, \\ y_3(x) = 1 - x^3 + \int_0^x y_1(s)ds; \end{cases}$$

19.16. $$\begin{cases} y_1(x) = 15 + \int_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = 2 + \int_0^x y_3(s)ds, \\ y_3(x) = 9x - x^2 - x^4 + \int_0^x y_1(s)ds; \end{cases}$$

19.17. $$\begin{cases} y_1(x) = \cos x + \int_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = 1 - \int_0^x y_1(s)ds, \\ y_3(x) = \cos x - 1 + \int_0^x y_1(s)ds; \end{cases}$$

19.18. $$\begin{cases} y_1(x) = \cos x - 1 - \int_0^x y_2(s)ds, \\ y_2(x) = x + 1 - \int_0^x y_1(s)ds, \\ y_3(x) = -x + \int_0^x (x-s)y_2(s)ds. \end{cases}$$

19.19. $\begin{cases} y(x) = -2 - 4\int\limits_0^x z(s)ds + 3\int\limits_0^x (x-s)y(s)ds, \\ z(x) = 2x - \int\limits_0^x (x-s)z(s)ds + \int\limits_0^x y(s)ds; \end{cases}$

Завдання 20. *Розв'язати з допомогою перетворення Лапласа інтегро-диференціальні рівняння типу згортки.*

20.1. $y''(x) - 4\int\limits_0^x e^{-(x-s)}\left(y'(s) + y(s)\right)ds = e^{-x},\ y(0) = y'(0) = 1;$

20.2. $y''(x) + \int\limits_0^x \sin(x-s)\left(y''(s) + y(s)\right)ds = 2\cos x,$
$y(0) = y'(0) = 0;$

20.3. $y''(x) - y(x) - 4\int\limits_0^x (x-s)\cos(x-s)y(s)ds = 0,$
$y(0) = y'(0) = 2;$

20.4. $y'(x) + y(x) + \int\limits_0^x (x-s+1)y(s)ds = 0, \quad y(0) = 3;$

20.5. $y'(x) + 3y(x) + 2\int\limits_0^x (x-s)y'(s)ds = x^2 + 3x + 10, \quad y(0) = 3;$

20.6. $y'(x) - \int\limits_0^x (x-s)y(s)ds = \cos x, \quad y(0) = -2;$

20.7. $y''(x) - 4\int\limits_0^x e^{-(x-s)}\left(y'(s) + y(s)\right)ds = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0;$

20.8. $y''(x) + \int\limits_0^x e^{2(x-s)}y'(s)ds = e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0;$

20.9. $y''(x) + 2y'(x) - 2\int\limits_0^x \sin(x-s)y'(s)ds = \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0;$

20.10. $y''(x) + 3y(x) + \int\limits_0^x (x-s)^2 y'(s)ds = x^4/6 + 3x^2 + 2,$
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

20.11. $y'(x) + y(x) - \int\limits_0^x (x-s)^2 y'(s)ds = x + 1, \quad y(0) = -1;$

20.12. $y'(x)+\int\limits_0^x \cos(x-s)y(s)ds = x, \quad y(0)=1;$

20.13. $y'(x)+2\int\limits_0^x (x-s)y(s)ds = \frac{1}{2}\sin x, \quad y(0)=1;$

20.14. $y'(x)+\int\limits_0^x e^{-2(x-s)}y(s)ds = 0, \quad y(0)=-3;$

20.15. $y'(x)-y(x)+\int\limits_0^x (x-s)y'(s)ds-\int\limits_0^x y(s)ds = x, \quad y(0)=6;$

20.16. $y''(x)+y(x)+\int\limits_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds+\int\limits_0^x \mathrm{ch}(x-s)y'(s)ds = \mathrm{ch}x,$

$y(0)=2, \ y'(0)=0;$

20.17. $y''(x)+2y'(x)+y(x)=\int\limits_0^x (x-s)y''(s)ds +$

$+2\int\limits_0^x \sin(x-s)y'(s)ds+\cos x, \quad y(0)=y'(0)=0;$

20.18. $y'(x)-3\int\limits_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds = -e^{-x}, \quad y(0)=2;$

20.19. $y''(x)-y(x)-\int\limits_0^x e^{x-s}\sin(x-s)y(s)ds = e^x(1-\cos x),$

$y(0)=1, \ y'(0)=-1;$

20.20. $y''(x)-y'(x)-\int\limits_0^x \mathrm{sh}(x-s)y(s)ds = \frac{1}{2}x\,\mathrm{sh}\,x,$

$y(0)=y'(0)=0.$

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Виберіть рівняння Фредгольма другого роду:

A. $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds+f(x).$ **B.** $y(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds.$

C. $y(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds+f(x).$ **D.** $\int_a^b K(x,s)y(s)ds=f(x).$

2. Виберіть рівняння Фредгольма першого роду:

A. $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds+f(x).$ **B.** $y(x)=\lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds.$

C. $\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds=f(x).$ **D.** $\int_a^x K(x,s)y(s)ds=f(x).$

3. Виберіть рівняння, яке не є рівнянням з виродженим ядром:

A. $y(x)=\int_a^b \cos(x^2-s^2)y(s)\,ds+f(x).$ **B.** $y(x)=\lambda\int_a^b (x-s)y(s)\,ds.$

C. $y(x)=\lambda\int_a^b \sqrt{x-s}\;y(s)\,ds.$ **D.** $y(x)=\lambda\int_a^b \sin(x-s)y(s)\,ds+f(x).$

4. Виберіть лінійне інтегральне рівняння:

A. $y(x)=\lambda\int_0^1 (x+s)y^2(s)ds+x.$ **B.** $y(x)=\lambda\int_0^x \sqrt{x+s}\;y(s)ds.$

C. $y(x)=\lambda\int_a^x e^{(x+s)y(s)}ds+\sqrt{x}.$ **D.** $\int_a^b (x+s-y(s))^2\,ds=1.$

5. Ядро $K(x,s),\ (x,s)\in Q,$ інтегрального рівняння Фредгольма, яке задовольняє умову $\iint_Q |K(x,s)|^2\,dx\,ds<\infty,$ називають:

A. однорідним. **B.** фредгольмовим.
C. обмеженим. **D.** гільбертовим.

6. Виберіть однорідне рівняння Фредгольма:

A. $y(x)=\lambda\int_a^b xs^2y(s)\,ds+x^2.$ **B.** $y(x)=\lambda\int_a^b \left(xs^2+y(s)\right)ds.$

C. $y(x)=\lambda\int_a^b xs^2y(s)\,ds.$ **D.** $\lambda\int_a^b xs^2y(s)\,ds=x^2.$

7. Виберіть рівняння Вольтерри першого роду:

A. $\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x)$. **B.** $y(x) + \int_a^x K(x,s)y(s)\,ds = f(x)$.

C. $y(x) + \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x)$. **D.** $\int_a^x K(x,s)y(s)\,ds = f(x)$.

8. Виберіть рівняння Вольтерри другого роду:

A. $\int_a^x K(x,s)y(s)\,ds = f(x)$. **B.** $y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x)$.

C. $y(x) = \lambda\int_a^x K(x,s)y(s)\,ds + f(x)$. **D.** $\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds = f(x)$.

9. Рівняння $\int_a^b K\big(x,s,y(s)\big)\,ds = f(x)$ називають інтегральним рівнянням:

A. Гаммерштейна (першого роду). **B.** Урисона (першого роду).
C. Гаммерштейна (другого роду). **D.** Урисона (другого роду).

10. Рівняння $y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)\,F\big(s,y(s)\big)\,ds + f(x)$ називають інтегральним рівнянням:

A. Гаммерштейна (першого роду). **B.** Урисона (першого роду).
C. Гаммерштейна (другого роду). **D.** Урисона (другого роду).

11. У метричному просторі $C[a,b]$ метрика $\rho(x,y)$ задається формулою:

A. $\rho(x,y) = \int_a^b \big(x(t)-y(t)\big)^2\,dt$. **B.** $\rho(x,y) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$.

C. $\rho(x,y) = \sqrt{\int_a^b \big(x(t)-y(t)\big)^2\,dt}$. **D.** $\rho(x,y) = \max\limits_{t\in[a,b]} \big(x(t)-y(t)\big)$.

12. У метричному просторі $L_2[a,b]$ метрика $\rho(x,y)$ задається формулою:

A. $\rho(x,y) = \int_a^b \big(x(t)-y(t)\big)^2\,dt$. **B.** $\rho(x,y) = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)-y(t)|$.

C. $\rho(x,y) = \sqrt{\int_a^b \big(x(t)-y(t)\big)^2\,dt}$. **D.** $\rho(x,y) = \max\limits_{t\in[a,b]} \big(x(t)-y(t)\big)$.

13. Метричний простір, в якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називають:

A. банаховим. **B.** фундаментальним.
C. гільбертовим. **D.** повним.

14. Відображення $A: X \to X$ метричного простору (X, ρ) самого в себе називають стискаючим, якщо будь-яких точок $x, y \in X$ виконується нерівність:

A. $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y), \quad \alpha < 1.$ **B.** $\rho(x, y) \le \alpha\rho(Ax, Ay), \quad \alpha < 1.$

C. $\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y), \quad \alpha > 1.$ **D.** $\rho(Ax, Ay) < \alpha\rho(x, y), \quad \alpha \le 1.$

15. У нормованому просторі $C[a,b]$ норма задається формулою:

A. $\|x\| = \min\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|.$ **B.** $\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\, dt}.$

C. $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|.$ **D.** $\|x\| = \max\limits_{t \in [a,b]} \sqrt{\int_a^t x^2(t)\, dt}.$

16. У нормованому просторі $L_2[a,b]$ норма задається формулою:

A. $\|x\| = \min\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|.$ **B.** $\|x\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)\, dt}.$

C. $\|x\| = \int_a^b x^2(t)\, dt.$ **D.** $\|x\| = \sqrt{\int_a^b |\, x(t)\, |\, dt}.$

17. Нормований простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називають:

A. банаховим. **B.** метричним.

C. евклідовим. **D.** повним.

18. Лінійний простір із заданим у ньому скалярним добутком називають:

A. банаховим. **B.** гільбертовим.

C. евклідовим. **D.** повним.

19. Лінійний оператор $A: L \to L',$ визначений на L, називають обмеженим, якщо він кожну обмежену множину переводить у:

A. відкриту. **B.** замкнену.

C. саму у себе. **D.** обмежену.

20. Оператором Фредгольма називають оператор, визначений формулою:

A. $Ax(t) = \int\limits_a^b K(s)\, x(s)\, ds.$ **B.** $Ax(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds.$

C. $Ax(t) = \int\limits_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds.$ **D.** $Ax(t) = \int\limits_a^x K(t,s)\, x(s)\, ds.$

21. Оператор A^* називають спряженим до оператора A, визначеного в евклідовому просторі E, якщо для всіх $x, y \in E$ виконується рівність:

A. $(Ax, y) = (x, A^* y)$. **B.** $(Ax, y) = (A^* x, y)$.
C. $(Ax, y) = (y, A^* x)$. **D.** $(Ax, Ay) = (A^* x, A^* y)$.

22. Розв'язком операторного рівняння $(I - \lambda A)y = f$, де $Ay(x) = \int_a^b K(x,s)y(s)ds$, $|K(x,s)| \le M$, за умови $|\lambda| M(b-a) < 1$, є

A. $y = (\lambda A + ... + \lambda^n A^n + ...)f$. **B.** $y = (I + \lambda A + ... + \lambda^n A^n + ...)f$.
C. $y = I + \lambda A + ... + \lambda^n A^n + ...$. **D.** $y = (I + \lambda A + ... + \lambda^n A^n)f$.

