Б.А. Шувар
М.І. Копач
С.М. Ментинський
А.Ф. Обшта

ДВОСТОРОННІ НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ

Ministry of education and science of Ukraine

B.A. Shuvar
M.I. Kopach
S.M. Mentynskyy
A.F. Obshta

TWO-SIDED APROXIMATES METHODS

Ivano-Frankivs'k
2006

ЗМІСТ

CONTENTS

ВСТУП

У природознавстві й техніці, в економіці й медицині, в інших прикладних науках математичні моделі явищ і процесів здебільшого є невід'ємним етапом їх досліджень. Ці математичні моделі часто зводяться до диференціальних, інтегральних, функціонально-диференціальних та інших класів операторних рівнянь. Оскільки лише у виняткових випадках вдається розв'язати такі рівняння у замкненому вигляді, то виникає потреба аналізувати відповідні рівняння за допомогою тих чи інших засобів, не маючи у своєму розпорядженні розв'язків цих рівнянь. У багатьох випадках вдається обмежитися деякою більшою або меншою мірою частковою інформацією про поведінку цих розв'язків за допомогою методів якісної теорії рівнянь. Хоча й у цій ситуації, як правило, неможливо обійтися без бодай деяких обчислень, які переважно реалізуються наближено. Добре відома у якісній теорії роль операторних, зокрема, інтегральних нерівностей, прикладом яких є знаменита лема Гронуолла. Інтегральним, диференціальним, функціональним та іншим класам операторних нерівностей присвячені численні праці (див., напр., [1, 3-7, 16-18, 25, 38, 73, 80, 82, 84, 96, 119, 120, 137, 138]), зокрема, монографії [13, 55, 92, 124, 125, 135], в яких можна знайти значну кількість використаних праць з цього приводу. В інших ситуаціях неминучою є потреба знаходити розв'язки рівнянь, які переважно можна знайти тільки наближено. У зв'язку з цим виникає чимало проблем, серед яких, зокрема, важливою є необхідність оцінювати похибки наближень до шуканих розв'язків, економість методів, зручність щодо їх машинної реалізації, адаптованість використовуваних алгоритмів до конкретної задачі та до доступних обчислювальних засобів. Розвиток сучасних обчислювальних засобів стимулює можливості розширення класів задач, які піддаються наближеному розв'язанню – з одного боку, а з іншого – інтенсифікацію досліджень відомих і пошук нових наближених методів. Як зазначає Дж. Трауб [91], деколи вдається виявити нові властивості добре відомих і, здавалося б, вичерпно вивчених класичних наближених методів навіть у скалярному випадку.

При розв'язанні нелінійних задач і лінійних задач високої розмірності з використанням багатьох наближених методів – проекційних, скінченно- сіткових та ін. – звернення до ітераційних методів часто є вирішальним засобом для того, щоб отримати прийнятний практично результат. Двосторонні ітераційні методи мають вагомі переваги перед іншими ітераційними методами, бо дозволяють охопити шуканий розв'язок вилкою, утвореною верхнім і нижнім наближеннями і цим отримати просту і зручну апостеріорну оцінку похибки для шуканого розв'язку та одержати деяку якісну інформацію про поведінку розв'язку. Деколи ці методи дозволяють отримати твердження про розв'язність відповідного рівняння. З різними аспектами теорії і застосувань двосторонніх ітераційних методів можна ознайомитися в [22, 24, 27, 36, 48, 49, 52-55, 92, 123, 124, 125, 130, 131, 135].

Можливості використання двосторонніх методів обмежуються здебільшого через те, що їх обґрунтування потребує певних припущень щодо монотонності та опуклості операторів, котрі не часто справджуються в реальних умовах. Певною перешкодою до їх використання є також те, що зазвичай дослідження цих методів не враховують зв'язаних з практичною реалізацією двосторонніх алгоритмів факторів, котрі можуть призводити до практичної втрати гарантованих теорією переваг двосторонніх методів щодо двосторонності та монотонності ітерацій, а також щодо характеру їх збіжності. Зазначимо, що двосторонні операторні нерівності є одним з основних знарядь обґунтування двосторонніх методів для операторних рівнянь як у загальному випадку, так і для випадків диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних, функціонально-диференціальних та інших класів рівнянь.

Ця монографія присвячена побудові і дослідженню збіжності двосторонніх ітераційних методів для рівнянь з немонотонними операторами, вивченню впливу факторів, які можуть ґарантувати збереження властивостей монотонності і двосторонності ітерацій і характеру їх збіжності, а також теорії двосторонніх диференціальних, інтегральних та інших класів операторних нерівностей.

До книги увійшли в основному результати, які належать авторам. З інших результатів наведені тільки ті, котрі мають безпосередній стосунок до тематики, якій присвячена ця книга. Монографія містить дослідження, які є продовженням досліджень із [57] та із [101], а також із [11, 99, 100, 102] та [89]. Вони присвячені двостороннім наближеним методам та двостороннім операторним нерівностям для немонотонних операторів. Винятком є тринадцятий розділ, в якому досліджений один варіант методу ітеративного агрегування, умови збіжності цих методів невідомі і іншими авторами досліджуються зазвичай для лінійних рівнянь з додатними операторами (див. [42]).

Наведений в книзі список літератури охоплює лише незначну частку робіт, які стосуються обраної тематики. Докладнішу і обширнішу бібліографію можна знайти в [125], а також, наприклад, в [13, 49, 57, 92, 123, 133, 135].

Перший розділ має допоміжний характер до основної частини. Розділи з третього по десятий включно, написані Б.А.Шуваром, причому §22 у розділі VIII написаний Б.А.Шуваром і М.І.Копачем. Розділи I і II написав М.І.Копач, розділи XI і XII написав С.М.Ментинський, розділ XIII написав А.Ф.Обшта.

Автори вдячні докторам фізико-математичних наук професорам П.І.Каленюку і Р.М.Тацію за нелегку працю з рецензування монографії, учасникам семінару кафедри обчислювальної математики і програмування Національного університету "Львівська політехніка", наукового семінару математичних кафедр Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника а також співробітникам цих кафедр за участь у обговоренні результатів, які увійшли до цієї книги.

INTRODUCTION

In natural and technique, in economy and medicine, in other applied sciences the mathematical models of the phenomena and processes very important in of their researches. These mathematical models often reduces to differential, integral functional-differential and others classes of the operator equations. Since, only in exeptional case it is possible to solve such equations closed kind, thus a necessity to analyse corresponding equations by the help of those or other facilities, without solutions of those equations arised in many cases it is suceeded to be restricted by some greater or less partial information about solutions behavior by the help of qualiti theory of equations. Though and in this situation, as a rule it is impossible to do without even some calculations which mainly will be realized approximately. It is well known in a high-quality theory the role of operator, particularly, integral inequalities, example of which is famous Gronouoll's lemma. Integral, differential and other classes of operator inequalities functional and other are devoted numerous works (see [1, 3-7, 16-18, 25, 38, 73, 80, 82 84, 96, 114, 120, 137, 138]), in particular, monographs [13, 55, 92 124, 125, 135], where it is possible to find rich bibliography from it occasion. In other situations a necessity to equations solutions which possible to find only approximately. In connection with to these there are quite a bit problems, among which, in particular, important is necessity to estimate the errors of approaching to the solutions, economy of methods, comfort in machine realization adapted of used algorithms to the concrete problem and to accessible computing facilities. Development of modern computing facilities stimulates possibilities of expansion of classes problems, which are yelded to the approximations solutions - from one side, and with other - intensification of known researches and search of new approximations methods. As marks. Traoub [91], sometimes is succeeded to expose new properties of well known and, it would seem, exhaustively trained classic approximations methods even in scalar case.

At the decision of nonlinear problems and linear problems of high dimension with the use of many approximations methods - projection, difference etc. - addreses to iterative methods often is deciding mean in order to get a result witch is practically acceptable. Twosided iterative methods have advantages before other iterative methods, because they allow to cover the solutions by the fork formed by upper and lower approaches and get aposteriori simple and comfortable estimation of error for the solutions and to get some high-quality information about the behavior of solutions. These methods allowed to get assertions about the abandon of the proper equation, which can not be clear from other assertions about the abandon of equations. With different aspects of theory and applications of twosided iterative methods it is possible to get acquainted in [22, 24, 27, 36, 48, 49, 52-55, 92 123, 124, 125, 130, 131, 135].

Possibilities of the use of twosided methods are limited mostly because their stipulation needs certain assumpitions about monotonies and concaviti of operators which are not often confirmed in real terms. That is the certain obstacle to their use is that usually researches of these methods do not take into account related to practical realization of twosided algorithms factors, which can reduce to practical loss of the advantages of twosided methods assured by a theory in relation to twosided and monotony of iterations, and also in relation to the character of their convergense. We will mark that twosided operator inequalities are one of basic instruments for stipulatoon of twosided methods for operators equations as in general case so for the cases of differential integral, integro-differential, functional-differential and other classes of equations.

This monograph is devoted to construction and researches of convergense of twosided iterative methods for solutions with unmonotonous operators, to the study of influencing factors which guarantee saving properties of monotony and twosided of iterative and character of their convergense, and also theory of twosided classes of differential, integral and other operators inequalities.

In a book the results which belong to the authors entered mainly. These results were systematically reported at all-Ukrainian and international scientific conferences. Some of these investigations were the part of specialized courses, conducted by M. Kopach for students of mathematical specialities at the Precarpathian University named after V. Stefanyk. With other results those which have direct are resulted only attitude toward a subject which this book is devoted to. A monograph contains researches which are continuation of researches with [57] and with [101], and also with [99, 100, 102, 11] and [89]. This investigations are dedicated for two-sided methods of approaches and two-sided operator inequalities for nonmonotonic operators. The only exeptions is thirteen part, where one variant of iterative agregation method is investigated, convergence conditions of these methods are unknown and are investigated by another authers only for linear equations with positive operators (see [42]).

The list of literature resulted in a book include only insignificant part of works only which are up to to the select subject. Bibliography more detailed and more vast it is possible to find in [125], and also, for example, in [13, 49, 57, 92, 123, 133, 135].

The first section has an auxiliary character to basic part. The introduction and part I written by M.Kopach, parts II, III, IX, X and §§ 10, 12, 15, 17-20, 22, 24 were introduced by M.Kopach and B.Shuvar. Part V and §§ 11, 16, 21, 23 was written by B.Shuvar, parts XI, XII - by S.Mentynskyy and B.Shuvar and part XIII - by A.Obshta.

Authors beholden for valuable advices to the doctors of fizicomatematical sciences professors P.I.Kalenyuk and R.M.Tacij and for heavy labour with criticizing of monograph, to the participants of seminar of department of calculable mathematicians and programing of the National university "Lviv politehnica"scientific seminar of mathematical chairs of the Precarpathian University named after V. Stefanyk and also employees of this department for participation in discussion of results which entered in this book.

РОЗДІЛ І. ДОПОМІЖНІ ВІДОМОСТІ ПРО НАПІВУПОРЯДКОВАНІ ПРОСТОРИ І ОПЕРАТОРИ В НИХ

Створена у тридцяті роки Л. В. Канторовичем (див. [20, 29]) та іншими авторами (див., напр., бібліографію в [41, 42]) теорія частково упорядкованих просторів, зокрема, лінійних частково упорядкованих просторів, які називають напівупорядкованими просторами або – деколи – векторними гратками (див., напр., [28]), має численні застосування у різних галузях математики. З її використанням пов'язана теорія наближених методів та якісна теорія рівнянь. Маємо на увазі перш за все монотонні ітераційні процеси, в тому числі, так звані двосторонні ітераційні методи. В цьому розділі наводимо деякі найнеобхідніші для наступного викладу факти із теорії напівупорядкованих просторів, докладну інформацію щодо яких містять монографії [20, 28, 29]. Більшість із наведених понять можна знайти в [33] і [41], а також в [57].

§1. Напівупорядкованість

До важливих властивостей множини R^1 дійсних чисел належить її упорядкованість, яка означає, що для всяких двох дійсних чисел $x,\ y \in R^1$ має місце бодай одне із співвідношень $x < y$, $y < x$, $x = y$. Найпростіші ітераційні алгоритми для уточнення коренів скалярного рівняння

$$\varphi\left(x\right) = 0, \tag{1.1}$$

зокрема, метод поділу відрізка $[a; b]$, на якому локалізований корінь x^* рівняння (1.1), комбінований метод хорд і дотичних щодо обгрунтування істотно базуються на понятті упорядкованості R^1 (див., зокрема бібліографію в [91]).

Однак, більшість використовуваних в аналізі лінійних просторів, що узагальнюють R^1 щодо топологічних, зокрема, метричних властивостей, не є упорядкованими множинами. Зазначимо, що хоч декотрі з них можна упорядкувати і не одним способом, для практичного використання їх упорядкованість часто мало придатна, бо здебільшого її не вдається доцільно узгодити з метричними властивостями відповідних просторів та властивостей операторів. Тому доцільно користуватися поняттями напівупорядкованості та часткової упорядкованості.

Простий приклад на оправдання потреби запровадити поняття напівупорядкованості стосується того, що для двох дійсних функцій із спільною областю визначення трапляються ситуації, коли в декотрих точках одна з двох функцій набуває більших значень, а в інших – менших за значення іншої з них. Природно такі дві функції вважати непорівнюваними. Подібні ситуації трапляються й щодо інших об'єктів, наприклад, щодо числових послідовностей, щодо вектор-функцій, щодо матриць і т. п.

Далі будемо використовувати здебільшого поняття напівупорядкованості, не наголошуючи, що в декотрих випадках окремі результати допускають формулювання в термінах упорядкованих просторів.

Означення 1.1. *Множину M називають частково упорядкованою, якщо для деяких її елементів u та v означене співвідношення $<$, яке позначатимемо через "$u < v$" і читатимемо "u менше за v", з такими властивостями:*

а) *співвідношення $u < v$ означає неможливість співвідношень $u = v$ та $v < u$;*

б) *якщо $u < v$, $v < x$, то $u < x$.*

В цьому означенні не міститься жодних обмежень ані щодо потужності множини M, ані щодо дій та їх властивостей в M.

Поряд із записом $u < v$ вживатимемо запис $u \leq v$, який означає, що або $u < v$, або $u = v$. Зазначимо, що, наприклад, для дійсних функцій $u(t)$, $v(t)$ співвідношення $u \leq v$ означатиме, що $u(t) \leq v(t)$ у звичайному розумінні, тобто, що для кожного фіксованого $t = t_0$ маємо або $u(t_0) < v(t_0)$, або $u(t_0) = v(t_0)$. Для векторів $u, v \in R^N$ розмірності $N\,(N \leq \infty)$ нерівність $u \leq v$ означатиме, що $u_i \leq v_i$ $\left(i = \overline{1, N}\right)$; нерівність $u < v$ означатиме, що $u_i < v_i$ $\left(i = \overline{1, N}\right)$.

Якщо часткова упорядкованість в M, крім властивостей а) та б), має ще й ту властивість, що для всяких двох $u, v \in M$ справджується принаймні котресь одне із співвідношень $u < v$, $u = v$, $v < u$, то множину M називають упорядкованою. Упорядкованими є множина цілих чисел, множина дійсних чисел і т. п. Для N-вимірних векторних просторів упорядкованість можна запровадити багатьма способами. Однак для $N \geq 2$ задля практичних цілей здебільшого доцільніше користуватися поняттям часткової упорядкованості, бо упорядкованість для N-мірних векторів при $N \geq 2$ важко узгодити у більшості задач з реально використовуваними властивостями векторних просторів.

У частково упорядкованих просторах природним чином можна запровадити поняття обмеженості та інші пов'язані з ним поняття.

Означення 1.2. *Множину M_0 елементів із частково упорядкованої множини M називають обмеженою знизу, якщо знайдеться такий елемент $z \in M$, для якого із співвідношення $x \in M_0$ випливає $z \leq x$. Елемент z називають нижньою гранню множини M_0. Аналогічно, Z є верхньою гранню множини M_0, а множину M_0 називають обмеженою зверху, якщо для всякого елемента $x \in M_0$ маємо $x \leq Z$. Якщо множина M_0 обмежена знизу і зверху, то її називають обмеженою.*

Означення 1.3. *Якщо існує елемент $m_1 \in M$, який є нижньою гранню множини M_0, а для всякої нижньої грані z множини M_0 має місце співвідношення $z \geq m_1$, то m_1 називають точною нижньою гранню множини M_0 і позначають $m_1 = inf M_0$. Якщо $M_1 \in M_0$ є верхньою гранню множини M_0, а для всякої верхньої грані Z множини M_0 справджується співвідношення $M_1 \geq Z$, то M_1 називають точною верхньою гранню множини M_0 і позначають $M_1 = sup\, M_0$.*

Означення 1.4. *Якщо задані елементи $u, v \in M$, для яких маємо $u \leq v$, то сукупність всіх $x \in M$, для яких $u \leq x \leq v$, називають відрізком і позначають $[u, v]$.*

Означення 1.5. *Якщо для всяких двох елементів $x, y \in M$ частково упорядкованої множини M означені $\inf\{x, y\} \in M$ та $\sup\{x, y\} \in M$, то M називають структурою.*

Структурою є, наприклад, множина $C\,[0;\,1]$ неперервних на сегменті $[0;\,1]$ функцій, частково упорядкованих природним способом: $x \leq y \Leftrightarrow x(t) \leq y(t) \quad \forall t \in [0;\,1]$. Множина $C^1\,[0;\,1]$ неперервно диференційовних на $[0;\,1]$ функцій, частково упорядкованих природним способом, за якого співвідношення $x \leq y$ рівносильне парі співвідношень $x(t) \leq y(t)$ та $x'(t) \leq y'(t)$, не є структурою, бо функція $h(t) = \sup\{x(t), y(t)\}$ може не бути диференційовною і тоді рівність $h'(t) = \sup\{x'(t), y'(t)\}$ стає неможливою.

Поняття часткової упорядкованості E дозволяє розглядати також збіжність в E в розумінні топології, породженої частковою упорядкованістю.

Зупинимося докладніше на ситуації, коли частково упорядкована множина є лінійним простором.

Означення 1.6. *Напівупорядкованим простором називають такий лінійний простір E, у якому запроваджено часткову упорядкованість з аксіомами а) та б) із означення 1.1 і для якого, крім того, мають місце аксіоми:*

в) якщо $x \in E$ і $x \geq \theta$, де θ – нульовий елемент в E, то для всякого додатного дійсного числа λ матимемо $\lambda x \geq \theta$;

г) якщо $x \leq y$, $u \leq v$ $(x, y, u, v \in E)$, то $x + u \leq y + v$.

У напівупорядкованому просторі E відрізок $[u, v]$ є опуклою множиною.

Означення 1.7. *Напівупорядкований простір E називають K-лінеалом, якщо він є структурою. K-лінеал E називають архімедовим, якщо для всякого натурального n із співвідношень $x, y \in E$, $nx \leq y$ випливає, що $x \leq \theta$.*

Означення 1.8. *Нехай E є K-лінеалом. Для $x \in E$ означимо додатну x_+ і від'ємну x_- частини елемента x за допомогою рівностей*

$$x_+ = \sup\{x, \theta\}, \quad x_- = -\inf\{x, \theta\}.$$

Очевидно, що $x = x_+ - x_-$. Елемент $x_+ + x_- = |x|$ називають модулем елемента x.

K-лінеалами є, наприклад:

а) множина l_p $(p \geq 1)$ всіх числових послідовностей $x = \{x_n\}$, для яких $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, якщо $x \geq 0$ означає, що $x_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$;

б) множина $\mathrm{L}_p(a; b)$ $(p \geq 1)$ всіх дійсних вимірних функцій $x = x(t)$, заданих при $t \in [a; b]$, для яких $\int\limits_a^b |x(t)|^p \, dt < \infty$, з напівупорядкованістю, яка означає, що $x > 0$, якщо $x(t) \geq 0$ майже всюди, причому на множині додатної міри маємо $x(t) > 0$.

Всі скінченновимірні напівупорядковані простори є K-лінелами.

Означення 1.9. *Якщо E – банахів простір і цей простір є K-лінеалом з нормою $\|\cdot\|$, для якої нерівність $|x| \leq |y|$ призводить до нерівності $\|x\| \leq \|y\|$, то E називають напівупорядкованим банаховим простором. Тобто, напівупорядкованим банаховим простором називають банахів простір, який є K-лінеалом з монотонною нормою.*

Означення 1.10. *Напівупорядкований банахів простір E називають правильно напівупорядкованим, якщо всяка монотонна обмежена послідовність елементів з E має в E границю. Якщо всяка монотонна обмежена за нормою послідовність елементів з E має границю в E, то такий напівупорядкований банахів простір E називають цілком правильно упорядкованим.*

Всякий цілком правильно напівупорядкований простір є правильно напівупорядкованим. Правильно напівупорядкований простір не обов'язково є цілком правильно напівупорядкованим. Простори $\mathrm{L}_p[a, b]$ та l_p є цілком правильно напівупорядкованими. Всі скінченновимірні нормовані простори – цілком правильно напівупорядковані.

Простір $C[0;\ 1]$ неперервних на сегменті $[0;\ 1]$ функцій, а також простір M обмежених числових послідовностей є не тільки не цілком правильно напівупорядкованими, але не є і правильно напівупорядкованими. Наприклад, послідовність $x_n = t^n$ елементів із $C[0;\ 1]$ – монотонна і обмежена, але границі в $C[0;\ 1]$ не має, бо не збігається за нормою $\|x\| = \max\limits_{t\in[0,\ 1]} |x(t)|$ банахового простору $C[0;\ 1]$ до неперервної на $[0;\ 1]$ функції. У просторі M обмежених числових послідовностей не збігається за нормою $\|x\| = \sup\limits_i |x_i|$ цього простору, наприклад, монотонна обмежена послідовність $\{x_n\}$ елементів $\{x_n\} = \{x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,i}, \ldots\}$, у якій $x_{n,i} = \frac{n}{n+i}$.

Означення 1.11. *Замкнену множину $K \subset E$ елементів дійсного банахового простору E називають конусом, якщо задовольняються такі дві вимоги:*

1) *якщо α, β – дійсні невід'ємні числа і $x, y \in K$, то $\alpha x + \beta y \in K$;*

2) *якщо* $x \in K$, $x \neq \theta$, *то* $-x \notin K$.