23. Для існування резольвенти інтегрального рівняння Фредгольма другого роду $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x)$, де $B^2 = \iint_Q |K(x,s)|^2\,dxds$, $Q = [a,b; a,b]$, у просторі $L_2[a,b]$ достатньо виконання нерівності

A. $|\lambda| B = 1$. **B.** $|\lambda| B > 1$.
C. $|\lambda| B < 1$. **D.** $|\lambda|(b-a) < 1$.

24. Лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду має не більше як зліченну кількість характеристичних чисел, які ...

A. не мають точок скупчення.
B. всі невід'ємні.
C. мають скінченну точку скупчення.
D. можуть скупчуватися лише на нескінченності.

25. Оператор A, визначений в евклідовому просторі E, називають самоспряженим, якщо для всіх $x, y \in E$ виконується рівність:

A. $(x, y) = (Ax, Ay)$. **B.** $(Ax, y) = (x, y)$.
C. $(Ax, y) = (Ax, Ay)$. **D.** $(Ax, y) = (x, Ay)$.

26. Якщо λ – власне значення оператора A, то резольвентою цього оператора називають оператор:

A. $A - \lambda I$. **B.** $(A - \lambda I)^{-1}$.
C. $(A + \lambda I)^{-1}$. **D.** $(I - \lambda A)^{-1}$.

27. Ядро вигляду $K(x,s)=\sum_{i=1}^{m} a_i(x)b_i(s)$ інтегрального рівняння називають:

A. фредгольмовим. **B.** лінійно незалежним.
C. виродженим. **D.** ядром зі слабкою особливістю.

28. Якщо $Ay(x)=\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds$ – інтегральний оператор Фредгольма, то $A^n y(x)=\int_a^b K_n(x,s)y(s)ds,$ де $K_1(x,s)=K(x,s)$, а для $n=2,3,...$ ітеровані ядра $K_n(x,s)$ визначаються формулою:

A. $\int_a^x K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt.$ **B.** $\int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt.$
C. $\int_a^b K(x,t)K_{n-1}(s,t)dt.$ **D.** $\int_a^b K_{n-1}(t,s)dt.$

29. Якщо $Ay(x)\equiv\int_a^x K(x,s)y(s)\,ds$ – інтегральний оператор Вольтерри, то $A^n y(x)=\int_a^x K_n(x,s)y(s)\,ds,$ де $K_1(x,s)=K(x,s)$, а для $n=2,3,...,$ ітеровані ядра $K_n(x,s)$ визначаються формулою:

A. $\int_x^s K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt.$ **B.** $\int_s^x K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt.$
C. $\int_s^x K(t,s)K_{n-1}(x,t)dt.$ **D.** $\int_a^x K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt.$

30. Вкажіть ядро $K(x,s)$ зі слабкою особливістю:

A. $\frac{xs}{\sqrt{x+s}}.$ **B.** $\frac{x+s}{\sqrt[3]{(x-s)^4}}.$ **C.** $\frac{x^2+s^2}{\sqrt[4]{(x-s)^3}}.$ **D.** $\frac{e^{xs}}{|x-s|}.$

31. Вкажіть ядро $K(x,s)$, яке не є виродженим:

A. $\cos(x+s).$ **B.** $x+s+xs.$ **C.** $xe^{x^2+s^2}.$ **D.** $2^{\sqrt{xs+x^2s^2}}$

32. Для того, щоб лінійне неоднорідне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром мало єдиний розв'язок для довільної функції $f(x)\in L[a,b]$ необхідно і достатньо, щоб відповідне однорідне рівняння мало:

A. безліч розв'язків. **B.** ненульовий розв'язок.
C. лише тривіальний розв'язок. **D.** тривіальний розв'язок.

33. Якщо $|K(x,s)| \le M$, то у просторі $C[a,b]$ відображення $Ay(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds + f(x)$ буде стискаючим за умови:

A. $M(b-a) < 1.$ **B.** $|\lambda| M(b+a) < 1.$

C. $|\lambda| M(b-a) < 1.$ **D.** $|\lambda|(b-a) < 1.$

34. Якщо $|K(x,s,y_2) - K(x,s,y_1)| \le L|y_2 - y_1|$, то у просторі $C[a,b]$ відображення $Ay(x) = \lambda\int_a^b K\left(x,s,y(s)\right)ds + f(x)$ буде стискаючим за умови:

A. $L(b-a) < 1.$ **B.** $|\lambda| L(b-a) < 1.$

C. $|\lambda| L(b+a) < 1.$ **D.** $|\lambda|(b-a) < 1.$

35. Послідовні наближення лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду $y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds + f(x)$ знаходять за формулою:

A. $y_n(x) = \lambda\int\limits_a^b K(s,x)y_{n-1}(s)\,ds + f(x),\ n \in \mathbf{N}.$

B. $y_n(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,s)y_{n-1}(s)\,ds,\ n \in \mathbf{N}.$

C. $y_n(x) = \lambda\int\limits_a^b K(x,s)y_{n-1}(s)\,ds + f(x),\ n \in \mathbf{N}.$

D. $y_n(x) = \lambda\int\limits_a^b K\left(x, y_{n-1}(s)\right)ds + f(x),\ n \in \mathbf{N}.$

36. У просторі $C[a,b]$ відображення

$$Ay(x) = \lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds + f(x)$$

має нерухому точку:

A. для кожного λ. **B.** тільки для $|\lambda| \le 1.$

C. тільки для $|\lambda| < 1.$ **D.** тільки для $\lambda > 0.$

37. Лінійне інтегральне рівняння Вольтерри з неперервним ядром і неперервним вільним членом у просторі $C[a,b]$ для кожного λ має:

A. безліч розв’язків. **B.** єдиний розв’язок.

C. тільки нульовий розв'язок **D.** розв'язок $y(x) = \lambda x.$

38. Метод Положія розв'язування інтегральних рівнянь є:

A. апроксимаційним. **B.** операційним.

C. ітераційним. **D.** проекційним.

39. Наближено розв'язуючи інтегральне рівняння

$$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)\,ds+f(x)$$

методом усереднення функціональних поправок, у першому наближенні беруть $y_1(x)=f(x)+\alpha_1\int_a^b K(x,s)\,ds$, де:

A. $\alpha_1=\dfrac{1}{(b-a)^2}\int\limits_a^b y_1(x)\,dx.$ **B.** $\alpha_1=\dfrac{1}{b+a}\int\limits_a^b y_1(x)\,dx..$

C. $\alpha_1=(b-a)\int\limits_a^b y_1(x)\,dx.$ **D.** $\alpha_1=\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b y_1(x)\,dx.$

40. Метод усереднення функціональних поправок є модифікацією методу:

A. Бубнова – Гальоркіна. **B.** простої ітерації.

C. вироджених ядер. **D.** послідовних наближень.

41. Метод Гальоркіна – Петрова розв'язування інтегральних рівнянь є:

A. апроксимаційним. **B.** операційним.

C. ітераційним. **D.** проекційним.

42. До апроксимаційних методів розв'язування інтегральних рівнянь належить метод:

A. Бубнова – Гальоркіна. **B.** простої ітерації.

C. найменших квадратів. **D.** квадратур.

43. Якщо $K(x,s)=K(s,x)$, то ядро $K(x,s)$ інтегрального рівняння називають:

A. виродженим. **B.** спряженим.

C. самоспряженим. **D.** симетричним.

44. Метод наближеного розв'язування інтегральних рівнянь, у якому неув'язка перетворюється в нуль у наперед заданій сукупності точок, називають ...

A. методом моментів. **B.** методом колокації.

C. методом Положія. **D.** методом квадратур.

45. Вкажіть ядро $K(x,s)$, яке не є симетричним:

A. x^2+s^2. **B.** $(x-s)^2$. **C.** $\cos(x-s)$. **D.** $\sin(x-s)$.

46. Розв'язуючи інтегральне рівняння Вольтерри другого роду $y(x) = \lambda\int_a^x K(x,s)y(s)\,ds + f(x)$ методом квадратур, використовують співвідношення:

A. $y(x_i) = \lambda\int_a^{x_i} K(x_i,s)y(s)\,ds + f(x_i),\ i = 0,1,...,n.$

B. $y(x_i) = \lambda\int_a^{x_i} K(x_i,s_i)y(s_i)\,ds + f(x_i),\ i = 0,1,...,n.$

C. $y(x) = \lambda\int_a^{x} K(x_i,s)y(s)\,ds + f(x),\ i = 0,1,...,n.$

D. $y(x_i) = \lambda\int_a^{x_i} K(x_i,s)y(s)\,ds + f(x_i),\ i = 0,1,...,n.$

47. Вкажіть ядро, симетричне у квадраті $Q = [0,\pi;0,\pi]$:

A. $K(x,s) = \begin{cases} \cos s \sin x,\ 0 \le x \le s, \\ \sin s \cos x,\ s \le x \le \pi. \end{cases}$ **B.** $K(x,s) = \begin{cases} sx^2,\ 0 \le x \le s, \\ s^2 x,\ s \le x \le 1. \end{cases}$

C. $K(x,s) = \begin{cases} \cos^2 s \sin x,\ 0 \le x \le s, \\ \sin^2 s \cos x,\ s \le x \le \pi. \end{cases}$ **D.** $K(x,s) = \mathrm{tg}(x - s).$

48. Для інтегрального рівняння Вольтерри першого роду $\int_a^x K(x,s)y(s)\,ds = f(x)$ з неперервним ядром необхідною умовою існування єдиного розв'язку є:

A. $f(a) \ne 0.$ **B.** $K(a,a) \equiv 1.$ **C.** $f(a) = 0.$ **D.** $y(a) = 0.$

49. Для функції $f(x)$ перетворення Лапласа $F(p)$ визначається формулою:

A. $\int\limits_0^x e^{-px} f(x)\,dx.$ **B.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dx.$

C. $\int\limits_0^{+\infty} e^{px} f(x)\,dx.$ **D.** $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px} f(x)\,dx.$

50. Згорткою двох функцій $g(x),\ f(x)$ називають інтеграл:

A. $\int\limits_0^x g(x-s) f(x-s)\,ds.$ **B.** $\int\limits_0^x g(x-s) f(s)\,ds.$

C. $\int\limits_0^x g(x) f(s)\,ds.$ **D.** $\int\limits_x^{+\infty} g(x-s) f(s)\,ds.$

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ВПРАВ

Розділ 1

1. а) лінійне неоднорідне рівняння Фредгольма другого роду; б) лінійне однорідне рівняння Вольтерри другого роду; в) лінійне неоднорідне рівняння Фредгольма першого роду; г) нелінійне неоднорідне рівняння Вольтерри другого роду.
2. а) – г) Так. Підставте задані функції у відповідні рівняння.
3. а) Ні; б) Так. Підставте вказані функції у задане рівняння.
4. Підставте задану функцію в інтегро-диференціальне рівняння та перевірте виконання початкових умов.
5. а) $z(x)+\int_0^x \left((x+1)^2-(x+3)s\right)z(s)\,ds = 2x^2+7x-21;$

$$z'(x)+(1-x)z(x)+\int_0^x (x+3)z(s)ds = 3x-23,\ \ z(0)=-2.$$

б) Розгляньте окремо кожну з таких трьох замін: $z(x)=y'''(x)$, $z(x)=y''(x)$ і $z(x)=y'(x)$.