Поняття конуса часто використовують (див. [41, 42]) для означення напівупорядкованості, приймаючи, що $u \leq v$, якщо $v - u \in \mathrm{K}$. У векторних просторах найпростішими прикладами конусів є множини векторів з невід'ємними координатами. В $C\,[a;b]$, $\mathrm{L}_p\,[a;b]$ конуси утворюють множини невід'ємних функцій. Тілесними називають конуси, які містять внутрішні елементи. У скінченновимірних векторних просторах конуси векторів з невід'ємними координатами є тілесними. Конус невід'ємних функцій в $C\,[a;b]$ – тілесний. Конус невід'ємних функцій в $\mathrm{L}_p\,[a;b]$ не є тілесним. У просторі E, з породженою тілесним конусом K напівупорядкованістю вживатимемо позначення $x << y$ у тому випадку, коли $y - x$ – внутрішній елемент конуса, зберігаючи позначення $x \leq y$ для ситуації, коли $y - x \in \mathrm{K}$.

У напівупорядкованих просторах часто можна запровадити узагальнену метрику, яку іноді називають псевдометрикою (див., напр. [33]); узагальнена метрика запроваджує поняття віддалі $\rho\,(x,y)$ між елементами x, y з деякого простору E_1 таким способом, що $\rho\,(x,y)$ є елементом напівупорядкованого простору E (див. [3]). У лінійних псевдометричних просторах можна запровадити також узагальнену норму. Наведемо означення простору, структурно-нормованого елементами деякого K-лінеалу, не користуючись при цьому поняттям псевдометрики.

Означення 1.12. *Дійсний лінійний простір, у якому всякому елементові* $x \in E$ *ставиться у відповідність невід'ємний елемент з K-лінеалу* N *(цей елемент позначимо через* $\|x\|$*) називають простором, структурно-нормованим елементами K-лінеалу* N*, якщо при цьому справджуються аксіоми норми у звичайному розумінні. Вживають у цій ситуації також термін:* N*-нормований простір.*

Збіжність в N-нормованому просторі означає, що для послідовності $\{x_n\}$ $(x_n \in E)$ елемент $x \in E$ є границею, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \theta_N$, де θ_N – нульовий елемент в N, а границю трактуємо у розумінні топології в N, породженої напівупорядкованістю, яку називають також (0)-збіжністю (див. [20, 28, 29], порівн. також [33]). Докладніший опис цих понять не наводимо, бо для основного викладу результатів використовуватимемо "звичайну" числову норму, залишаючи за рамками книги формулювання і обгрунтування отриманих результатів у загальніших термінах псевдометричних і структурно-нормованих просторів.

Якщо нормуючим K-лінеалом N є множина дійсних чисел R^1, то N-норма співпадає із звичайною нормою.

Скінченно-вимірні і нескінченно-вимірні векторні простори можна структурно нормувати, прийнявши $\|x\| = \{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$ $(n \le \infty)$, де $|x_i|$ – абсолютна величина координати x_i вектора $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

У просторах C та L_p неперервних та, відповідно, інтегровних із степенем p функцій $x(t)$ можна за N-норму $\|x\|$ взяти абсолютну величину $|x(t)|$ функції $x(t)$.

Простір E векторних функцій $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\}$ $(n \le \infty)$ можна структурно нормувати, наприклад, за допомогою однієї із формул:

$$\|x\| = \{|x_1(t)|, |x_2(t)|, \ldots, |x_n(t)|\},$$

$$\|x\| = \{\|x_1\|_0, \|x_2\|_0, \ldots, \|x_n\|_0\},$$

$$\|x\| = \|x(t)\|_1.$$

Тут $\|x_i\|_0$ – яка-небудь звичайна (числова) норма функції $x_i(t)$, залежно від того, у якому просторі розглядаємо функцію $x_i(t)$; не виключено при цьому, що $x_i(t)$, $x_j(t)$ при $i \ne j$ належать до різних функціональних просторів; $\|x\|_1$– яка-небудь норма вектора $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

В структурно-нормованих просторах можна також розглядати поняття фундаментальної послідовності і повноти простору.

§2. Оператори у напівупорядкованих просторах

Задамо дві довільні множини E_1 і E_2 та оператор $T : E_1 \to E_2$, тобто задамо правило T, за яким кожному елементові $x \in E_1$ ставимо у відповідність цілком визначений цим правилом елемент $y \in E_2$. Вважаючи, що в E_1 та в E_2 означені поняття збіжності у тому чи іншому розумінні, можна говорити про неперервність оператора T, яка означає, що із збіжності послідовності $\{x_n\}$ елементів з E_1 до $x \in E_1$ випливає збіжність послідовності $\{Tx_n\}$ елементів з E_2 до $Tx \in E_2$.

Під лінійністю оператора T розуміють таку властивість визначеного на E_1 або на лінійній підмножині D лінійного простору E_1 оператора T, що має місце рівність

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2$$

для будь-яких дійсних (або комплексних) чисел α, β.

Означення 2.1. *Якщо K – конус (додатних елементів) у напівупорядкованому просторі E і T– лінійний оператор, то додатність оператора T означає, що $TE \subseteq E$.*

Означення 2.2. *Якщо із співвідношення $x \leq y$ $(x, y \in E)$ випливає одне із співвідношень $Tx \leq Ty$ або $Ty \leq Tx$, то оператор T називають монотонним. Якщо при цьому маємо $Tx \leq Ty$, то говоритимемо, що T – ізотонний оператор, а також, що T – монотонно неспадний оператор; якщо ж з нерівності $x \leq y$ випливає, що $Ty \leq Tx$, то говорять, що T – антитонний або монотонно незростаючий оператор.*

У випадку лінійного оператора поняття ізотонності і додатності співпадають.

Означення 2.3. *Вживатимемо термін "гетеротонний оператор" для позначення тієї властивості, що оператор $T(x, y)$ не спадає щодо x, не зростає щодо y. Тобто, для гетеротонного оператора маємо, що із співвідношень $y \leq z$, $u \geq v$ $(y, z, u, v \in E)$ випливає нерівність $T(y, u) \leq T(z, v)$.*

Поняття гетеротонного оператора співпадає з поняттям ізотонного оператора, якщо $T(y, z)$ не залежить від z. Якщо $T(y, z)$ не залежить від y, то поняття гетеротонного оператора співпадає з поняттям антитонного оператора.

Зауважимо, що вивчення гетеротонних операторів можна звести формально до вивчення ізотонних операторів, запровадивши напівупорядкованість пар (y, z) $(y, z \in E)$ за правилом $(y, z) \leq (u, v)$, якщо $y \leq u$, $z \geq v$. Тоді можна вважати, що оператор $T_1\omega$ ізотонний щодо ω, де $T_1\omega = (T(\omega), T(\omega))$, $\omega = (y, z)$, $y, z \in E$. Проте часто надають перевагу викладу, у якому уникають такої заміни поняття гетеротонності поняттям монотонності (див., напр. [29, 33, 41, 57, 123]).

Якщо $A : E \to E$ – лінійний оператор, то за доволі загальних припущень його можна подати у вигляді різниці $A = A_1 - A_2$ двох лінійних додатних, отже, ізотонних операторів A_1 та A_2 (див. [20, 29]). Схожий результат можна отримати і для нелінійного оператора T в тому розумінні, що за деяких припущень його можна подати у вигляді різниці $T = T_1 - T_2$, де T_1, T_2 – ізотонні оператори.

Задля прикладу наводимо один результат П. Фолькмана [93].

Теорема 2.1. *(див. [93, теорема 3]). Нехай M – топологічний простір, E_1, E_2 – скінченно-вимірні банахові простори, напівупорядковані за допомогою тілесних конусів $\hat{E}_1 \subseteq E_1$, $\hat{E}_2 \subseteq E_2$. Нехай $f : M \times E_1 \to E_2$ – неперервна функція. Тоді існує неперервна функція*

$$F : M \times E_1 \times E_1 \to E_2,$$

для якої

$$F(\xi, x, x) = f(\xi, x), \quad \xi \in M, \quad x \in E_1 \tag{2.1}$$

і із співвідношень $y \le z$, $u \ge v$, $\xi \in M$, $y, z, u, v \in E_1$ випливає

$$F(\xi, y, u) \le F(\xi, z, v). \tag{2.2}$$

Зазначимо, що доведення теореми П.Фолькмана спирається на встановлену у тій самій роботі [93] лему, доведення якої пропонує й конструкцію для побудови функції F із теореми 2.1. Ця конструкція цілком базується на тому, що у випадку, коли N-мірний векторний простір R^N, напівупорядкований за допомогою конуса R^N_+, $f : M \times R^N \to R^1$ – неперервна функція, де M – топологічний простір,

$$R^N_+ = \left\{ x | \, x = \{x_1, \ldots, x_N\} \in R^N, x_1 \ge 0, \ldots, x_N \ge 0 \right\},$$

можна прийняти

$$F(\xi, y, z) = F_N(\xi, y_1, z_1, \ldots, y_N, z_N), (\xi \in M, y, z \in R^N), \tag{2.3}$$

де

$$F_0(\xi, x_1, \ldots, x_N) = f(\xi, x_1, \ldots, x_N),$$

$$F_k(\xi, y_1, z_1, \ldots, y_k, z_k, x_{k+1}, \ldots x_N) =$$
$$= \begin{cases} \min\limits_{y_k \le x_k \le z_k} F_{k-1}(\xi, y_1, z_1, \ldots, y_{k-1}, z_{k-1}, x_k, \ldots x_N), \\ \qquad\qquad \text{якщо } y_k \le z_k, \\ \max\limits_{y_k \le x_k \le z_k} F_{k-1}(\xi, y_1, z_1, \ldots, y_{k-1}, z_{k-1}, x_k, \ldots x_N), \\ \qquad\qquad \text{якщо } z_k \le y_k \qquad\qquad (k = \overline{1, N}). \end{cases}$$

В теорії різних класів рівнянь часто використовують властивість ліпшицієвості оператора T.

Означення 2.4. *Нехай – банахів простір. Якщо існує число $L>0$, для якого на множині $D \subseteq E$ має місце нерівність*

$$\|Tx - Ty\| \le L\,\|x - y\|\,(x, y \in D), \tag{2.4}$$

то оператор T називають ліпшицієвим оператором, а число L – константою Ліпшиця.

Замість числової норми $\|\cdot\|$ в означенні 2.4 можна використати N-норму $\|\cdot\|_N$. Тоді замість (2.4) матимемо нерівність $\|Tx - Ty\|_N \le L\,\|x - y\|_N$. Тут $L\omega$ – лінійний додатний оператор, що діє з N в N, де N є К-лінеалом, за допомогою якого структурно нормовано банахів простір Е. Оператор $L\omega$ вважаємо постійним, якщо він лінійно залежить тільки від ω.

В термінах напівупорядкованих просторів можна використовувати ліпшицієвість оператора T у дещо іншому формальному трактуванні.

Означення 2.5. *Нехай D – множина елементів напівупорядкованого простору E, на якій означені такі лінійні щодо $\omega \ge \theta$ (θ – нульовий елемент в E) оператори $L_1(y,z)\,\omega$, $L_2(y,z)\,\omega$ (які, взагалі кажучи, залежать від y, z нелінійно), що із співвідношень $y \le z$, $y, z \in D$ випливають співвідношення*

$$-L_1(y,z)(z-y) \le Tz - Ty \le L_2(y,z)(z-y), \tag{2.5}$$

то оператор T називають ліпшицієвим.

Якщо, зокрема, оператори $L_1(y,z)\,\omega$, $L_2(y,z)\,\omega$ обмежені при $y, z \in D$, а Е – банахів простір, то з означення 2.5 випливає ліпшицієвість оператора T за означенням 2.4. Правому операторові Ліпшиця $L_2(y,z)\,\omega$ і лівому операторові Ліпшиця – $L_1(y,z)\,\omega$

належить, як видно із викладу у наступних розділах, взагалі кажучи, неоднакова роль, наприклад, в теорії двосторонніх операторних нерівностей, у питаннях єдиності розв'язку рівняння $x = Tx$, у питаннях обгрунтування монотонності і двосторонності ітераційних процесів та їх збіжності. Тому оправданою є потреба розглядати односторонньо ліпшицієві оператори.

Будемо говорити про лівосторонню ліпшицієвість оператора T, якщо у попередньому означенні йдеться тільки про існування лінійного щодо ω оператора $L_1(y,z)\,\omega$, для якого із співвідношень $y \le z$, $y, z \in D$ випливає ліва з нерівностей (2.5), тобто

$$-L_1(y,z)\,(z-y) \le Tz - Ty. \tag{2.6}$$

Якщо в означенні 2.5 йдеться тільки про існування лінійного щодо ω оператора $L_2(y,z)\,\omega$, для якого із співвідношень $y \le z$, $y, z \in D$ випливає права з нерівностей (2.5), тобто

$$Tz - Ty \le L_2(y,z)\,(z-y)\,,$$

то говоритимемо про правосторонню ліпшицієвість оператора T. Зазначимо, що при обгрунтуванні монотонності і двосторонності деяких ітераційних процесів, наприклад, з правосторонньою ліпшицієвістю оператора T від оператора $L_2(y,z)\,\omega$ потрібно вимагати додатності його як лінійного оператора щодо ω, та неспадання щодо z і незростання щодо y. Для оцінки збіжності ітераційних процесів при цьому від оператора $L_1(y,z)\,\omega$ достатньо вимагати лише його обмеженості як лінійного оператора від ω при $y, z \in D$.

Відмітимо, що поняття односторонньої ліпшицієвості в теорії інтегральних нерівностей відоме як $L_1\,(L_2)$-умова М. В. Азбелєва [5,6], яку використовував також у теорії інтегральних нерівностей В. Вальтер [135]. Тому її деколи називають також W-умовою В.Вальтера. В обидвох випадках йдеться про ситуацію, коли оператори $L_1(y,z)\,\omega$ та $L_2(y,z)\,\omega$ є постійними, тобто, незалежними від y, z лінійними операторами щодо ω. В теорії двосторонніх методів одностороння ліпшицієвість з постійними щодо y, z лінійними щодо ω операторами $L_1(y,z)\,\omega = L_1\omega$, $L_2(y,z)\,\omega = L_2\omega$ відома також у зв'язку з дослідженнями Ю. В. Покорного [83], де оператори T, що задовольняють односторонню умову Ліпшиця, названі В-додатніми та В-монотонними (див. також [49]). Надалі дотримуватимемося терміну "одностороння ліпшицієвість" через формальну спорідненість цього поняття із звичайною ліпшицієвістю та через запроваджуване далі поняття часткової ліпшицієвості оператора T. Зазначимо також, що використання односторонньої ліпшицієвості з лівим оператором Ліпшиця $L_1(y,z)\,\omega$ та з правим оператором Ліпшиця $L_2(y,z)\,\omega$ дозволяє конструювати, зокрема, алгоритми, які називатимемо у наступних розділах аналогами методу Чаплигіна та аналогами монотонного методу Ньютона для рівняння вигляду $x = Tx$. При цьому оператор T може і не буди диференційовним. За певної структури операторів $L_1(y,z)\,\omega$ та $L_2(y,z)\,\omega$ ці алгоритми характеризуються надлінійною, зокрема, квадратичною збіжністю без постулювання диференційовності оператора T.

Означення 2.6. *Нехай на множині D елементів напівупорядкованого простору E означені лінійні щодо $\omega \geq \theta$ оператори $L_1(y,z)\,\omega$, $L_2(y,z)\,\omega$, для яких із співвідношень $y \leq z$, $y,z,x \in D$ випливають нерівності*

$$\begin{aligned} &-L_1(y,z)(z-y) \leq F(z,x) - F(y,x)\,, \\ &F(x,z) - F(x,y) \leq L_2(y,z)(z-y)\,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

де оператор $F(y,z) : D \times D \to E$ задовольняє рівність $F(x,x) = Tx$ $(x \in D)$. Тоді оператор F називатимемо частково ліпшицієвим.

Для частково ліпшицієвих операторів в наступних розділах побудовані аналоги двосторонніх методів Курпеля, які узагальнюють метод Чаплигіна. Для побудованих алгоритмів з недиференційовним оператором T можна отримати характерну для методу Курпеля квадратичну збіжність. У випадку односторонньої ліпшицієвості ці аналоги методу Курпеля перетворюються у згадані аналоги методу Чаплигіна.

Зауважимо, що приєднання до умов (2.7) додаткового припущення, що $T\theta = \theta$, перетворює означення правосторонньої ліпшицієвості в означення підлінійності оператора T в тому розумінні, у якому воно потрактоване М. С. Курпелем (див. [49]).

У наступних викладах термін "підлінійний оператор" будемо вживати в іншому розумінні. А саме: під підлінійним оператором в §10 розуміємо такий оператор F:E $\rightarrow E$ (E – банахів простір), для якого з нерівності $\|x\| \geq M$, де M – деяка константа, випливає нерівність

$$\|Fx\| \leq \|x\|. \tag{2.8}$$

Підлінійними у цьому трактуванні буде, зокрема, оператор F, для якого

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|Fx\|}{\|x\|} = \alpha < 1. \tag{2.9}$$

Випадок, коли в (2.9) маємо $\alpha = 0$, розглядався в [23, 40]. Умову (2.9) для $\alpha = 0$ задовольняє, наприклад, оператор, означений за допомогою формули

$$Fx = \int\limits_a^b K(t,s)\, x^{\gamma}(s)\, ds, (\gamma < 1)$$

з неперервним при $t, s \in [a;\, b]$ ядром $K(t,s)$.

Означення 2.7. *([95]). Оператор $Tx = T(t,x)$ називають оператором Вольтерра, якщо він означений для $t \in [a;\, b]$, $x = x(t) \in C(E, [a;\, b])$ і кожній функції $x(t)$ ставить у відповідність функцію, що набуває значення з E, причому з рівності $x_1(s) = x_2(s)$ при $s \in [a;\, b]$ випливає рівність $T(t,x_1) = T(t,x_2)$. Тут $[a;\, b]$ – відрізок в N-мірному дійсному векторному просторі R^N, $C(E, [a;\, b])$ – простір неперервних на $[a;\, b]$ функцій із значеннями в E. Позначення $C(E, [a;\, b])$ запозичене із [16, 17].*

В [57, 58] використовується також запроваджене в [58] поняття V_a-оператора, яке означає, що $T(a,x) = \theta$ для $\forall x \in E$.

Нехай, зокрема означені оператори $f(t,s,x)$, $h(t,s,y,z)$, $g(t,s,y,z,\omega)$ при $t, s \in [a;\, b]$, $y, z, \omega \in E$, які набувають значення з E і неперервні за сукупністю аргументів. Нехай також задані неперервні функції $\tau_i(\mathrm{s})\colon [a;\, b] \rightarrow R^N$, для яких $0 \leq \tau_i(\mathrm{s}) \leq \alpha < \infty$ $(i = 1,\ 2)$. Тоді означені за допомогою формул

$$F(t,x) = \int\limits_a^t f(t,s,x(s))\, ds,$$

$$H(t,x)=\int\limits_a^t h\left(t,s,x(s),x\left(s-\tau_1(s)\right)\right)ds,$$

$$G(t,x)=\int\limits_a^t g\left[t,s,x(s),x\left(s-\tau_1(s)\right),\int\limits_a^s h\left(s,\xi,x(\xi),x\left(\xi-\tau_2(\xi)\right)\right)d\xi\right]ds$$

оператори $F(t,x)$, $H(t,x)$, $G(t,x)$ є операторами Вольтера і V_a-операторами.

§3. Принципи нерухомої точки

Принципом нерухомої точки називають всяке твердження, яке за деяких припущень встановлює існування нерухомої точки оператора T, тобто існування розв'язку рівняння

$$x=Tx. \tag{3.1}$$

Одним з найвідоміших принципів нерухомої точки є банахів принцип стиску.

Означення 3.1. *Якщо на множині D банахового простору E справджується умова Ліпшиця (2.4) зі сталою $L<1$, то оператор T називають стискуючим оператором або стиском.*

Теорема 3.1 (принцип стиску Банаха). *Нехай T є оператором стиску на замкнутій множині D банахового простору E. Тоді оператор T має єдину нерухому точку в D.*

Ця теорема допускає узагальнення, наприклад, такого вигляду.

Теорема 3.2 *[43]. Нехай T $(TD\subseteq D)$ є оператором узагальненого стиску, тобто, для всяких $x,y\in D$ справджується нерівність*

$$\|Tx-Ty\|\le\varphi\left(\|x-y\|\right) \tag{3.2}$$

з дійсною неперервною неспадною функцією $\varphi(t)$, для якої при всякому $t\in(0;b]$ маємо $\varphi(t)<t$, де b – діаметр обмеженої замкненої множини D банахового простору E. Тоді існує єдина в D нерухома точка x^* оператора T.

Умови теореми 3.2 та її часткового випадку – теореми 3.1. забезпечують збіжність до єдиного розв'язку $x^* \in D$ рівняння (3.1) послідовних наближень

$$x_{n+1} = Tx_n (n = 0, 1, \ldots) \tag{3.3}$$

з усяким стартовим наближенням $x_0 \in D$. При цьому справджуються оцінки

$$\|x_n - x^*\| \le \varphi_n \left(\|x_0 - x^*\|\right),$$

де $\varphi_0 \left(c\right) = c, \quad \varphi_k \left(c\right) = \varphi \left(\varphi_{k-1} \left(c\right)\right), (k = 1,\, 2,\, \ldots)$.

Якщо маємо додатково, що

$$\|x_1 - x_0\| \le b - \varphi \left(b\right),$$

то можна отримати також оцінку

$$\|x_n - x^*\| \le \varphi_n \left(m\right), \tag{3.4}$$

де $m = m \left(\varphi_1 \left(\|x_1 - x_0\|\right)\right)$ – верхній на $[0; b]$ розв'язок рівняння $x = \varphi \left(x\right) + \|x_1 - x_0\|$. Для теореми 3.1. оцінка (3.4) перетворюється в оцінку

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{L^n}{1 - L} \|x_1 - x_0\|.$$

В обидвох теоремах зберігаються їх твердження, якщо вимагати, щоб умови (3.1) та (3.2) справджувалися для оператора T^m замість T, де $m \ge 1$ – натуральне число.

Якщо A є лінійним оператором, що діє у банаховому просторі E, спектральний радіус $\rho \left(A\right)$ якого, означений за допомогою формули

$$\rho \left(A\right) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|},$$

задовольняє нерівність

$$\rho \left(A\right) < 1, \tag{3.5}$$

то цього достатньо для існування єдиної нерухомої точки $x^* \in E$ оператора $Tx = f + Ax$ за довільного $f \in E$. При цьому до x^* збігається послідовність $\{x_n\}$, утворена за допомогою методу послідовних наближень

$$x_{n+1} = f + Ax_n (n = 0, 1 \ldots,) \tag{3.6}$$

з початковим наближенням $x_0 \in E$.