6. $Y(x)=\int_0^2 K(x,s)Y(s)ds+F(x)$, де функції $K(x,s)$, $Y(x)$ та $F(x)$ задані таблицею

	$x \diagdown s$	$[0,1)$	$[1,2]$	$Y(x)$	$F(x)$
$K(x,s)$	$[0,1)$	x	$s-1$	$y_1(x)$	x^2
	$[1,2]$	$x-1$	1	$y_2(x-1)$	$-x+1$

Розділ 2

1. Для доведення нерівності трикутника скористайтеся нерівністю
$$\left|x(t)-z(t)\right| \le \left|x(t)-y(t)\right|+\left|y(t)-z(t)\right|,\ \ t\in[a,b].$$
2. Для доведення нерівності трикутника позначте
$$x(t)-y(t)=a(t),\ \ y(t)-z(t)=b(t),\ \ x(t)-z(t)=a(t)+b(t)$$
та використайте інтегральну нерівність Коші – Буняковського.
3. Врахуйте критерій Коші рівномірної збіжності та неперервність границі рівномірно збіжної послідовності неперервних функцій.
4. Оцініть $\left|Ay(x)-Ay(x_0)\right|$ за умови $|x-x_0|<\delta$ або скористайтесь властивостями інтегралів, залежних від параметра.
5. $|\lambda|<e^{-1}$ і $|\lambda|<\sqrt{6}\,(e^2-1)^{-1/2}$ відповідно.
6. Для доведення нерівності $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ врахуйте, що $\left|x(t)+y(t)\right|\le\left|x(t)\right|+\left|y(t)\right|$, $t\in[a,b]$, та інтегральну нерівність Коші – Буняковського відповідно.

7. Замініть квадрати норм скалярними добутками.

8. Проаналізуйте умови виконання для ортогональної системи $\{x_k\}$ рівностей вигляду $\left(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n, x_k\right) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n.$

9. а) $e,\ \sqrt{\dfrac{e^2-1}{6}}$; б) $e,\ \dfrac{e^2-1}{2}$; в) $e+1,\ \sqrt{\dfrac{3e^2+6e-7}{6}}$; г) $1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

10. Доведіть рівності $\lambda(x,x) = \overline{\lambda}(x,x)$ і $\lambda(x,y) = \mu(x,y)$, якщо $Ax = \lambda x,\ Ay = \mu y,\ x \neq 0,\ y \neq 0,\ \lambda \neq \mu.$

Розділ 3

1. $A^n y(x) = \int\limits_0^1 \dfrac{x^2 s^3}{6^{n-1}} y(s)\, ds,\ n \in \mathbf{N}.$

2. $A^n y(x) = \int\limits_0^x \dfrac{2^n (x-s)^{3n-1}}{(3n-1)!} y(s)\, ds,\ n \in \mathbf{N}.$

3. а) $y(x) = 6x^2$; б) $y(x) = \dfrac{2\sin x}{2-\lambda},\ \lambda \neq 2.$

4. а) $y(x) = x - x^2/2$; б) $y(x) = \begin{cases} \lambda^{-1/2}\mathrm{sh}(\lambda^{1/2}x), & \lambda > 0, \\ (-\lambda)^{-1/2}\sin((-\lambda)^{-1/2}x), & \lambda < 0. \end{cases}$

5. а) $y(x) = 5/6\left(1 + 1/6 + 1/6^2\right)x^2 + 5x^2$; б) $y(x) = x - x^3/6,\ x \in [0,1].$

6. $R(x,s;\lambda) = \dfrac{240(x^2s - xs^2) - \lambda(80x^2s^2 - 60x^2s - 60xs^2 + 48xs)}{\lambda^2 + 240}.$

7. а) $y(x) = 6x^2$; б) $y(x) = \dfrac{2\sin x}{2-\lambda},\ \lambda \neq 2$; в) $y(x) = x$;
г) $y(x) = 4(\sin x + 2\cos x)/3 + 1.$

Розділ 4

1. а) $y(x) = Cx + e^x$; б) $y(x) = \lambda(C_1x + C_2) + x$;
в) $y(x) = C_1x^2 + C_2x + C_3$; г) $y(x) = C_1\sin x + C_2\cos x.$

2. а) $y(x) = 6x^2$; б) $y(x) = \dfrac{2\sin x}{2-\lambda},\ \lambda \neq 2.$ в) $y(x) = x$;
г) $y(x) = 4(\sin x + 2\cos x)/3 + 1.$

3. $2b + 3c = 0.$

4. $y(x) \approx -2x - 5/3.$

Розділ 5

1. а) $y(x) = 6x^2$; б) $y(x) = 2\sin x.$

2. а) $y(x) = x - x^2/2$; б) $y(x) = \sin x.$

3. $y_2(x) = 4x^3/3 + 2x^2 + 2x + 1$. Візьміть $y_0(x) = 1$.

4. $y_0(x) = e^x$, $z_0(x) = 1$; $y_1(x) = 4e^x - 3$, $z_1(x) = 1 + x - \text{sh}x$.

5. $\|y_3 - y\|_{C[0,1]} < 0,005$, $\|y_3 - y\|_{L_2[0,1]} < 0,002$, $n = 4$.

6. а) $y_2(x) = 5,976x^2$, $\sigma = 2$; $y_2(x) = 5,845x^2$, $\sigma = 3$;

б) $y_2(x) = \ = 5,950x^2$.

Розділ 6

1. $y_2(x) = 6,154x^2$.

2. $\bar{y}_0 = 0$; $\bar{y}_1 = 0,2$; $\bar{y}_2 = 0,392$; $\bar{y}_3 = 0,568$; $\bar{y}_4 = 0,722$; $\bar{y}_5 = 0,847$.

3. $y(x) = x$. Виберіть $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$.

4. Покладіть $\varphi_1(x) = 1$; $\varphi_2(x) = x$.

Розділ 7

1. Обґрунтуйте рівність $\int_a^b Ay(x)z(x)dx = \int_a^b y(x)z(x)dx$.

2. Врахуйте, що в обох рядках $a \le s \le x \le b$.

3. а) $\lambda = 3$, $\varphi(x) = ax, a \ne 0$; б) $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{7}$, $\varphi_{1,2}(x) = a\left(x + \dfrac{-5 \pm \sqrt{7}}{6}\right)$,

$a \ne 0$; в) $\lambda = 2$, $\varphi(x) = a \sin \pi x$, $a \ne 0$.

4. $\lambda_n = 4n^2 - 1$, $\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin 2nx$, $n \in \mathbf{N}$.

5. $y(x) = \sin x + \dfrac{32}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{(4k^2 - 4k - 7)(4k^2 - 4k - 3)}\sin\left(k - 1/2\right)x$.

6. а) $z(x) = \int_0^1 xse^{x+s}z(s)ds + x^2e^{-x}$, $z(x) = y(x)e^{-x}$.

б) $z(x) = \int_0^1 (x^2 + x)(s^2 + s)z(s)ds + x^3 + x^2$, $z(x) = (x+1)y(x)$.

7. $G(x,s) = \dfrac{1}{\text{ch}1}\cdot\begin{cases}\text{sh}(s-1)\cdot\text{ch}x, & 0 \le x \le s,\\ \text{ch}s\cdot\text{sh}(x-1), & s \le x \le 1.\end{cases}$

$y(x) = \dfrac{1}{\text{ch}1}\cdot\left(\text{sh}(x-1)\int_0^x \text{ch}\, s\cdot f(s)ds + \text{ch}\, x\int_x^1 \text{sh}(s-1)\cdot f(s)ds\right)$.

Розділ 8

1. а), в), г) Так. б) Ні.

2. а) $y(x) = 3x$, $y(x) = 4x^2$; б) $y(x) = 4 - 6x$, $y(x) = 18x - 54x^2$;

в) $y(x)=6x-2,\ y(x)=6x^2-1$. *Примітка.* Задані рівняння мають безліч розв'язків, які, наприклад, можна шукати у вигляді многочленів з невизначеними коефіцієнтами.

3. Виконується. Врахуйте, що $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\pi^2/6$.

4. $y(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-4k-3}\sin\left(k-1/2\right)x$.

5. б) та г). Порівняйте порядки нулів ядер $K(x,s)$ при $s=x$ і функцій $f(x)$ при $x=0$.

6. а) $y(x)=9e^{3x}$; б) $y(x)=2x-x^2$; в) $y(x)=1+2x+x^2/2+x^3/3$; г) $y(x)=2(1-x)e^{-x}$.

7. $\bar{y}_0=0$; $\bar{y}_1=0,400$; $\bar{y}_2=0,623$; $\bar{y}_3=0,885$; $\bar{y}_4=0,922$; $\bar{y}_5=1,057$.

Розділ 9

1. а) $F(p)=p^{-2}$; б) $F(p)=2p^{-3}$.

2. а) $F(p)=\frac{3p^2-1}{(p^2+1)^3}$. Використайте зображення $L\left[x\sin x\right]$.

   б) $F(p)=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$. Скористайтеся рівністю $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.

   в) $F(p)=\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$. Врахуйте, що $\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$.

3. а), в) Можуть. б), г) Ні.

4. а) $f(x)=1-e^{-x}$; б) $f(x)=1-e^{-x}-xe^{-x}$; в) $f(x)=1+2\cos\sqrt{3}x$; г) $f(x)=2+(3\cos x-2\sin x)\,e^{-x}$.

5. а) $y(x)=x-x^2/2$; б) $y(x)=2xe^x+1$; в) $y(x)=\sin x$; г) $y(x)=$ $=x-x^3/6$.

6. а) $y(x)=9e^{3x}$; б) $y(x)=2x-x^2$; в) $y(x)=1+2x+x^2/2+x^3/3$; г) $y(x)=2(1-x)\,e^{-x}$.

7. Наприклад, рівняння $\int_0^x (x-s)e^{(x-s)^2}y(s)ds=1-e^{x^2}$ має єдиний розв'язок $y(x)=2$.

8. $y(x)=(2x+1)\cos x+(x+2)\sin x$,
   $z(x)=\left(x/2+1\right)\cos x-\left(x+1/2\right)\sin x$.

9. а) $y(x)=1-e^{-x}-xe^{-x}$; б) $y(x)=x$.

ДОДАТОК 1

Застосування системи комп'ютерної алгебри Mathematica до розв'язування інтегральних рівнянь

Існує чимало спеціальних математичних пакетів комп'ютерних програм, які дозволяють розв'язувати різноманітні математичні задачі. Математичний пакет MathCad орієнтований, перш за все, на здійснення числових розрахунків. Пакети MATLAB, Scilab, Octave і FreeMat призначені передовсім для роботи з числовими матрицями й векторами і є зручними для інженерно-технічних працівників. Математичні пакети Maple, Mathematica, Maxima розраховані на здійснення символьних (тобто аналітичних) обчислень.

Одним з найбільш популярних і потужних є пакет аналітичних обчислень і числових розрахунків Mathematica. Mathematica – універсальна система комп'ютерної алгебри компанії Wolfram Research (сайт www.wolfram.com/mathematica). Містить багато функцій як для аналітичних перетворень, так і для числових розрахунків.

Розглянемо застосування цього пакета до розв'язування інтегральних рівнянь. З основами роботи з цим пакетом можна ознайомитись у додатку 2 (с. 206).

Продемонструємо використання Mathematica для розв'язування прикладів з розділів 3-9 посібника.