Означення 3.2. *Множину D банахового простору E називають компактною, якщо всяка нескінченна підмножина множини M містить збіжну послідовність.*

Можна довести, що у банаховому просторі компактна множина обмежена за нормою.

Компактність множини D є одним з основних припущень іншого принципу нерухомої точки – принципу Шаудера.

Теорема 3.3 (принцип Шаудера). *Нехай: 1) неперервний оператор T перетворює опуклу замкнену множину D банахового простору E в D; 2) множина значень TD оператора T є компактною. Тоді оператор T має в D бодай одну нерухому точку.*

Умови теореми 3.3 не забезпечують, взагалі кажучи, єдиності нерухомої точки.

Застосування принципу Шаудера грунтується на використанні зручних критеріїв компактності. В просторі C неперервних функції задля цього часто використовують відому лему Арчела (див., напр. [94]) .

Наведемо одне твердження про існування нерухомої точки оператора, що діє у напівупорядкованому просторі E, яке ґрунтується на принципі Шаудера.

Теорема 3.4 *[57]. Нехай заданий гетеротонний неперервний оператор $T(y, z) : D \times D \to E$, для якого: 1) $T(x, x) = Tx$, де D – опукла замкнена множина в напівупорядкованому просторі E; 2) задані елементи $u_0, v_0 \in D$, $u_0 \leq v_0$ такі, що елементи u_1, v_1, отримані за допомогою формул*

$$u_{n+1} = T(u_n, v_n), \quad v_{n+1} = T(v_n, u_n), (n = 0,\, 1,\, \ldots) \tag{3.7}$$

при $n = 0$, задовольняють співвідношення

$$u_0 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0. \tag{3.8}$$

Тоді оператор $T(x, x)$ перетворює відрізки $D_n = [u_n, v_n]$ в себе. Якщо при цьому множина TD_n значень оператора T для кожного

$n = 0, 1, \ldots$ компактна, то рівняння (3.1) має на $[u_0, v_0]$ бодай один розв'язок x^*, для якого при кожному $n = 0,\ 1,\ \ldots$ маємо $x^* \in D_n$.

Дещо докладніше зупинимося на аналізі методу послідовних наближень (3.6) для лінійного рівняння

$$x = Ax + f. \tag{3.9}$$

Як зазначалося, збіжність ітераційного процесу (3.6) до єдиного розв'язку x^* рівняння (3.9) за всякого початкового наближення $x_0 \in E$ гарантована за умови (3.5). Умова (3.5) є "майже необхідною" для збіжності процесу (3.6) до розв'язку $x^* \in E$ рівняння (3.9) за припущення, що за початкове наближення можна взяти всякий елемент $x_0 \in E$. Точніше, має місце таке твердження.

Теорема 3.5 *[42]. Якщо послідовність (3.6) за всяких $f \in E$, $x_0 \in E$ збігається до розв'язку $x^* \in E$ рівняння (3.9), то $\rho(A) \le 1$.*

За довільного вибору $x_0 \in E$ та умови $\rho(A) > 1$ ітерації (3.6), взагалі кажучи, не збігаються до розв'язку рівняння (3.9). Однак спеціальний вибір x_0 може спричинити збіжність ітерацій (3.6) до розв'язку рівняння (3.9) нерідко і тоді, коли $\rho(A) > 1$. На підтвердження цього наведемо простий приклад.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} x &= 2x + 3y - 130, \\ y &= 1,92x + 2y - 202 \end{aligned} \tag{3.10}$$

має очевидний розв'язок $x = 100$, $y = 10$. Власними числами матриці $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1,92 & 2 \end{pmatrix}$ є числа $\lambda_1 = 4,4$, $\lambda_2 = -0,4$. Для її спектрального радіуса $\rho(A)$ маємо $\rho(A) = 4,4 > 1$. Виберемо x_0, y_0 таким способом, щоб

$$4x_0 + 5y_0 = \frac{4b_1 + 5b_2}{1 - \lambda_1} = 450, \tag{3.11}$$

де $b_1 = -130$, $b_2 = -202$. Задля конкретності приймемо, наприклад, $x_0 = \frac{-130}{1-4,4}$, $y_0 = \frac{-202}{1-4,4}$. Безпосередні обчислення за формулами (3.6) для $n = 7$, наприклад, дають такий результат: $x_7 = 100,06366$, $y_7 = 9,88741$. Отже, незважаючи на те, що $\rho(A) = 4,4 > 1$, ітераційний процес (3.10) дозволяє уточнювати наближення до розв'язку системи (3.11). Як виявляється, ця ситуація спричинена саме вибором початкового наближення (x_0, y_0) із спеціальної множини, описаної рівністю (3.11), а також тим, що $|\lambda_2| = 0,4 < 1$. Власне число $|\lambda_2|$ характеризує збіжність ітерацій за вибору (x_0, y_0) за (3.11). Зазначимо додатково, що за цієї ситуації ітераційний процес (3.6) чисельно нестійкий. Це видно з того, що практично починаючи з $n = 8$, отримуємо $x_8 = 99,78555$, $y_8 = 9,89320$; $x_9 = 99,25070$, $y_9 = 9,37480$. Проте докладніший аналіз дає змогу з'ясувати причини такого погіршення ситуації і виявити способи, як уникнути цього. Справа в тому, що рівність (3.11) можна подати у вигляді

$$(\varphi_1, \tilde{x}) = \frac{(\varphi_1, b)}{1 - \lambda_1}, \ \ \tilde{x} = \{x, y\}\,, \, b = \{b_1, b_2\}\,, \tag{3.12}$$

де $\varphi_1 = (4; 5)$ – власний вектор матриці $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1,92 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, спряженої до матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1,92 & 2 \end{pmatrix}$ системи (3.10). Причому φ_1 відповідає найбільшому за абсолютною величиною власному числові $\rho(A) = |\lambda_1| = 4,4$ матриці A. Мають місце такі факти: а) розв'язок $\tilde{x}^*$ системи (3.10) належить до множини E_0 двомірних векторів $\tilde{x} = \{x, y\}$, описаних рівністю (3.12); б) якщо початкове наближення $\tilde{x}_0 = \{x_0, y_0\} \in E_0$, то $\tilde{x}_n \in E_0$; збіжність ітераційного процесу (3.6) для системи (3.10) гарантує те, що $|\lambda_2| = 0,4 < 1$. Можна переконатися, що внесення поправок в обчислення таким способом, щоб рівність (3.12) не порушувалася, дозволяє запобігти порушенню чисельної стійкості процесу.

Можна навести ще тривіальніший приклад. Йдеться про одне скалярне рівняння $x = ax + b$, де a, b – дійсні числа. Якщо $\rho(A) = |a| \neq 1$, $x_0 = \frac{b}{1-a}$, то ітерації $x_{n+1} = ax_n + b$ збігаються до розв'язку $x^* = \frac{b}{1-a}$ як при $|a| < 1$, так і при $|a| > 1$.

Наведені приклади ілюструють ситуацію, коли нерухома точка x^* оператора T не є притягуючою в $D \subseteq E$, але існує така підмножина E_0 множини D, у якій ця нерухома точка є притягуючою.

Розглянемо рівняння (3.1) із, взагалі кажучи, нелінійним оператором $T : D \to E$. Будемо припускати, що справджуються такі умови.

А. *Задана замкнена підмножина* E_0 *елементів із замкненої* *множини $D \subseteq E$, де E – банахів простір, така що із включення $x \in E_0$ випливає $y = Tx \in E_0$.*

Б. *Означений такий оператор $G : D \to E$, що припущення $x \in E_0$ призводить до рівності $Gx = \theta$, де θ – нульовий елемент в E.*

В. *Оператор H, означений за допомогою рівності $Hx = Tx - Gx (x \in D)$, на множині E_0 задовольняє умову Ліпшиця*

$$\|Hx - Hy\| \leq Q \|x - y\| \, (x, y \in E_0),$$

причому $Q < 1$.

Задля зручності будемо говорити у цьому випадку, що оператор T є G-стиском на множині E_0, якщо справджуються умови А-В.

Теорема 3.6. *Якщо $x \in E_0$ і оператор T є G-стиском на множині E_0, то оператор T має єдину в E_0 нерухому точку x^*, до якої збігається ітераційний процес (3.6). Ця збіжність не повільніша за збіжність геометричної прогресії із знаменником Q.*

Аналоги цієї теореми для лінійного рівняння (3.9) містять дещо конструктивніші формулювання. Вважатимемо, що E – банахів простір, лінійний оператор $A : E \to E$ такий, що справджуються такі аналоги умов А-В.

$А_1$. *Задана замкнена підмножина $E_0 \subseteq E$, для якої при $x \in E_0$ матимемо*

$$y = Ax + b \in E_0 (b \in E).$$

$Б_1$. *Означений лінійний оператор $G : E \to E$ та елемент $a \in E$, для яких*

$$Gx = a, \quad \text{якщо} \quad x \in E_0.$$

$В_1$. *Спектральний радіус $\rho(H)$ оператора $H = A - G$ менший за одиницю.*

Теорема 3.7. *Для всякого $x_0 \in E_0$ з умов A_1–B_1 випливає збіжність ітераційного процесу (3.6) до єдиного в E розв'язку x^* рівняння (3.9). При цьому $x^* \in E_0$.*

Зауважимо, що при $\rho(H) < 1$ та $\rho(A) > 1$ теоретична збіжність може виявитися чисельно нестійкою. Однак можна переконатися, що при $x_0 \in E_0$ матимемо $x_n \in E_0$ для кожного $n = 0, 1, \ldots$ Цим фактом можна скористатися для практичного корегування результатів обчислень, викликаних похибками заокруглень, нагромадження яких при $\rho(A) > 1$ може практично порушити теоретично гарантоване включення $x_n \in E_0$.

Якщо відоме найбільше за модулем власне число $\lambda \neq 1$ спряженого до A оператора A^* та відповідний йому власний вектор оператора A^*, тобто

$$A^*\varphi = \lambda\varphi,$$

то приймемо за E_0 множину тих $x \in E$, для яких має місце рівність

$$(\varphi, x) = \frac{(\varphi_1, b)}{1 - \lambda},$$

де через (φ, x) позначаємо лінійний функціонал φ на елементах $x \in E$. Якщо $\psi \in E$ – фіксований елемент з E, то оператор Gx означимо за формулою

$$Gx = \psi\,(\varphi, x)\,(x \in E).$$

Конструкція множини E_0 і оператора G дозволяє усунути вплив на збіжність ітерацій (3.6) власного числа $\lambda = \lambda_1$. Якщо для всіх інших власних значень λ_i матимемо $|\lambda_i| \leq Q < 1$, то оператор G задовольняє постульовані теоремою 3.7 вимоги.

Усунути вплив кількох власних чисел оператора A можна за допомогою складніших конструкцій для оператора G і множини початкових наближень E_0. В основі таких конструкцій лежать міркування, що певною мірою близькі до наведених.

Теореми 3.6 та 3.7 є частиною результатів, які стосуються дослідження мало вивчених (див. [42]) агрегаційно-ітеративних методів. Точніше, теореми 3.6 та 3.7 є винятковими випадками загальних результатів для тої ситуації, коли однопараметричні агрегаційно-ітеративні алгоритми вироджуються до звичайного методу послідовних наближень.

Для оператора A, власні числа якого задовольняють нерівності

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq \ldots \tag{3.13}$$

за припущення, що для A справджується спектральне зображення, можна отримати збіжний процес і при $|\lambda_1| > 1$, якщо водночас

$|\lambda_2| < 1$. Якщо ж $|\lambda_1| < 1$, можна отримати результати, які характеризують прискорення збіжності за допомогою відношення $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|$.