Приклад 1. *Розв'язати методом ітерованих ядер рівняння Фредгольма другого роду* $y(x)=\int_0^1 xs^2 y(s)\,ds + x^2$ (*приклад* 3.1, *с* .46).

```
(* Очищаємо значення всіх змінних *)
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
λ = 1; a = 0; b = 1; f[x_] = x^2;

(* Задаємо формулу для ядер *)
k[n_] = (1/4)^(n-1) x s^2;
```

```
(* Обчислюємо резольвенту *)
R = Sum[λ^(n-1) k[n], {n, 1, Infinity}]
```

$$\frac{4\,s^2\,x}{3}$$

```
(* Знаходимо розв'язок *)
y = λ * Integrate[R * f[s], {s, a, b}] + f[x]
```

$$\frac{4\,x}{15}+x^2$$

Приклад 2. *Розв'язати методом ітерованих ядер рівняння Вольтерри другого роду* $y(x)=\int_0^x (x-s)y(s)\,ds+4e^x$ (*приклад* 3.2, *с.* 48).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
λ = 1; a = 0; b = x; f[x_] = 4 E^x;

(* Задаємо формулу для ядер *)
k[n_] = (x - s)^(2 n - 1) / (2 n - 1) !;

(* Обчислюємо резольвенту *)
R = FullSimplify[Sum[λ^(n-1) k[n], {n, 1, Infinity}]]
```

```
-Sinh[s - x]
```

```
(* Знаходимо розв'язок *)
y = λ * Integrate[R * f[s], {s, a, b}] + f[x];
y = FullSimplify[y]
```

$$e^{-x}+e^{x}\,(3+2\,x)$$

Приклад 3. *Знайти за резольвентою Фредгольма розв'язок рівняння* $y(x)=\lambda\int_0^1 xs^2 y(s)\,ds+x^2$ (*приклад* 3.3, *с.* 53).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
a = 0; b = 1; f[x_] := x^2; k = x * s^2;
```

```
(* Допоміжні величини будемо зберігати у вигляді масивів *)
c = {1};
B = {k};

(* Обчислюємо B і c *)
For[i = 1, i ≤ 3, i++,
 cm = Integrate[B[[i]] /. {x → s}, {s, a, b}];
 c = Append[c, cm];
 integ = Integrate[ (k /. {s → t}) * (B[[i]] /. {x -> t}), {t, a, b}];
 m = c[[i + 1]] * k - i * integ;
 B = Append[B, m];
]

(* Виводимо значення, які зберігаються в масивах *)
c
```

$$\left\{1,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0\right\}$$

```
B
```

$$\left\{s^2 x,\ 0,\ 0,\ 0\right\}$$

```
(* Обчислюємо резольвенту *)
```

$$R = \frac{\mathrm{Sum}\left[\frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} B[[n+1]],\ \{n,\ 0,\ 3\}\right]}{\mathrm{Sum}\left[\frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} c[[n+1]],\ \{n,\ 0,\ 3\}\right]}$$

$$\frac{s^2 x}{1 - \frac{\lambda}{4}}$$

```
(* Знаходимо розв'язок *)
y = f[x] + λ * Integrate[R * f[s], {s, a, b}]
```

$$x^2 - \frac{4 x \lambda}{5 (-4 + \lambda)}$$

Приклад 4. *Розв'язати рівняння Фредгольма другого роду* $y(x) = \int_0^1 x s^2 y(s)\, ds + x^2$ (*приклад* 4.1, *с*. 58).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
a = 0; b = 1; λ = 1; f[x_] = x^2; a1[x_] = x; b1[s_] = s^2;
```

```
(* Розв'язок будемо шукати у вигляді *)
y[x_] = f[x] + λ * C1 * a1[x];

(* Підставляємо у рівняння і розв'язуємо відносно сталої C1 *)
sol = Solve[
   y[x] == λ * a1[x] * Integrate[b1[s] * y[s], {s, a, b}] + f[x], C1];
C1 = C1 /. sol[[1]]
```

$$\frac{4}{15}$$

```
(* Отримали розв'язок *)
y[x]
```

$$\frac{4\,x}{15} + x^2$$

Приклад 5. *Знайти характеристичні числа і власні функції ядра рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром* $y(x) = \lambda \int_0^1 xs^2 y(s)\,ds$ (*приклад* 4.2, *с*. 59).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
a = 0; b = 1; f[x_] = 0; a1[x_] = x; b1[s_] = s^2;

(* Шукаємо характеристичні числа оператора *)
α11 = Integrate[a1[s] * b1[s], {s, a, b}];
sol = Solve[1 - λ * α11 == 0, λ];
λ = λ /. sol[[1]]
```

4

```
(* Власна функція *)
y[x_] = λ * C1 * a1[x]
```

4 C1 x

```
(* Сталу C1≠0 можна вибрати довільно *)
y[x] /. {C1 → 1 / 4}
```

x

Приклад 6. *Наближено розв'язати рівняння Фредгольма другого роду* $y(x)=\int_0^1 \sin(xs^2)y(s)\,ds+x^2$ *методом вироджених ядер* (*приклад* 4.3, *с.* 67).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_, s_] = Sin[x*s^2];
f[x_] = x^2;
λ = 1;

(* Задаємо вироджене ядро, близьке до k *)
k0[x_, s_] = x*s^2;

(* Резольвента рівняння з виродженим ядром відома: *)
R0 = 4/3 x*s^2;

(* Також відомий розв'язок рівняння з виродженим ядром: *)
ytilde = 4/15 x + x^2;

(* Оцінюємо різницю k i k0 *)
ε = FindMaxValue[
  {Abs[k[x, s] - k0[x, s]], 0 ≤ x ≤ 1 && 0 ≤ s ≤ 1}, {x, s}]
0.158528

(* Оцінюємо модуль вільного члена *)
m = FindMaxValue[{Abs[f[x]], 0 ≤ x ≤ 1}, x]
1.

(* Оцінюємо інтеграл від модуля резольвенти R0 *)
M = FindMaxValue[
  {Integrate[Abs[R0], {s, 0, 1}],  0 ≤ x ≤ 1}, x]
0.444444

(* Оскільки вільний член рівняння з виродженим ядром
 збігається з f[x], то *)
η = 0;

(* Обчислимо оцінку для модуля різниці між точним і
  наближеним розв'язками *)
```

$$\frac{(1 + \text{Abs}[\lambda]\ M)\ ^\wedge 2\ \text{Abs}[\lambda]\ \varepsilon}{1 - (1 + \text{Abs}[\lambda]\ M)\ \text{Abs}[\lambda]\ \varepsilon}\ m + (1 + \text{Abs}[\lambda]\ M)\ \eta$$

```
0.428988
```

```
(* Отримана оцінка є дещо гіршою у порівнянні з оцінкою,
 одержаною на сторінці 67. Це пояснюється тим, що для
 даного прикладу на с. 67 вдалося отримати точнішу оцінку
 константи ε, ніж при оцінюванні модуля різниці k і k0
 через максимальне значення модуля цієї різниці *)
```

Приклад 7. *Розв'язати методом простої ітерації рівняння Фредгольма другого роду* $y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)\,ds + x^2$ *і знайти похибку наближеного розв'язку* $\tilde{y}(x) = y_3(x)$ (*приклади* 5.1, *с*. 72 і 5.3, с. 80).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_, s_] = x * s^2;
f[x_] = x^2;
λ = 1;

(* Визначаємо, чи задає права частина рівняння
 стискаюче відображення *)
B = Sqrt[ Integrate[ k[x, s]^2, {x, 0, 1}, {s, 0, 1}]]
```

$$\frac{1}{\sqrt{15}}$$

```
(* Оскільки |λ|B < 1, то відображення стискаюче *)

(* Задаємо початкове наближення *)
y = f[x];

(* Обчислюємо перші три наближення *)
Do[ Print[
   y = λ * Integrate[k[x, s] (y /. x → s), {s, 0, 1}] + f[x]], {3}]
```

$$\frac{x}{5} + x^2$$

$$\frac{x}{4} + x^2$$

$$\frac{21\,x}{80} + x^2$$

```
(* Оцінимо похибку третього наближення в просторі C[0,1] *)
q1 = Abs[λ] FindMaxValue[
     {Integrate[ k[x, s], {s, 0, 1}], 0 ≤ x ≤ 1}, x];

normfC = FindMaxValue[ {f[x], 0 ≤ x ≤ 1}, x];

(* Похибка *)
q1^4/(1 - q1) * normfC
```

```
0.0185185
```

```
(* Оцінимо похибку третього наближення в просторі L2[0,1] *)
q2 = Abs[λ] Sqrt[ Integrate[ k[x, s]^2, {s, 0, 1}, {x, 0, 1}]];

normfL2 = Sqrt[ Integrate[ f[x]^2, {x, 0, 1}]];

(* Похибка *)
q2^4/(1 - q2) * normfL2 // N
```

```
0.00267945
```

Приклад 8. *Розв’язати методом послідовних наближень лінійне інтегральне рівняння Вольтерри* $y(x)=\int_0^x (x-s)y(s)ds+1$ (*приклад* 5.2, *с*. 76).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння  *)
k[x_, s_] = x - s;
f[x_] = 1;
λ = 1;

(* Задаємо початкове наближення *)
y = f[x];

(* Обчислюємо перші 5 наближень *)
Do[ Print[
  y = λ * Integrate[k[x, s] (y /. x → s), {s, 0, x}] + f[x]], {5}]
```

$1+\frac{x^2}{2}$

$$1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

$$1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}$$

$$1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40\,320}$$

$$1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^8}{40\,320}+\frac{x^{10}}{3\,628\,800}$$

Приклад 9. *Знайти методом Положія наближений розв'язок інтегрального рівняння* $y(x)=\int_0^1 xs^2 y(s)\,ds + x^2$ (*приклад* 5.4, *с*. 83).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_, s_] = x*s^2;
f[x_] = x^2;
λ = 1;

(* Використаємо метод Положія *)
μ = 1 / λ;
F[x_] = -μ *f[x];
k2 = Integrate[k[x, t] k[t, s], {t, 0, 1}]
```

$$\frac{s^2 x}{4}$$

```
NN = k2 - 2 μ *k[x, s]
```

$$-\frac{7 s^2 x}{4}$$

```
Fstar = Integrate[(1/μ k2 - k[x, s]) F[s], {s, 0, 1}]
```

$$\frac{3 x}{20}$$

```
B = Sqrt[ Integrate[ k[x, s]^2, {x, 0, 1}, {s, 0, 1}]]
```

$$\frac{1}{\sqrt{15}}$$

```
σ = Round[μ^2 + 2 Abs[μ] B + B^2] + 1
```

3

```
(* Вибираємо нульове наближення *)
ψ0 = 2/σ Fstar
```

$\frac{x}{10}$

```
(* Знаходимо перші три наближення *)
q = 1 - 2 μ^2/σ;
ψ = ψ0;
Do[Print[
   ψ = ψ0 + q * ψ - 2/σ Integrate[NN (ψ /. x → s), {s, 0, 1}]], {3}]
```

$\frac{13\,x}{80}$

$\frac{129\,x}{640}$

$\frac{1157\,x}{5120}$

```
(* Отримуємо наближений розв'язок *)
y = ψ - 1/μ F[x]
```

$\frac{1157\,x}{5120} + x^2$

Приклад 10. *Знайти наближений розв'язок рівняння Фредгольма* $y(x)=\int_0^1 xs^2 y(s)\,ds + x^2$ *методом усереднення функціональних поправок* (*приклад* 5.5, *с*. 85).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_, s_] = x * s^2;
f[x_] = x^2;
λ = 1;

(* Використаємо метод усереднення функціональних поправок *)
h = 1;
```

```
DD = h - Integrate[k[x, s], {x, 0, 1}, {s, 0, 1}]
```

$\frac{5}{6}$

```
(* Знаходимо перше наближення *)
```

$\alpha 1 = \frac{1}{DD}$ `Integrate[f[x], {x, 0, 1}];`

```
y1 = f[x] + α1 * Integrate[k[x, s], {s, 0, 1}]
```

$\frac{2x}{15} + x^2$

```
(* Знаходимо друге наближення *)
δ1 = y1;
integ1 = Integrate[k[x, s] * (δ1 /. x → s), {s, 0, 1}, {x, 0, 1}];
integ2 = Integrate[k[x, s], {s, 0, 1}, {x, 0, 1}];
```

$\alpha 2 = \frac{1}{DD}$ `(integ1 - α1 * integ2);`

```
y2 = f[x] + Integrate[k[x, s] * ((y1 /. x → s) + α2), {s, 0, 1}]
```

$\frac{19x}{75} + x^2$

```
(* Знаходимо третє наближення *)
δ2 = y2 - y1;
integ3 = Integrate[k[x, s] * (δ2 /. x → s), {s, 0, 1}, {x, 0, 1}];
integ4 = Integrate[k[x, s], {s, 0, 1}, {x, 0, 1}];
```

$\alpha 3 = \frac{1}{DD}$ `(integ3 - α2 * integ4);`

```
y3 = f[x] + Integrate[k[x, s] * ((y2 /. x → s) + α3), {s, 0, 1}]
```

$\frac{199x}{750} + x^2$

Приклад 11. *Розв'язати методом квадратур рівняння Фредгольма* $y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)ds + x^2$ (*приклад* 6.1, *с.* 90).

```
Clear["Global`*"]
(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_, s_] = x * s ^ 2;
f[x_] = x ^ 2;
λ = 1;

(* Використаємо метод квадратур *)
```

```
(* Вибираємо вузли *)
x[0] = 0;
x[1] = 0.5;
x[2] = 1;

(* Для заміни інтеграла скінченною сумою
  використаємо формулу Сімпсона *)
integ[t_] = 1/6 (k[t, x[0]] * y[0] +
     4 k[t, x[1]] * y[1] + k[t, x[2]] * y[2]);

(* Розв'язуємо систему рівнянь
 відносно y[0], y[1], y[2] *)
sol = Solve[
   {y[0] == λ * integ[x[0]] + f[x[0]],
    y[1] == λ * integ[x[1]] + f[x[1]],
    y[2] == λ * integ[x[2]] + f[x[2]]},
   {y[0], y[1], y[2]}];

{y[0], y[1], y[2]} = {y[0], y[1], y[2]} /. sol[[1]]
{0., 0.388889, 1.27778}

(* Знаходимо наближений розв'язок *)
ytilde[t_] = f[t] + λ * integ[t];
ytilde[x]
0.277778 x + x^2

(* Порівняємо із точним розв'язком *)
MaxValue[{Abs[ytilde[t] - (4/15 t + t^2)], 0 ≤ t ≤ 1}, t]
0.0111111
```

Приклад 12. *Розв'язати методом квадратур рівняння Вольтерри* $y(x) = \int_0^x (x-s)y(s)\,ds + 1$ (*приклад* 6.2, *с.* 93).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_, s_] = x - s;
f[x_] = 1;
λ = 1;
```

```
(* Використаємо метод квадратур *)

(* Вибираємо крок *)
h = 0.2;

(* Формуємо вузли *)
Do[ x[i] = h*i, {i, 0, 5} ];

(* Обчислюємо значення наближеного
  розв'язку у вузлах *)
y[0] = f[x[0]];
y[1] = (1 - h/2 * λ * k[ x[1], x[1] ])^-1 *
    (f[ x[1] ] + h/2 * λ * k[ x[1], x[0] ] * y[0]);

Do[y[i] = (1 - h/2 * λ * k[ x[i], x[i] ])^-1 *
    (f[ x[i] ] + h/2 * λ * k[ x[i], x[0] ] * y[0] +
      h * λ * Sum[k[ x[i], x[j]] * y[j], {j, 1, i - 1}]), {i, 2, 5}]

(* Виводимо результат *)
?? y
```

```
Global`y

y[0] = 1

y[1] = 1.02

y[2] = 1.0808

y[3] = 1.18483

y[4] = 1.33626

y[5] = 1.54113
```

Приклад 13. *Розв'язати методом найменших квадратів рівняння* $y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)ds + x^2$ (*приклад* 6.3, *с*. 96).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_, s_] = x*s^2;
f[x_] = x^2;
λ = 1;

(* Використаємо метод найменших квадратів *)

ϕ[1, x_] = x;
ϕ[2, x_] = x^2;

(* Формуємо коефіцієнти системи рівнянь *)
Do[a[i, j] = ∫_0^1 (ϕ[i, x] - λ*∫_0^1 k[x, s]*ϕ[i, s] ds) *
      (ϕ[j, x] - λ*∫_0^1 k[x, s]*ϕ[j, s] ds) dx, {i, 1, 2}, {j, 1, 2}];

Do[b[i] = ∫_0^1 f[x] (ϕ[i, x] - λ ∫_0^1 k[x, s] ϕ[i, s] ds) dx, {i, 1, 2}];

(* Розв'язуємо систему рівнянь *)
sol = Solve[{a[1, 1] c1 + a[1, 2] c2 == b[1],
            a[2, 1] c1 + a[2, 2] c2 == b[2]}, {c1, c2}];

{c1, c2} = {c1, c2} /. sol[[1]]
```

$\left\{\frac{4}{15}, 1\right\}$

```
(* Отримуємо розв'язок рівняння *)
y = c1*ϕ[1, x] + c2*ϕ[2, x]
```

$\frac{4\,x}{15} + x^2$

Приклад 14. *Розв'язати наближено методом Гальоркіна – Петрова рівняння* $y(x)=\int_0^1 xs^2 y(s)ds + x^2$ (*приклад* 6.4, *с.* 97).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_, s_] = x*s^2;
```

```
f[x_] = x^2;
λ = 1;

(* Використаємо метод Гальоркіна-Петрова *)

ϕ[1, x_] = 1;
ϕ[2, x_] = x;

ψ[1, x_] = x;
ψ[2, x_] = x^2;

(* Формуємо коефіцієнти системи рівнянь *)
Do[ a[i, j] = ∫_0^1 ϕ[i, x] * ψ[j, x] dx - λ *
      ∫_0^1 (ψ[j, x] * ∫_0^1 k[x, s] * ϕ[i, s] ds) dx, {i, 1, 2}, {j, 1, 2}];

Do[b[j] = λ ∫_0^1 (ψ[j, x] * ∫_0^1 k[x, s] f[s] ds) dx, {j, 1, 2}];

(* Розв'язуємо систему рівнянь *)
sol = Solve[{a[1, 1] c1 + a[1, 2] c2 == b[1],
            a[2, 1] c1 + a[2, 2] c2 == b[2]}, {c1, c2}];

{c1, c2} = {c1, c2} /. sol[[1]]
```

$\left\{0, \frac{4}{15}\right\}$

```
(* Отримуємо розв'язок рівняння *)
y = f[x] + c1 * ϕ[1, x] + c2 * ϕ[2, x]
```

$\frac{4\,x}{15} + x^2$

Приклад 15. *Розв'язати наближено методом Бубнова – Гальоркіна рівняння* $y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)ds + x^2$ (*приклад* 6.5, *с.* 99).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_, s_] = x * s^2;
f[x_] = x^2;
λ = 1;
```

```
(* Використаємо метод Бубнова-Гальоркіна *)

ϕ[1, x_] = 1;
ϕ[2, x_] = x;

(* Формуємо коефіцієнти системи рівнянь *)
Do[α[i, j] = ∫_0^1 ϕ[i, x] * ϕ[j, x] dx, {i, 1, 2}, {j, 1, 2}];
Do[β[i, j] = ∫_0^1 (∫_0^1 k[x, s] ϕ[i, x] * ϕ[j, s] ds) dx,
                                   {i, 1, 2}, {j, 1, 2}];
Do[γ[i] = ∫_0^1 (∫_0^1 k[x, s] ϕ[i, x] * f[s] ds) dx, {i, 1, 2}];

(* Розв'язуємо систему рівнянь *)
sol = Solve[{(α[1, 1] - λ * β[1, 1]) c1 +
                    (α[1, 2] - λ * β[1, 2]) c2 == λ * γ[1],
             (α[2, 1] - λ * β[2, 1]) c1 +
                    (α[2, 2] - λ * β[2, 2]) c2 == λ * γ[2]},
                                          {c1, c2}];

{c1, c2} = {c1, c2} /. sol[[1]]
```

$$\left\{0,\ \frac{4}{15}\right\}$$

```
(* Отримуємо розв'язок рівняння *)
y = f[x] + c1 * ϕ[1, x] + c2 * ϕ[2, x]
```

$$\frac{4\,x}{15} + x^2$$

Приклад 16. *Розв'язати наближено методом моментів рівняння* $y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)ds + x^2$ (*приклад* 6.6, *с.* 100).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_, s_] = x * s^2;
f[x_] = x^2;
λ = 1;
```

```
(* Використаємо метод моментів *)

ϕ[1, x_] = 1;
ϕ[2, x_] = ∫₀¹ k[x, s] ϕ[1, s] ds;

(* Формуємо коефіцієнти системи рівнянь *)
Do[α[i, j] = ∫₀¹ ϕ[i, x] * ϕ[j, x] dx, {i, 1, 2}, {j, 1, 2}];
Do[β[i, j] = ∫₀¹ (∫₀¹ k[x, s] ϕ[i, x] * ϕ[j, s] ds) dx,
                                    {i, 1, 2}, {j, 1, 2}];
Do[γ[i] = ∫₀¹ (∫₀¹ k[x, s] ϕ[i, x] * f[s] ds) dx, {i, 1, 2}];

(* Розв'язуємо систему рівнянь *)
sol = Solve[{(α[1, 1] - λ * β[1, 1]) c1 +
                    (α[1, 2] - λ * β[1, 2]) c2 == λ * γ[1],
             (α[2, 1] - λ * β[2, 1]) c1 +
                    (α[2, 2] - λ * β[2, 2]) c2 == λ * γ[2]},
                                          {c1, c2}];
{c1, c2} = {c1, c2} /. sol[[1]]
```

$\left\{0, \frac{4}{5}\right\}$

```
(* Отримуємо розв'язок рівняння *)
y = f[x] + c1 * ϕ[1, x] + c2 * ϕ[2, x]
```

$\frac{4\,x}{15} + x^2$

Приклад 17. *Знайти методом колокації наближений розв'язок рівняння* $y(x) = \int_0^1 xs^2 y(s)ds + x^2$ (*приклад* 6.7, *с.* 101).

```
Clear["Global`*"]
(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_, s_] = x * s^2;
f[x_] = x^2;
λ = 1;
```

```
(* Використаємо метод колокації *)
ϕ[1, x_] = 1;
ϕ[2, x_] = x;
ϕ[3, x_] = x^2;
```

$$\psi[1, x\_] = \phi[1, x] - \lambda \int_0^1 k[x, s] * \phi[1, s]\, ds;$$

$$\psi[2, x\_] = \phi[2, x] - \lambda \int_0^1 k[x, s] * \phi[2, s]\, ds;$$

$$\psi[3, x\_] = \phi[3, x] - \lambda \int_0^1 k[x, s] * \phi[3, s]\, ds;$$

```
(* Вибираємо точки колокації *)
x[1] = 0;
x[2] = 1 / 2;
x[3] = 1;

(* Записуємо систему рівнянь *)
system = Table[ c1 * ψ[1, x[j]] + c2 * ψ[2, x[j]] +
              c3 * ψ[3, x[j]] == f[x[j]], {j, 1, 3}];

(* Розв'язуємо систему рівнянь *)
sol = Solve[system, {c1, c2, c3}];
{c1, c2, c3} = {c1, c2, c3} /. sol[[1]]
```

$$\left\{0, \frac{4}{15}, 1\right\}$$

```
(* Отримуємо розв'язок рівняння *)
y = c1 * ϕ[1, x] + c2 * ϕ[2, x] + c3 * ϕ[3, x]
```

$$\frac{4\,x}{15} + x^2$$

Приклад 18. *Знайти характеристичні числа та власні функції симетричного ядра* $K(x,s) = xs - 1/3,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le s \le 1$ (*приклад* 7.1, *с*. 106).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо ядро *)
```

$$k[x\_, s\_] = x * s - \frac{1}{3};$$