РОЗДІЛ II. ДЕЯКІ СПОСОБИ ДВОСТОРОННЬОЇ АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ

Двосторонні методи наближення до розв'язків операторних рівнянь деколи називають методами чаплигінського типу, оскільки одним з найвідоміших прикладів двосторонніх методів є знаменитий метод Чаплигіна. Задля зручності в тексті далі говоритимемо про методи чаплигінського типу для таких двосторонніх ітераційних алгоритмів, для яких підтверджуються найхарактерніші риси самого методу Чаплигіна – двосторонність апроксимації розв'язків та квадратична швидкість збіжності ітераційного процесу. З цього погляду двосторонні ітераційні методи з лінійною збіжністю не вважатимемо методами чаплигінського типу. Монотонний аналог методу Ньютона теж не будемо вважати методом чаплигінського типу, бо він, маючи надлінійний характер збіжності, не може бути двостороннім. Маючи на увазі зроблений 1969 року М.С.Курпелем [44] (див. також [46, 49, 57]) принциповий крок щодо побудови двосторонніх методів на основі методу Чаплигіна (зі збереженням двосторонності і квадратичного характеру збіжності) для рівнянь з неопуклими операторами, будемо говорити про методи Курпеля, коли йдеться про методи чаплигінського типу для рівнянь з неопуклими операторами. В цьому розділі наводимо деякі результати про двосторонні способи наближення до розв'язків операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах (див. [20, 33, 41, 57, 62, 63, 79, 101, 123, 125]).

§4. Двосторонні ітераційні методи

Ітераційні методи часто є неминучим етапом реалізації інших наближених методів. Це стосується в першу чергу нелінійних задач та лінійних задач великої розмірності, що виникають при використанні математичних моделей прикладних наук. Велика кількість наукових публікацій щодо теорії і практики використання різноманітних ітераційних методів зумовлена двома факторами – простотою обчислювальних схем і зручністю їх пристосування до сучасних обчислювальних засобів – з одного боку, та тим, що нерідко саме ітераційні алгоритми виявляються єдино спроможним засобом довести "до числа" ту чи інші задачу – з другого боку. Незважаючи на значний історичний вік їх дослідження і застосування, навіть для одного скалярного рівняння порівняно недавно опублікована монографія Дж. Трауба [100], в основному присвячена саме скалярному рівнянню $\varphi(x) = 0$, містить результати, "більшість з яких є новими і раніше не були опублікованими" (див. [91, Предисловие]). Принагідно відмітимо спорідненість ідей із [91] та ідей монографії А. Островського (див. також бібліографію в [91]).

Двосторонні ітераційні методи вирізняються з-поміж інших ітераційних методів двома ознаками. Перша з них стосується того, що на кожному кроці ітераційного процесу шуканий розв'язок охоплюється вилкою – парою верхнього і нижнього наближень. Друга з них означає, що послідовність нижніх наближень монотонно зростає, а послідовність верхніх наближень монотонно спадає (щодо номера ітерації). Ці два фактори спричинюють можливість на кожному кроці ітераційного процесу отримувати зручну апостеріорну оцінку похибки наближень. З іншого боку монотонність нижніх і верхніх ітерацій гарантує покращення наближень із зростанням номера ітерації.

Проте використання зазначених переваг двосторонніх наближених методів наштовхується на відомі труднощі. Труднощі теоретичного характеру викликані тим, що обгрунтування таких алгоритмів вимагає від відповідних операторів специфічних властивостей, зокрема, їх монотонності й опуклості. Оператори, що трапляються в більшості математичних задач, не часто мають потрібні властивості. Це істотно обмежує класи задач, до яких можна застосувати двосторонні методи.

Найпростішим прикладом двостороннього методу апроксимації кореня скалярного рівняння $\varphi(x) = 0$ є метод поділу навпіл відрізка $[a; b]$, на якому цей корінь локалізовано. Іншим прикладом двостороннього методу для цього рівняння можна вважати комбінований метод хорд і дотичних.

Розглянемо лінійне рівняння вигляду

$$x = Ax + b. \tag{4.1}$$

в напівупорядкованому банаховому просторі E.

Теорема 4.1. *Нехай спектральний радіус* $\rho(A)$ *оператора* A *менший за одиницю і цей оператор ізотонний, тобто, з нерівності* $u \leq v$ *випливає, що* $Au \leq Av$. *Якщо* y_0, y_1 *задовольняють співвідношення*

$$y_{n+1} = Ay_n + b \tag{4.2}$$

при $n = 0$ *і, крім того,* $y_0 \leq y_1$, *то справджуються співвідношення*

$$y_n \leq y_{n+1} \leq x^*(n = 0,\, 1,\, \ldots) \tag{4.3}$$

для единого в E *розв'язку* x^* *рівняння (4.1). При цьому* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x^*$. *Якщо замість нерівності* $y_0 \leq y_1$ *маємо* $y_0 \geq y_1$, *то зберігаються всі твердження із заміною нерівностей (4.3) нерівностями* $x^* \leq y_{n+1} \leq y_n$ $(n = 0,\, 1,\, \ldots)$.

Об'єднання обидвох частин теореми можна подати у такому вигляді.

Теорема 4.1'. *Нехай спектральний радіус* $\rho(A)$ *оператора* A *менший за одиницю і цей оператор ізотонний. Якщо для* y_0, y_1, z_0, z_1, *що задовольняють співвідношення*

$$y_{n+1} = Ay_n + b, \quad z_{n+1} = Az_n + b, \tag{4.4}$$

для $n = 0$, *справджуються нерівності*

$$y_0 \leq y_1 \leq z_1 \leq z_0, \tag{4.5}$$

то послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *утворені за формулами (4.4), збігаються до единого розв'язку* $x^* \in E$ *рівняння (4.1) і мають місце співвідношення*

$$y_n \leq y_{n+1} \leq x^* \leq z_{n+1} \leq z_n (n = 0,\, 1,\, \ldots). \tag{4.6}$$

Для немонотонного лінійного оператора A часто можна скористатися з того, що його можна подати у вигляді різниці $A = A_1 - A_2$ двох ізотонних (додатних) операторів. Наприклад, у випадку $A = \{a_{ij}\}, i, j = \overline{1, N}$, можна прийняти

$$a_{ij}^1 = \begin{cases} a_{ij}, & a_{ij} \geq 0, \\ 0, & a_{ij} < 0, \end{cases} \qquad a_{ij}^2 = \begin{cases} 0, & a_{ij} \geq 0, \\ -a_{ij}, & a_{ij} < 0, \end{cases}$$

$$A_1 = \left\{a_{ij}^1\right\}, i,j = \overline{1,N}, \quad A_2 = \left\{a_{ij}^2\right\}, i,j = \overline{1,N}.$$

Теорема 4.2. *Нехай спектральний радіус $\rho(A_1 + A_2) = \rho(|A|)$ оператора $|A| = A_1 + A_2$ менший за одиницю. Розглянемо ітераційний алгоритм*

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = A_1 y_n - A_2 z_n + b, \\ &z_{n+1} = A_1 z_n - A_2 y_n + b, \quad (n = 0,\, 1,\, \ldots). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Якщо для y_0, y_1, z_0, z_1, які задовольняють (4.7) при $n = 0$, справджуються співвідношення (4.5), то послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, утворені за допомогою формул (4.7), збігаються до єдиного в E розв'язку x^* і мають місце співвідношення (4.6).

Подібно виглядає ситуація у нелінійному випадку. Опишемо задля прикладу ситуацію, яка стосується одного загального способу побудови двосторонніх наближень. Цей спосіб досліджений в [57] і належить М. С. Курпелю.

Нехай $E_1 = \{x|\, a \le x \le b,\, a, b, x \in E\}$ – відрізок у правильно частково упорядкованому просторі E. Припускатимемо, що оператори $T_1(p,q,y,z)$, $T_2(p,q,y,z) : E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1 \to E_1$ задовольняють припущення

$$T_1(x,x,x,x) \le Fx \le T_2(x,x,x,x) \tag{4.8}$$

і розглянемо рівняння

$$x = Fx. \tag{4.9}$$

Будемо вважати, що справджуються такі умови.

А. *Якщо $p, q, y, z \in E$, то $T_1(p,q,y,z) \le T_2(p,q,y,z)$.*

Б. *Оператори $T_1(p,q,y,z)$ не спадають щодо p, y, не зростають щодо q, z і неперервні за сукупністю аргументів.*

Приймемо

$$y_0 = a,\ z_0 = b \tag{4.10}$$

і розглянемо ітераційний процес

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = T_1(y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n), \\ &z_{n+1} = T_2(z_{n+1}, y_{n+1}, z_n, y_n) \quad (n = 0,\, 1,\, \ldots). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Означення 4.1. *Розв'язок* (y^*, z^*) *системи рівнянь*

$$\begin{aligned} y &= F_1(y, z), \\ z &= F_2(z, y) \end{aligned} \tag{4.12}$$

називають крайнім в деякій множині D *напівупорядкованого простору* E, *якщо для всякого іншого розв'язку* $(y, z)\,(y, z \in D)$ *цієї системи справджуються нерівності*

$$y^* \leq y \leq z^*, \quad y^* \leq z \leq z^*. \tag{4.13}$$

Поняття крайнього розв'язку, запроваджене М. С. Курпелем (див. [49, 57]), близьке до поняття мінімаксного розв'язку В.Лакшмікантама [123]. В рамках наведеного щойно означення крайній розв'язок М.С.Курпеля співпадає з мінімаксним розв'язком В. Лакшмікантама, якщо оператори F_1 та F_2 співпадають на D × D.

У випадку, коли $F_1(y, z)$ та $F_2(y, z)$ не залежать від z матимемо $F_1(y) = F_2(y) = Fy$, й тому компоненти y^* та z^* співпадають відповідно з нижнім та верхніми розв'язками рівняння (4.9).

Теорема 4.3 *[57]. Якщо справджуються умови А та Б, то при кожному* $n = 0, 1, \ldots$ *існує крайній на відрізку* $[y_n; z_n]$ *розв'язок* $(y_{n+1}; z_{n+1})$ *системи (4.11). Послідовності* $\{y_n\}$ *та* $\{z_n\}$, *побудовані за допомогою ітераційного процесу (4.10), (4.11), збігаються відповідно до компонент* y^* *та* z^* *крайнього на* $[a; b]$ *розв'язку* $(y^*; z^*)$ *системи рівнянь*

$$\begin{aligned} y &= T_1(y, z, y, z), \\ z &= T_2(z, y, z, y) \end{aligned} \tag{4.14}$$

і справджуються співвідношення

$$y_n \leq y_{n+1} \leq y^* \leq x \leq z^* \leq z_{n+1} \leq z_n \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{4.15}$$

для всякого розв'язку $x \in [a; b]$ *рівняння (4.8).*

Обгрунтування теореми 4.3 наведене в [57, стор. 58-61].

Припустимо тепер, що справджуються такі умови.

A_1. *При* $x \in E_1$ *співвідношення (4.8) є рівностями, тобто*

$$T_1(x, x, x, x) = Fx = T_2(x, x, x, x)$$

і при цьому справджується умова А.

Б$_1$. *Оператори* $T_1^k(p,q,y,z)$, $T_2^k(p,q,y,z)$, *утворені за допомогою рекурентних формул*

$$\begin{aligned} &T_i^1(p,q,y,z) = T_i(p,q,y,z) \quad (i=1,2)\,.\\ &T_1^j(p,q,y,z) = T_1\left(p,q,T_1^{j-1}(p,q,y,z)\,,T_2^{j-1}(q,p,z,y)\right),\\ &T_2^j(p,q,y,z) = T_2\left(p,q,T_2^{j-1}(p,q,y,z)\,,T_1^{j-1}(q,p,z,y)\right)\end{aligned} \tag{4.16}$$

при $j = 2,3,...,k$, *де* k *– фіксоване натуральне число, не спадають щодо* p, y, *не зростають щодо* q, z *і неперервні за сукупністю аргументів. Іншими словами, умова* $Б_1$ *означає, що умову* $Б$ *задовольняють оператори* $T_i^k(p,q,y,z)$, *побудовані за формулами (4.16).*

Теорема *4.4 [57]. Якщо справджуються умови* $А_1$, $Б_1$, *то правдиві всі твердження теореми 4.3 із заміною операторів* T_1, T_2 *операторами* T_1^k, T_2^k. *Зокрема, ітераційний процес (4.11) треба замінити процесом*

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = T_1^k(y_{n+1},z_{n+1},y_n,z_n)\,,\\ &z_{n+1} = T_2^k(z_{n+1},y_{n+1},z_n,y_n)\,, \quad (n=0,\,1,\,\ldots). \end{aligned} \tag{4.17}$$

а систему (4.14) системою

$$\begin{aligned} &y = T_1^k(y,z,y,z)\,,\\ &z = T_2^k(z,y,z,y)\,. \end{aligned}$$

Зазначимо, що за одночасного виконання умов А, Б та А$_1$, Б$_1$, ітераційний процес (4.17) збігається, взагалі кажучи, швидше за процес (4.11), що також доведено в [57, §10].

Нехай напівупорядкований простір E є метричним простором. Віддаль між елементами $x,y \in E$ позначатимемо через $d(x,y)$. Постулюємо такі вимоги.

В. *Задана неперервна неспадна щодо кожної із змінних функція* $h(t,s) : [0,d_0] \times [0,d_0]$, *де* $d_0 = d(a;b)$, *для якої* $h(d_0,d_0) \le d_0$.

Г. *З нерівностей* $y \le z$, $u \le v$ $(y,z,u,v \in E)$ *випливають нерівності*

$$d\left(T_2(z,y,v,u)\,,T_1(y,z,u,v)\right) \le h\left(d(y,z)\,,d(u,v)\right). \tag{4.18}$$

Позначимо

$$d_n = d\left(y_n, z_n\right).$$

Теорема 4.5. *Якщо справджуються умови А-В, то для ітераційного процесу (4.10), (4.11) мають місце оцінки*

$$d_n \leq t^*_{k,n}\left(d_0\right) \leq t^*_{k,n-1}\left(d_0\right), \tag{4.19}$$

де $t^*_{k,p}\left(d_0\right)$ *– верхній на сегменті* $[0, d_0]$ *розв'язок рівняння*

$$t = h_k\left(t, d_{p-1}\right).$$

Відмітимо, що такі ж оцінки можна отримати і для ітераційного процесу (4.10), (4.17), якщо (4.18) замінити операторами T_2^k, T_1^k оператори T_2, T_1 відповідно.

Якщо, зокрема, функція $h\left(t, s\right)$ має вигляд

$$h\left(t, s\right) = g + Kt + Ls,$$

то нерівність (4.18) можна подати у вигляді

$$d\left(T_2\left(z, y, v, u\right), T_1\left(y, z, u, v\right)\right) \leq g + Kd\left(y, z\right) + Ld\left(u, v\right).$$

Позначивши,

$$A_k = \sum_{j=0}^{k-1} L^j K, \quad g_k = \left(1 - A_k\right)^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} L^j g, \quad \Lambda_k = \left(1 - A_k\right)^{-1} L^k$$

і припускаючи, що ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_k^i$$

збігається, можна отримати

$$d_n \leq g_k + \Lambda_k d_{n-1} \leq \Lambda_k^{n-p} d_p + \sum_{i=0}^{n-p-1} \Lambda_k g_k.$$

Докладніший аналіз ітераційних процесів (4.10), (4.11) та (4.10), (4.17) приведено в [49, 57].

Зауважимо ще, що умови А-Г справджуються, наприклад, у тому випадку, коли оператор F має вигляд $F = F_1 + F_2$ і існують оператори $L, N : E_1 \to E_1$, для яких співвідношення $x \leq y$, $x, y \in E_1$ спричинюють нерівності

$$-Ly + Lx \leq F_1 y - F_1 x \leq Ly - Lx,$$

$$-Ny + Nx \leq F_2 y - F_2 x \leq Ny - Nx.$$

В такому разі можна прийняти

$$\begin{aligned} &T_1(p, q, y, z) = T_2(p, q, y, z) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(F_1 p + Lp + F_1 q - L_1 q + F_2 y + Ny + F_2 z - Nz\right). \end{aligned}$$

Очевидно, що

$$T_i(x, x, x, x) = Fx \quad (i = 1, 2).$$

В наступних параграфах зупинимося дещо докладніше на окремих двосторонніх методах, які використовують спеціальні конструкції ітераційних формул (4.11), враховуючи, що дослідження їх доцільніше подати, не вдаючись до загальних схем, наведених вище.

§5. Прискорення збіжності двосторонніх методів

Прискорення збіжності числових послідовностей є давньою задачею, що сягає робіт Е. Куммера (див. [49, стор. 60]). Один з найвідоміших способів прискорення збіжності числових послідовностей грунтується на δ^2-перетворенні Айткена (див. [49, 91]) і його узагальненні – перетворенні Шенкса. Відому методику Л. А. Люстерника для послідовності $\{x_n\}$ елементів банахового простору Е можна асоціювати з перетворення Айткена

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+1} x_{n-1} - x_n^2}{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}} \tag{5.1}$$

для числової послідовності $\{x_n\}$ за формальною схожістю формул (див. [42, стор. 122])

$$y_{n+1} = \frac{f\left(x_{n+1} - x_n\right) x_n - f\left(x_n - x_{n-1}\right) x_{n+1}}{f\left(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}\right)}, \tag{5.2}$$

де f – який-небудь лінійний функціонал, що приймає ненульові значення на власному векторові оператора A, який відповідає власному значенню $\lambda_0 \approx \frac{f(x_{n+1}-x_n)}{f(x_n-x_{n-1})}$. Тут A – лінійний оператор, який фігурує у рівнянні

$$x = Ax + b, \tag{5.3}$$

послідовність $\{x_n\}$ побудована за формулами

$$x_{n+1} = Ax_n + b \quad (x_0 \in E)\,. \tag{5.4}$$

Способи прискорення збіжності двосторонніх ітераційних методів у багатьох випадках теж грунтується на ідеях перетворення Айткена. Це стосується, зокрема, методики, використаної у дослідженнях Ю.Альбрехта, Л.Колатца, Й.Шмідта (див. [49]). Інший, запропонований В.Я.Стеценком (див. [41]) підхід до прискорення збіжності процесів для лінійного рівняння (5.3) як з монотонним, так і з немонотонним оператором A, досліджувався також в [49, 57]. Опишемо докладніше цей підхід, дотримуючись прийнятої в [57, §16] схеми, у застосуванні до лінійного рівняння вигляду

$$Lx = f \tag{5.5}$$

з лінійним оператором $L : E \to E$, де E – правильно напівупорядкований простір. Вважатимемо, що оператор L можна подати у вигляді

$$L = G + H - M + N, \tag{5.6}$$

де $G, H, M, N : E \to E$ – лінійні неперервні оператори, причому M, N – додатні оператори.

Лема 5.1 *[57, теорема 16.1]. Нехай: 1) задані додатні елементи $u_0, v_0 \in E$, $u_0 \le v_0$, для яких*

$$\begin{aligned} &(G - M)\, u_0 + (H + N)\, v_0 \le f,\\ &(G - M)\, v_0 + (H + N)\, u_0 \ge f; \end{aligned} \tag{5.7}$$

2) для всяких $u_n, v_n \in E$ *система рівнянь*

$$\begin{aligned} Gu_{n+1} + Hv_{n+1} &= Mu_n - Nv_n + f, \\ Gv_{n+1} + Hu_{n+1} &= Mv_n - Nu_n = f \end{aligned} \tag{5.8}$$

має розв'язок (u_{n+1}, v_{n+1})*; 3) з нерівностей*

$$Gy - Hz \geq \theta,\ Gz - Hy \leq \theta,$$

де θ *– нульовий елемент в* E*, випливають нерівності* $y \geq \theta$*,* $z \geq \theta$*. Тоді існує розв'язок* $x^* \in E$ *рівняння (5.5), причому послідовності* $\{u_n\}$*,* $\{v_n\}$ *збігаються до границь відповідно* $u, v \in E$ *і* $x^* = \frac{1}{2}(u+v)$*, а також правдиві співвідношення*

$$u_n \leq u_{n+1} \leq u \leq x^* \leq v \leq v_{n+1} \leq v_n \quad (n = 0,\, 1,\, \ldots)\,. \tag{5.9}$$

Теорема 5.1 *[57, теорема 16.2]. Нехай: 1) справджуються умови леми 5.1; 2) задане дійсне число* $\beta_0 \in [0;\, 1]$*, для якого*

$$\begin{aligned} u_1 - u_0 &\geq \beta_0 \left(v_0 - v_1\right), \\ v_1 - v_0 &\geq \beta_0 \left(u_1 - u_0\right). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Тоді справджуються співвідношення

$$u_1 \leq y_1 \leq x^* \leq z_1 \leq v_1,$$

де

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + \tfrac{\beta_0}{1+\beta_0}\left(v_1 - u_1\right), \\ z_1 &= v_1 + \tfrac{\beta_0}{1+\beta_0}\left(v_1 - u_1\right). \end{aligned}$$

Прийнявши $[y_1, z_1]$ за новий стартовий відрізок замість $[u_0, v_0]$, цей процес можна продовжити, якщо існує таке β_1, що для нових $u_0 = y_1$, $v_0 = z_1$ і нових u_1, v_1, утворених за формулами (5.8), матимемо співвідношення (5.10) з β_1 замість β_0.

Наведемо ще деякі зауваження Дж. Трауба [91], обмежившись випадком числової послідовності $\{x_n\}$. Нехай послідовність $\{x_n\}$ збігається до $\alpha \in \mathrm{R}^1$. Позначимо $t_n = x_n - \alpha$. Якщо $t_{n+1} = Kt_n$, то для $|K| < 1$ ($K \in \mathrm{R}^1$) говорять про геометричну збіжність, резервуючи термін “лінійна збіжність” для ситуації, коли $t_{n+1} = |K + \sigma_n|\, t_n$ для $|K| < 1$ і $\sigma_n \to \theta$. Дж. Траубом [91, стор. 218] встановлено, що для перетворення Ейткена за припущення, що

$$\sigma_n = w_n t_n, \quad w_n \to w,$$

матимемо

$$\frac{\tau_n}{t_n^2} \to \frac{wK}{K-1}, \tag{5.11}$$

де

$$\tau_n = \frac{t_{n+1}t_{n-1} - t_n^2}{t_{n+1} - 2t_n + t_{n-1}}.$$

В тому випадку, коли

$$x_{n+1} = \varphi\left(x_n\right) = \alpha + \varphi'\left(\alpha\right) t_n + \tfrac{1}{2}\varphi''\left(\xi_n\right) t_n^2,$$

причому $|\varphi'\left(\alpha\right)| < 1$, φ'' – неперервна, можна прийняти $K = \varphi'\left(\alpha\right)$, $w_n = \frac{1}{2}\varphi''\left(\xi_n\right)$. Тоді (5.11) матиме вигляд

$$\frac{\tau_n}{t_n^2} = \frac{1}{2}\frac{\varphi''\left(\alpha\right)\varphi'\left(\alpha\right)}{\varphi'\left(\alpha\right) - 1}.$$

Зазначимо, що, як відмічено Дж. Траубом [91, стор. 219], δ^2-перетворення Ейткена не призводить до прискорення збіжності послідовностей з квадратичною збіжністю. Щодо перетворень Шенкса m-го порядку, які розглядають δ^2-перетворення Ейткена як окремий випадок з $m = 2$, можна зробити подібне зауваження про те, що перетворення Шенкса прискорює збіжність послідовності x_n, якщо її швидкість збіжності $K < m$.