```
(* Ядро є виродженим *)
a[1, x_] = x;
b[1, s_] = s;
p[1] = 1;

a[2, x_] = 1;
b[2, s_] = 1;
p[2] = -1/3;

(* Знаходимо характеристичні числа ядра *)
Do[α[i, j] = ∫_0^1 p[i] a[i, s] a[j, s] ds, {i, 1, 2}, {j, 1, 2}];
M[λ_] = Table[λ*α[i, j], {i, 1, 2}, {j, 1, 2}] - IdentityMatrix[2];
MatrixForm[M[λ]]
```

$$\begin{pmatrix} -1+\frac{\lambda}{3} & \frac{\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{6} & -1-\frac{\lambda}{3} \end{pmatrix}$$

```
solnumbers = Solve[Det[M[λ]] == 0, λ];
λ[1] = λ /. solnumbers[[1, 1]];
λ[2] = λ /. solnumbers[[2, 1]];
{λ[1], λ[2]}
```

{-6, 6}

```
(* Знаходимо власні функції ядра *)
m = M[λ[1]].{c1, c2};
solconst = Solve[m[[1]] == 0, c1];
ϕ[1, x_] = ((c1*a[1, x] + c2*a[2, x]) /. solconst[[1]]) /. c2 → -1;

m = M[λ[2]].{c1, c2};
solconst = Solve[m[[1]] == 0, c1];
ϕ[2, x_] = ((c1*a[1, x] + c2*a[2, x]) /. solconst[[1]]) /. c2 → -1;

{ϕ[1, x], ϕ[2, x]}
```

{-1 + x, -1 + 3 x}

Приклад 19. *Знайти характеристичні числа та власні функції симетричного ядра*

$$K(x,s)=\begin{cases}\sin x\cos s, & 0\le x\le s,\\ \sin s\cos x, & s\le x\le \pi\end{cases}$$ (*приклад* 7.2, *с.* 109).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо ядро  *)
k1[x_] = Sin[x];
k2[s_] = Cos[s];

(* Задаємо межі інтегрування *)
a = 0;
b = Pi;

(* Обчислюємо вронскіани *)
W = Wronskian[{k1[x], k2[x]}, x]
```

-1

```
W1 = Wronskian[{k1'[x], k2'[x]}, x]
```

-1

(* Формуємо диференціальне рівняння *)

$$\text{equation} = \left(\phi''[x] + \frac{D[W, x]}{W}\phi'[x] + \left(\frac{W1}{W} - \lambda * W\right)\phi[x] == 0\right)$$

$$(1+\lambda)\,\phi[x] + \phi''[x] == 0$$

```
(* Формуємо крайові умови *)
condition1 = (k1[a] ϕ'[a] - k1'[a] ϕ[a] == 0)
```

$$-\phi[0] == 0$$

```
condition2 = (k2[b] ϕ'[b] - k2'[b] ϕ[b] == 0)
```

$$-\phi'[\pi] == 0$$

```
(* Розв'язуємо крайову задачу з використанням другої умови *)
soldif = DSolve[{equation , condition2}, ϕ[x], x];
ϕ[x_] = ϕ[x] /. soldif[[1]]
```

$$e^{-2\pi\sqrt{-1-\lambda}-x\sqrt{-1-\lambda}}\left(e^{2\pi\sqrt{-1-\lambda}} + e^{2x\sqrt{-1-\lambda}}\right)C[2]$$

```
(* Перевіряємо першу крайову умову *)
condition1
```

$$-e^{-2\pi\sqrt{-1-\lambda}}\left(1 + e^{2\pi\sqrt{-1-\lambda}}\right)C[2] == 0$$

(* Як бачимо, крайова задача має ненульові розв'язки тільки при виконанні умови $1+e^{2\pi\sqrt{-1-\lambda}}==0$, тобто при $2\pi\sqrt{-1-\lambda} = \pi i + 2\pi i k$, де k -- ціле. *)

```
soleq = Solve[2 π Sqrt[-1 - λ] == π ⅈ + 2 π ⅈ k, λ];
λ = λ /. soleq[[1]]
```

$\frac{1}{4}\left(-3+4\,k+4\,k^2\right)$

```
λ = Expand[λ]
```

$-\frac{3}{4}+k+k^2$

```
(* Знайдемо власні функції *)
FullSimplify[ϕ[x], Assumptions → k ∈ Integers && k ≥ 0]
```

$-2\,i\,C[2]\,\mathrm{Sin}\left[\left(\frac{1}{2}+k\right)x\right]$

```
(* Врахувавши, що C[2] може набувати довільних
 комплексних значень, множник -2ⅈ можна включити
  до константи, тому власні функції мають вигляд
 C[2] Sin[(1/2+k) x], де k=0,1,2,...*)
```

Приклад 20. *Знайти методом квадратур наближений розв'язок рівняння* $\int_0^x (1+x-s)y(s)\,ds = x$ (*приклад* 8.3, *с.* 128).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_, s_] = 1 + x - s;
f[x_] = x;

(* Використаємо метод квадратур *)

(* Задаємо крок *)
h = 0.2;

(* Формуємо вузли *)
Do[ x[i] = i * h, {i, 0, 5}]

(* Обчислюємо значення наближеного розв'язку у вузлах *)

y[0] = f'[0] / k[x[0], x[0]];
```

```
a[j_] = If[j == 0, 0.5, 1];

Do[y[i] = 2/(k[x[i], x[i]]) (f[x[i]]/h -
    Sum[a[j] * k[x[i], x[j]] * y[j], {j, 0, i - 1}]), {i, 1, 5}]

(* Виводимо результат *)
?? y
```

```
Global`y

y[0] = 1

y[1] = 0.8

y[2] = 0.68

y[3] = 0.528

y[4] = 0.4688

y[5] = 0.34048
```

Приклад 21. *Розв'язати операційним методом рівняння Вольтерри* $y(x) = \int_0^x (x-s)\,y(s)\,ds + 4e^x$ (*приклад* 9.1, *с.* 140).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_] = x;
λ = 1;
f[x_] = 4 E^x;

(* Використаємо операційний метод *)
tf[p_] = LaplaceTransform[f[x], x, p];
tk[p_] = LaplaceTransform[k[x], x, p];
ty[p_] = tf[p]/(1 - λ * tk[p]);

(* Отримуємо розв'язок рівняння *)
y[x_] = InverseLaplaceTransform[ty[p], p, x];
FullSimplify[y[x]]
```

$e^{-x} + e^{x}\,(3 + 2\,x)$

Приклад 22. *Розв'язати операційним методом рівняння Вольтерри* $y(x)+\int_0^x e^{x-s}y(s)\,ds=\cos x$ (*приклад* 9.2, *с*. 140).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_] = E^x;
λ = -1;
f[x_] = Cos[x];

(* Використаємо операційний метод *)
tf[p_] = LaplaceTransform[f[x], x, p];
tk[p_] = LaplaceTransform[k[x], x, p];
ty[p_] = tf[p] / (1 - λ * tk[p]);

(* Отримуємо розв'язок рівняння *)
y[x_] = InverseLaplaceTransform[ty[p], p, x];
FullSimplify[y[x]]

Cos[x] - Sin[x]
```

Приклад 23. *Розв'язати операційним методом рівняння* $\int_0^x e^{x-s}y(s)\,ds=\sin x$ (*приклад* 9.3, *с*. 141).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо параметри рівняння *)
k[x_] = E^x;
f[x_] = Sin[x];

(* Використаємо операційний метод *)
tf[p_] = LaplaceTransform[f[x], x, p];
tk[p_] = LaplaceTransform[k[x], x, p];
ty[p_] = tf[p] / tk[p];

(* Отримуємо розв'язок рівняння *)
y[x_] = InverseLaplaceTransform[ty[p], p, x];
FullSimplify[y[x]]

Cos[x] - Sin[x]
```

Приклад 24. *Розв'язати операційним методом систему інтегральних рівнянь з прикладу* 9.4 (*с*. 142-143):

$$\begin{cases} y_1(x) = \int\limits_0^x y_1(s)\,ds - \int\limits_0^x e^{x-s} y_2(s)\,ds + e^x, \\ y_2(x) = -\int\limits_0^x (x-s) y_1(s)\,ds + \int\limits_0^x y_2(s)\,ds - x. \end{cases}$$

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо ядра *)
k11[x_] = 1;
k12[x_] = -E^x;
k21[x_] = -x;
k22[x_] = 1;

(* Задаємо вільні члени рівнянь системи *)
f1[x_] = E^x;
f2[x_] = -x;

(* Виконуємо перетворення Лапласа *)
tk11[p_] = LaplaceTransform[k11[x], x, p];
tk12[p_] = LaplaceTransform[k12[x], x, p];
tk21[p_] = LaplaceTransform[k21[x], x, p];
tk22[p_] = LaplaceTransform[k22[x], x, p];
tf1[p_] = LaplaceTransform[f1[x], x, p];
tf2[p_] = LaplaceTransform[f2[x], x, p];

(* Розв'язуємо систему рівнянь відносно зображень *)
sol = Solve[{ty1 == tk11[p] * ty1 + tk12[p] * ty2 + tf1[p],
           ty2 == tk21[p] * ty1 + tk22[p] * ty2 + tf2[p]},
                                              {ty1, ty2}];
{ty1, ty2} = {ty1, ty2} /. sol[[1]];

(* Отримуємо розв'язки системи, виконавши
   обернене перетворення Лапласа *)
y1 = InverseLaplaceTransform[ty1, p, x]
```

e^{2x}

```
y2 = InverseLaplaceTransform[ty2, p, x]
```

$\frac{1}{2}\left(1 - e^{2x}\right)$

Приклад 25. *Розв'язати операційним методом інтегро-диференціальне рівняння типу згортки*

$$y''(x)+y(x)+\int_0^x \mathrm{sh}(x-s)\,y(s)\,ds+\int_0^x \mathrm{ch}(x-s)\,y'(s)\,ds=\mathrm{ch}\,x,$$

якщо $y(0)=-1,\ \ y'(0)=1$ (*приклад* 9.5, *с.* 145).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаємо ядра *)
k1[x_] = Sinh[x];
k2[x_] = Cosh[x];

(* Задаємо вільний член рівняння *)
f[x_] = Cosh[x];

(* Виконаємо перетворення Лапласа *)
ty[p_] = LaplaceTransform[y[x], x, p];
tyd1[p_] = LaplaceTransform[y'[x], x, p] /. {y[0] → -1};
tyd2[p_] =
  LaplaceTransform[y''[x], x, p] /. {y[0] → -1, y'[0] → 1};
tk1[p_] = LaplaceTransform[k1[x], x, p, Assumptions → {p > 1}];
tk2[p_] = LaplaceTransform[k2[x], x, p, Assumptions → {p > 1}];
tf[p_] = LaplaceTransform[f[x], x, p, Assumptions → {p > 1}];

(* Запишемо перетворення рівняння *)
eq = (tyd2[p] + ty[p] + tk1[p] * ty[p] + tk2[p] * tyd1[p] == tf[p]);

(* Замінимо LaplaceTransform[y[x],x,p] у рівнянні на Y *)
eq = eq /. {LaplaceTransform[y[x], x, p] → Y};

(* Розв'яжемо рівняння відносно Y *)
sol = Solve[eq, Y];
Y = Y /. sol[[1]];

(* Знайдемо обернене перетворення Лапласа *)
InverseLaplaceTransform[Y, p, x]

1 - x - 2 Cos[x] + 2 Sin[x]
```

Приклад 26. *Розв'язати операційним методом інтегро-диференціальне рівняння типу згортки*

$$y'(x)-2y(x)+\int_0^x (x-s)y'''(s)ds=-x^2+x+2,$$

якщо $y(0)=-1$ (*приклад* 9.6, *с.* 145-146).

```
Clear["Global`*"]

(* Задаемо ядро *)
k[x_] = x;

(* Задаемо вільний член рівняння *)
f[x_] = -x^2 + x + 2;

(* Виконаемо перетворення Лапласа *)

ty[p_] = LaplaceTransform[y[x], x, p];
tyd1[p_] = LaplaceTransform[y'[x], x, p] /. {y[0] → -1};
tyd2[p_] =
  LaplaceTransform[y''[x], x, p] /. {y[0] → -1, y'[0] → 0};
tyd3[p_] =
  LaplaceTransform[y'''[x], x, p] /. {y[0] → -1,
                                      y'[0] → 0, y''[0] → 1};

tk[p_] = LaplaceTransform[k[x], x, p];

tf[p_] = LaplaceTransform[f[x], x, p];

(* Запишемо перетворення рівняння *)
eq = (tyd1[p] - 2 ty[p] + tk[p] * tyd3[p] == tf[p]);

(* Замінимо LaplaceTransform[y[x],x,p] у рівнянні на Y *)
eq = eq /. {LaplaceTransform[y[x], x, p] → Y};

(* Розв'яжемо рівняння відносно Y *)
sol = Solve[eq, Y];
Y = Y /. sol[[1]];

(* Знайдемо обернене перетворення Лапласа *)
InverseLaplaceTransform[Y, p, x]
```

$$-1+\frac{x^2}{2}$$

ДОДАТОК 2
Основи роботи з системою комп’ютерної алгебри Mathematica

У цьому додатку коротко розглянемо основні прийоми роботи з системою комп'ютерної алгебри Mathematica. Більш детальну інформацію про Mathematica можна знайти, наприклад, в [12], [15], [18].

1. Початок роботи. Документи у Mathematica мають розширення **.nb**. Кожен документ складається з комірок вводу, комірок виводу та комірок іншого призначення. Команди, які повинна виконати система, вводяться користувачем у комірку вводу. Щоб запустити ці команди на виконання, потрібно натиснути комбінацію клавіш Shift+Enter. Якщо з якихось причин потрібно перервати процедуру виконання команд, можна скористатися комбінацією клавіш Alt+<.>.

Після виконання ядром системи потрібних операцій, результат повертається у комірку виводу. Наприклад, обчислимо $\cos 30^\circ$:

```
Cos[Pi / 6]
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

В одну комірку вводу може бути введено декілька команд:

```
x = Pi / 4
Sin[x]
```

$$\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Як бачимо, результат виводиться у тому ж порядку, у якому виконуються команди.

Результат команди, яка закінчується крапкою з комою, не виводиться. Цим можна скористатися для того, щоб приховати результати проміжних обчислень:

```
x = Pi / 4;
Sin[x]
```

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Комірка вводу також може містити коментарі. Коментар у Mathematica – це текст, який починається з символів "**(***" і закінчується символами "***)**".

2. Арифметичні операції. В арифметичних виразах можна використовувати операції піднесення до степеня (^), множення (* або пробіл), ділення (/), додавання (+), віднімання (–), факторіал (!). Порядок виконання цих операцій є стандартним, а для його зміни використовують круглі дужки.

Для більш зручного запису виразів можна скористатися палітрами вводу з пункту меню **Palettes** або певними комбінаціями клавіш. Наприклад, щоб ввести риску дробу, потрібно натиснути Ctrl+/, щоб записати показник степеня у формі верхнього індекса, можна скористатися комбінацією Ctrl+^.

3. Константи та вбудовані функції. Визначені такі іменовані константи: **Pi** – число $\pi = 3{,}14159...$, **E** – число $e = 2{,}71828...$ (основа натурального логарифма), **I** – уявна одиниця, **Infinity** – нескінченність та деякі інші.

Mathematica має велику кількість вбудованих математичних функцій (для отримання детальної інформації щодо певної функції потрібно поставити курсор на ім'я функції та натиснути F1).

У таблицях наведено команди для основних функцій.

Функція	Команда	Функція	Команда	Функція	Команда
$\lvert x\rvert$	**Abs[x]**	e^x	**Exp[x]**	$\log_a x$	**Log[x, a]**
$\sqrt{x}$	**Sqrt[x]**	$\ln x$	**Log[x]**	$\lg x$	**Log10[x]**
$\sin x$	**Sin[x]**	$\operatorname{sh} x$	**Sinh[x]**	$\arcsin x$	**ArcSin[x]**
$\cos x$	**Cos[x]**	$\operatorname{ch} x$	**Cosh[x]**	$\arccos x$	**ArcCos[x]**
$\operatorname{tg} x$	**Tan[x]**	$\operatorname{th} x$	**Tanh[x]**	$\operatorname{arctg} x$	**ArcTan[x]**
$\operatorname{ctg} x$	**Cot[x]**	$\operatorname{cth} x$	**Coth[x]**	$\operatorname{arcctg} x$	**ArcCot[x]**

Команда	Функція
Round[x]	заокруглення **x** до найближчого цілого
Floor[x]	найбільше ціле число, менше або рівне за **x**
Ceiling[x]	найближче ціле число, більше або рівне за **x**
IntegerPart[x]	ціла частина числа **x**
FractionalPart[x]	дробова частина числа **x**
N[x]	числове значення **x**
N[x, n]	числове значення **x** з точністю **n** цифр

Аргументи тригонометричних функцій задаються в радіанах.

Оскільки Mathematica намагається отримати абсолютно точні значення, то деякі результати можуть повертатися в необчисленому вигляді:

```
Tan[Pi / 3]
```

$\sqrt{3}$

Для того, щоб отримати наближене значення, використовують функцію **N**:

```
N[Tan[Pi / 3]]
```

```
1.73205
```

Цю функцію можна записувати також у так званій постфіксній формі виклику:

```
Tan[Pi / 3] // N
```

```
1.73205
```

4. Змінні. Змінні у Mathematica – це поіменовані об'єкти, які під час виконання документа можуть набувати різних значень – як числових, так і символьних. Імена змінних можуть складатися з букв, цифр і деяких спеціальних символів, але не можуть починатися із цифри.

Графічний інтерфейс Mathematica дозволяє просто визначити, чи з певним іменем на даний момент пов'язане якесь значення: якщо ім'я змінної виділено синім кольором, то змінна не є ініціалізованою, якщо ж колір чорний, то змінній раніше вже присвоєно деяке значення.

Особливістю системи є те, що під час одного сеансу роботи Mathematica значення змінних зберігаються навіть при роботі з іншим документом. Тому перед використанням змінних у новому контексті бажано очистити їх від «старих» значень. Для цього треба викликати функцію **Clear**, аргументами якої є імена потрібних змінних. Також аргументом цієї функції може бути деякий шаблон. Наприклад, для очистити всі змінні можна командою:

```
Clear["Global`*"]
```

5. Списки. Списком (або масивом), у Mathematica називають сукупність даних, відділених комами і обмежених фігурними дужками. Дані у списку можуть бути різнотипними, наприклад **{3, a, Pi}**. Елементи списку нумеруються індексами 1, 2, 3, ...

Для доступу до елемента через його індекс використовують подвійні квадратні дужки:

```
x = {3, a, Pi};
x[[2]]
a
```

Для формування списків зручно використовувати вбудовані функції Mathematica:

Команда	Функція
Range[n]	список **{1, 2, ..., n}**
Range[n1, n2]	список **{n1, n1+1, ..., n2}**
Range[n1, n2, dn]	список **{n1, n1+dn, ..., n2}**
Table[f, {n}]	список із **n** значень **f**
Table[f, {i, i_{min}, i_{max}}]	список значень **f**, при цьому змінна **i** набуває значень i_{min}, i_{min} +1,..., i_{max}

Для додавання нових елементів у кінець уже існуючого списку використовують функцію **Append**:

```
x = {1, 3};
x = Append[x, 7]
{1, 3, 7}
```

Важливе значення мають вкладені списки, тобто списки, елементами яких є інші списки. Такими списками задають матриці:

```
m = {{3, 2}, {1, 4}};
m // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Функція **MatrixForm** подає список у матричному вигляді. Ще зауважимо, що операція множення матриць задається крапкою.

6. Операції математичного аналізу. Mathematica може виконувати велику кількість операцій математичного аналізу як у числовому, так і в символьному вигляді.

У таблиці наведено короткий перелік цих функцій.

Команда	Функція
Limit[f, t ->t0]	границя $\lim\limits_{t \to t_0} f(t)$
Sum[f, {n, n1, n2}]	сума $\sum\limits_{n=n_1}^{n_2} f(n)$
Product[f, {n, n1, n2}]	добуток $\prod\limits_{n=n_1}^{n_2} f(n)$
Integrate[f, t]	невизначений інтеграл $\int f(t)dt$
Integrate[f, {t, a, b}]	визначений інтеграл $\int_a^b f(t)dt$
D[f, x]	похідна $f'(x)$
D[f, {x, n}]	похідна $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$
FullSimplify[f]	спрощення виразу **f**
Expand[f]	відкриття дужок у виразі **f**
FindMaxValue[{f, condition}, x]	максимальне значення функції **f** від змінної **x** за умови **condition**
Wronskian[{y1, y2}, x]	вронскіан функцій **y1** і **y2**
LaplaceTransform[f, x, p]	перетворення Лапласа функції **f**
InverseLaplaceTransform[f, p, x]	обернене перетворення Лапласа функції **f**

Наведемо приклади використання деяких з наведених функцій:

$$\text{Limit}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n \to \text{Infinity}\right]$$

e

$$\text{Sum}\left[\frac{1}{n\text{^}2},\ \{n, 1, \text{Infinity}\}\right]$$

$$\frac{\pi^2}{6}$$

```
Integrate[Sin[x], {x, 0, Pi/2}]
```

1

```
Integrate[Sin[x], x]
```

```
-Cos[x]
```

```
Expand[(1 + x) (1 + x^2)]
```

$1 + x + x^2 + x^3$

Зауважимо, що для функцій **FullSimplify** і **LaplaceTransform** існує опція **Assumptions** для накладання умов на значення змінних, наприклад:

```
FullSimplify[Sqrt[x^2]]
```

$\sqrt{x^2}$

```
FullSimplify[Sqrt[x^2], Assumptions -> x > 0]
```

x

7. Підстановки. Рівняння. Для заміни у виразі одних величин на інші використовують оператор підстановки "**/.**". Приклад роботи цього оператора:

$$\frac{x*a}{1-x} \text{ /. } \{x \to y\text{^}2,\ a \to \text{Sqrt}[a]\}$$

$$\frac{\sqrt{a}\ y^2}{1-y^2}$$

У наступній таблиці подано деякі функції для розв'язування рівнянь і систем рівнянь.

Команда	Функція
Solve[lhs == rhs, var]	розв'язує рівняння **lhs==rhs** відносно змінної **var**
Solve[{lhs1 == rhs1, lhs2==rhs2,...},{var1, var2,...}]	розв'язує систему рівнянь **[{lhs1== rhs1, lhs2==rhs2,...}** відносно змінних **{var1, var2,...}**
DSolve[lhs == rhs, y, x]	розв'язує диференціальне рівняння **lhs==rhs** відносно функції **y** від **x**
DSolve[{lhs1 == rhs1, lhs2==rhs2,...},{y1, y2,...}, x]	розв'язує систему диференціальних рівнянь **{lhs1==rhs1, lhs2== rhs2,...}** відносно функцій **{y1, y2,...}** від **x**

Дані функції повертають результат у вигляді вкладеного списку підстановок. Тому, у випадку необхідності виконання подальших операцій з отриманими розв'язками, потрібно виконати ці підстановки. Продемонструємо цей процес на прикладі:

```
sol = Solve[x^2 - 3 x + 2 == 0, x]
{{x → 1}, {x → 2}}

x1 = x /. sol[[1]]
1

x2 = x /. sol[[2]]
2
```

8. Розгалуження. У деяких випадках дії, які повинна виконати програма, залежать від істинності певних умов. Для перевірки умов і зміни подальшого ходу виконання програми у Mathematica існує функція **If**, яка має такий синтаксис:

If[умова, вираз1, вираз2]

де **умова** – це логічний вираз, тобто вираз, який може набувати значень **True** (істина) або **False** (хиба). Якщо умова виконується, то функція повертає **вираз1**, інакше – **вираз2**.

Для складання умов найчастіше використовують оператори порівняння: **==** (дорівнює), **!=** (не дорівнює), **>** (більше), **<** (менше), **>=** (більше або дорівнює), **<=** (менше або дорівнює), і операції математичної логіки: **!** (не), **&&** (і), **| |** (або).

9. Цикли. Для кількаразового виконання однотипних операцій у Mathematica існують функції циклу **Do**, **For** і **While**. Функція **Do** має кілька модифікацій:

Команда	Функція
Do[expr, {imax}]	виконує **imax** разів обчислення **expr**
Do[expr, {i, imax}]	обчислює **expr** зі змінною **i**, яка набуває значення від **1** до **imax** з кроком **1**
Do[expr, {i, imin, imax}]	обчислює **expr** зі змінною **i**, яка набуває значення від **imin** до **imax** з кроком **1**
Do[expr, {i, imin, imax, di}]	обчислює **expr** зі змінною **i**, яка набуває значення від **imin** до **imax** з кроком **di**
Do[expr, {i, imin, imax}, {j, jmin, jmax},...]	обчислює **expr** зі змінними **i** та **j**, які набувають значень у заданих межах з кроком **1**

Функція **For** має вигляд: **For[start, test, incr, body]**. Спочатку один раз обчислюється вираз **start**, а потім, по черзі, обчислюються вирази **body** і **incr** доти, доки умова **test** не перестане давати логічне значення **True**. Коли **test** дає **False**, цикл завершується.

Функція **While[test, body]** виконує **body**, доки **test** не перестане давати логічне значення **True**.

10. Функції користувача. У випадках, коли виникає потреба у кількаразовому використанні функцій, які не є стандартними функціями системи Mathematica, зручно визначати функції користувача. Розглянемо приклад створення і використання такої функції.

```
f[x_] = x^2;

f[2]

4

f[a^3]
```

a^6

Зауважимо, що похідну від функції користувача можна записати за допомогою штриха:

```
f'[x]

2 x

f''[x]

2
```

Цікавою особливістю функцій користувача є те, що значення цих функцій можна прив'язувати не тільки до змінних, а і до констант. Цим можна скористатися для зберігання дискретних даних:

```
y[1] = 0.5; y[2] = 0.7; y[3] = y[1] + y[2];

?? y
 Global`y

y[1] = 0.5

y[2] = 0.7

y[3] = 1.2
```

Оператор **??** – це скорочений запис функції **Information** для виведення інформації, зв'язаної на даний момент із даним символом.

БІОГРАФІЧНИЙ ПОКАЖЧИК

Абель Нільс Генрік (Abel Niels Henrik; 1802–1829) – норвезький математик. Довів нерозв'язність у радикалах загальних алгебраїчних рівнянь п'ятого та вищих степенів. Знайшов функції, що не інтегруються з допомогою елементарних функцій.

Арцела Чезаре (Arzela Cesare; 1847–1912) – італійський математик. Основні сфери діяльності: алгебра, теорія функцій, математична фізика. Член Болонської академії наук.

Банах Стефан (Banach Stefan; 1892–1945) – польський математик, професор Львівського університету та Львівської Політехніки. Один з творців сучасного функціонального аналізу та львівської математичної школи.

Бессель Фрідріх Вільгельм (Bessel Friedrich Wilhelm; 1784–1846) – німецький астроном і математик. Його ім'ям названі циліндричні функції першого роду (функції Бесселя) і диференціальне рівняння, якому вони задовольняють (рівняння Бесселя), нерівність для коефіцієнтів ряду Фур'є (нерівність Бесселя).

Бубнов Іван Григорович (1872–1919) – російський інженер і математик. Один з авторів методу наближеного розв'язування крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь (метод Гальоркіна – Бубнова), який використовував для розв'язування задач теорії пружності.

Буняковський Віктор Якович (1804–1889) – російський математик. Народився в м. Бар (тепер – районний центр Вінницької обл.). Після навчання у Парижі – професор різних вищих закладів у Петербурзі. Автор понад 100 праць з математичного аналізу, теорії чисел, теорії ймовірностей.

Вольтерра Віто (Volterra Vito; 1860–1940) – італійський математик і фізик. Найбільш відомі роботи стосуються рівнянь з частинними похідними, теорії пружності, інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь, функціонального аналізу.

Гальоркін Борис Григорович (1871–1945) – російський інженер і математик. Розробив методи розв'язування диференціальних рівнянь теорії пружності. Його метод скінченних елементів використовується для числового й аналітичного розв’язування рівнянь з частинними похідними.

Гаммерштейн Адольф (Hammerstein Adolf; 1888–1945) – німецький математик. Основні праці стосуються функціонального аналізу (оператор Гаммерштейна) та теорії інтегральних рівнянь (рівняння Гаммерштейна).

Гевісайд Олівер (Heaviside Oliver; 1850–1925) – англійський фізик і інженер, член Лондонського королівського товариства. Засновник (1892) методу операційного (символьного) числення, який дозволяє достатньо просто розв'язувати багато складних задач механіки, електротехніки, автоматики тощо.

Гільберт Давид (Hilbert David; 1862–1943) – німецький математик. Побудована ним теорія інтегральних рівнянь з симетричним ядром склала одну з основ сучасного функціонального аналізу (гільбертів простір).

Д’Аламбер Жан Лерон (D’Alembert Jean Le Rond; 1717–1783) – французький математик і механік. Автор фундаментальних праць з механіки, математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь. Його ім’я носить достатня умова збіжності рядів.

Коші Огюстен Луї (Cauchy Augustin Louis; 1789–1857) – французький математик. Усього опублікував понад 800 робіт з теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної механіки, математичної фізики тощо.

Лаплас П’єр-Сімон (Laplace Pierre – Simon; 1749–1827) – французький математик і астроном. Відомий працями в області небесної механіки, диференціальних рівнянь, математичної фізики. Фундаментальними є його роботи з диференціальних рівнянь (рівняння Лапласа). Для створеної ним теорії ймовірностей застосовував перетворення, яке тепер носить його ім’я.

Лебег Анрі Леон (Lebesgue Henri Leon; 1875–1941) – французький математик. Один із засновників сучасної теорії функцій дійсної змінної. Створив теорію міри, запровадив поняття вимірної функції, ввів нове визначення інтеграла (інтеграл Лебега).

Парсеваль Марк Антуан (Parseval Marc Antoin; 1755–1836) – французький математик. Основні праці з диференціальних рівнянь, теорії функцій дійсної змінної (рівність Парсеваля).

Петров Георгій Іванович (1912–1987) – російський математик і механік. Основні праці з аеродинаміки та гідродинаміки.

Пікар Шарль Еміль (Picard Charles Emile; 1856–1941) – французький математик. Основні праці з диференціальних рівнянь (дослідження особливих точок, метод послідовних наближень розв'язування задачі Коші).

Положій Георгій Миколайович (1914–1968) – український математик, професор Київського університету. Роботи з теорії функцій комплексної змінної, обчислювальної математики та математичної фізики.

Ріс Фрідеш (Riesz Frigyes; 1880–1956) – угорський математик. Основні праці з функціонального аналізу. Побудував теорію функцій від операторів. Один з засновників теорії топологічних просторів.

Урисон Павло Самуїлович (1898–1924) – російський математик. Народився в м. Одесі. Основні результати отримані в топології, теорії нелінійних диференціальних рівнянь, геометрії.

Фішер Ернст Сигізмунд (Fischer Ernst Sigismund; 1875–1954) – німецький математик. Основні праці стосуються теорії функцій і функціонального аналізу (теорема Ріса-Фішера).

Фредгольм Ерік Івар (Fredholm Erik Ivar; 1866–1927) – шведський математик. Засновник загальної теорії лінійних інтегральних рівнянь (рівняння та теореми Фредгольма).

Фур'є Жан Батист Жозеф (Fourier Jean Baptiste Joseph; 1768–1830) – французький математик. Найвагоміші результати отримав у математичній фізиці (метод Фур'є). Його ідеї стали потужним інструментом математичного дослідження багатьох задач астрономії, акустики, радіотехніки та ін.

Шмідт Ерхард (Schmidt Erhard; 1876–1959) – німецький математик, професор Берлінського університету. Основні праці з теорії функцій, інтегральних рівнянь, функціонального аналізу.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЗЧИК

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Васильева А. Б. Интегральные уравнения / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 160 с.
2. Головач Г. П. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь / Г. П. Головач, О. Ф. Калайда. – К. : Техніка, 1997. – 288 с.
3. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию / М. Л. Краснов. – М. : КомКнига, 2006. – 304 с.
4. Краснов М. Л. Интегральные уравнения : Задачи и примеры с подробными решениями / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 192 с.
5. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С. А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К. : Либідь, 2004. – 408 с.
6. Гой Т. П. Диференціальні та інтегральні рівняння / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 356 с.
7. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям/ С. Г. Михлин. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 234 с.
8. Петровский И. Г. Лекции по теории линейных интегральных уравнений / И. Г. Петровский. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 120 с.
9. Федак І. В. Лінійні інтегральні рівняння / І. В. Федак, Т. П. Гой. – Івано-Франківськ : Голіней, 2011. – 152 с.

Додаткова література

10. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения : методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К. : Наукова думка, 1986. – 544 с.
11. Гой Т. П. Операційне числення / Т. П. Гой, Г. П. Малицька, А. В. Соломко. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 208 с.
12. Головацький В. А. Система комп'ютерної алгебри Mathematica / В. А. Головацький. – Чернівці: Рута, 2008. – 352 с.

13. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. Б. Васильева, Г. Н. Медведев, Н. А. Тихонов, Т. А. Уразгильдина. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.
14. Дюкарев Ю. М. Диференціальні й інтегральні рівняння та варіаційне числення / Ю. М. Дюкарев, О. Г. Літвінова. – Х. : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2010. – 138 с.
15. Дьяконов В. П. Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления / В. П. Дьяконов – М.: ДМК-Пресс, 2008. – 576 с.
16. Зон Б. А. Лекции по интегральным уравнениям / Б. А. Зон. – М. : Высшая школа, 2004. – 92 с.
17. Колмогоров А. М. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу / А. М. Колмогоров, С. В. Фомін. – К. : Вища школа, 1974. – 456 с.
18. Лега Ю. Г. Прикладні методи комп'ютерного моделювання в середовищі Mathematica / Ю. Г. Лега, В. В. Мельник, О. М. Папуша. – Черкаси : ЧДТУ, 2011. – 188 с.
19. Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. – М. : Факториал Пресс, 2000. – 384 с.
20. Мышкис А. Д. Математика для технических вузов: Специальные курсы / А. Д. Мышкис. – СПб. : Лань, 2009. – 640 с.
21. Полянин А. Д. Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. – М.: Факториал, 1998. – 432 с.
22. Федак І. В. Функціональний аналіз / І. В. Федак. – Івано-Франківськ : Сімик, 2011. – 120 с.
23. Цегелик Г. Г. Наближені методи розв’язування крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними та інтегральних рівнянь / Г. Г. Цегелик. – Львів : Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2008. – 140 с.