§6. Аналоги принципу Тарського про нерухому точку

Теорема про нерухому точку монотонного оператора, яка належить А. Тарському (див. [20]) і відома також як принцип нерухомої точки Біркгофа-Тарського (див. також [20]), узагальнена М.С.Курпелем [47] на випадок рівняння з гетеротонним оператором вигляду

$$x = T\left(x, x\right). \tag{6.1}$$

Тобто, йдеться про ситуацію, коли у рівнянні

$$x = Fx \tag{6.2}$$

оператор Fx можна подати у вигляді

$$Fx = T\,(x, x) \tag{6.3}$$

таким способом, що оператор $T\,(y, z)$ не спадає щодо y, не зростає щодо z. Сформулюємо спочатку саму теорему Тарського.

Теорема 6.1 *(А. Тарського, [20]). Нехай E – повна структура, $F{:}E \to E$, причому оператор F – ізотонний, тобто, нерівність $y \le z$ призводить до нерівності $Fy \le Fz$. Тоді рівняння (6.2) має бодай один розв'язок.*

Доведення цієї теореми можна знайти в [20].

Наступні дві теореми є аналогами теореми А. Тарського для рівняння (6.2) з односторонньо ліпшицієвим оператором F. Вважатимемо надалі E повною структурою.

Теорема 6.2. *Нехай: 1) оператор F має властивість лівосторонньої ліпшицієвості, тобто існує лінійний додатній щодо w оператор $A_1\,(y, z)\,w$, для якого з нерівності $y \le z$ випливає нерівність*

$$-A_1\,(z, y)\,(z - y) \le Fz - Fy, \tag{6.4}$$

причому оператор $A_1\,(y, z)\,w$ не спадає щодо y, не зростає щодо z при $w \ge \theta$, де θ – нульовий елемент в E, і оператори

$$\begin{aligned} F_1\,(u, v) &= -A_1\,(v, u)\,(v - u) + Fu, \\ F_2\,(u, v) &= \quad A_1\,(u, v)\,(u - v) + Fu \end{aligned} \tag{6.5}$$

діють з $E \times E$ в E; 2) якщо система рівнянь

$$\begin{aligned} y &= -A_1\,(z, y)\,(z - y) + Fy, \\ z &= \quad A_1\,(z, y)\,(z - y) + Fz \end{aligned} \tag{6.6}$$

має розв'язок (y, z), то (y, y) та (z, z) також є розв'язками цієї системи. Тоді існує принаймні один розв'язок рівняння (6.2).

Доведення. Позначимо через E_1 та E_2 множини елементів u та v відповідно, які задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} u &\le -A_1\,(v, u)\,(v - u) + Fu, \\ v &\ge \quad A_1\,(v, u)\,(v - u) + Fv. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Множини E_1, E_2 – непорожні, бо найменший елемент a структури E та найбільший її елемент b задовольняють (6.7) при $u = a$, $v = b$. Повнота структури E призводить до висновку про існування елементів $y_0 = \sup E_1$, $z_0 = \inf E_2$, $y_0, z_0 \in E$. Оскільки очевидно, що оператори $F_1(y,z)$, $F_2(y,z)$, означені за допомогою (6.5), не спадають щодо y, не зростають щодо z, то

$$\begin{aligned} y_0 &\le -A_1(z_0,y_0)(z_0-y_0)+Fy_0=u_0,\\ z_0 &\ge \quad A_1(z_0,y_0)(z_0-y_0)+Fz_0=v_0. \end{aligned}$$

Тому $u_0 \in E_1$, $v_0 \in E_2$. З другого боку, зважаючи на те, що $y_0 = \sup E_1$, $z_0 = \inf E_2$, маємо $y_0 \ge u_0$, $z_0 \le v_0$. Звідси робимо висновок, що $y_0 = u_0$, $z_0 = v_0$, тобто, що пара (y_0, z_0) є розв'язком системи (6.6). На підставі умови 2) маємо, що y_0 та z_0 є розв'язками рівняння (6.2). Теорему доведено.

Схожий результат отримується для рівняння (6.2) з правосторонньо ліпшицієвим оператором F.

Теорема 6.3. *Нехай: 1) існує правосторонній оператор Ліпшиця $A_2(y,z)$, лінійний додатній щодо w, неспадний щодо y, незростаючий щодо z, для якого з нерівності $y \le z$ випливає нерівність*

$$Fz - Fy \le A_2(z,y)(z-y),$$

причому оператори

$$\begin{aligned} F_3(u,v) &= -A_2(v,u)(v-u)+Fu,\\ F_4(u,v) &= \quad A_2(u,v)(u-v)+Fu \end{aligned}$$

діють з $E \times E$ в E; 2) якщо існує розв'язок (y,z) системи

$$\begin{aligned} y &= -A_2(z,y)(z-y)+Fz,\\ z &= \quad A_2(z,y)(z-y)+Fy, \end{aligned}$$

то (y,y) та (z,z) також є розв'язками цієї системи. Тоді існує принаймні один розв'язок рівняння (6.2).

Обидві щойно наведені теореми, а також теорема 6.1, є частковими випадками загальнішої теореми для рівняння (6.1) з частково ліпшицієвим оператором $T(y,z)$. Задля формальної зручності щодо порівняння з відповідною теоремою М.С.Курпеля із [47], будемо вважати, що маємо два оператори $T_1(y,z)\,,\, T_2(y,z) \,:\, E\times E \to E$, для яких замість (6.3) маємо рівності

$$T_1(x,x) = T(x,x) = T_2(x,x)\,. \tag{6.8}$$

Теорема 6.4. *Нехай: 1) задані лінійні неперервні додатні щодо w, неспадні щодо y, незростаючі щодо z при $w \geq \theta$ оператори $A_1(y,z)\,w$, $A_2(y,z)\,w$, для яких з нерівності $y \leq z$ випливають нерівності*

$$\begin{aligned} &-A_1(z,y)(z-y) \leq T_1(z,x) - T_1(y,x)\,,\\ &T_2(x,z) - T_2(x,y) \leq A_2(z,y)(z-y)\,, \end{aligned} \tag{6.9}$$

причому оператори

$$\begin{aligned} F_5(u,v) &= -\left(A_1(v,u) + A_2(v,u)\right)(v-u) + T_1(u,v)\,,\\ F_6(u,v) &= \quad \left(A_1(u,v) + A_2(u,v)\right)(v-u) + T_2(u,v)\,, \end{aligned} \tag{6.10}$$

діють з $E\times E$ в E; 2) якщо (y,z) є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{aligned} y &= -\left(A_1(z,y) + A_2(z,y)\right)(z-y) + T_1(y,z)\,,\\ z &= \quad \left(A_1(z,y) + A_2(z,y)\right)(z-y) + T_2(z,y)\,, \end{aligned} \tag{6.11}$$

то (y,y) та (z,z) також є розв'язками цієї системи. Тоді існує принаймні один розв'язок рівняння (6.2).

Доведення. Знову позначимо відповідно через E_3 та E_4 множини таких елементів u та v, які задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} u &\leq -\left(A_1(v,u) + A_2(v,u)\right)(v-u) + T_1(u,v)\,,\\ v &\geq \quad \left(A_1(v,u) + A_2(v,u)\right)(v-u) + T_2(v,u)\,. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Ці множини непорожні, бо елементи $u=a$, $v=b$, де a і b є відповідно найменшим і найбільшим елементами структури E, задовольняють (6.12). Оскільки E – повна структура, то $y_0 = \sup E_3$, $z_0 = \inf E_4$ існують і $y_0, z_0 \in E$. Можна переконатися, що оператори $F_5(u,v)$, $F_6(u,v)$, означені за допомогою формул (6.10), не спадають щодо u, не зростають щодо v. Тому справджуються співвідношення

$$\begin{aligned} y_0 &\leq -\left(A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0)\right)(z_0-y_0) + T_1(y_0,z_0) = u_0,\\ z_0 &\geq \quad \left(A_1(z_0,y_0) + A_0(z_0,y_0)\right)(z_0-y_0) + T_2(z_0,y_0) = v_0. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Отже, $u_0 \in E_3$, $v_0 \in E_4$. З другого боку, оскільки $y_0 = \sup E_3$, $z_0 = \inf E_4$, то

$$\begin{aligned} y_0 &\geq -\left(A_1\left(z_0, y_0\right) + A_2\left(z_0, y_0\right)\right)\left(z_0 - y_0\right) + T_1\left(y_0, z_0\right) = u_0, \\ z_0 &\leq \quad \left(A_1\left(z_5, y_0\right) + A_2\left(z_0, y_0\right)\right)\left(z_0 - y_0\right) + T_5\left(z_0, y_0\right) = v_0. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Порівнюючи (6.13) і (6.14), матимемо, таким чином, що $y_0 = u_0$, $z_0 = v_0$, тобто, що (y_0, z_0) є розв'язком системи (6.11). Умова 2) означає, що маємо також рівності

$$y_0 = T_1\left(y_0, y_0\right)$$

та

$$z_0 = T_2\left(z_0, z_0\right).$$

Беручи до уваги (6.1) і (6.8), можна стверджувати, що теорему доведено.

Зазначимо, що в [47] наведені деякі достатні умови відсутності у систем вигляду (6.3) і (6.11) розв'язків відмінних від (y, y)

Теорема 3.2 як за формулюванням так і за способом доведення близька до теореми М.С.Курпеля із [47], яку можна отримати і як частковий випадок з теореми 6.4 за припущення, що A_1 та A_2 є нульовими операторами.

Теорема 6.5 *(М.С.Курпеля, див. [47, теорема 1]). Нехай: 1) з нерівностей* $y \leq z$, $u \leq v$ *випливають нерівності* $T_i\left(y, v\right) \leq T_i\left(z, u\right)$ $\left(i = 1,\ 2\right)$*; 2) якщо система рівнянь*

$$\begin{aligned} y &= T_1\left(y, z\right), \\ z &= T_2\left(z, y\right) \end{aligned}$$

має розв'язок (y, z), *то* (y, y) *та* (z, z) *є також її розв'язками. Тоді рівняння (6.1) має принаймні один розв'язок.*

РОЗДІЛ III. МЕТОДИ ЧАПЛИГІНСЬКОГО ТИПУ

Відомо чимало спроб розширити можливості застосування двостороннього методу С.А.Чаплигіна [97], який, як встановив Н.Н.Лузін [60], має квадратичну швидкість збіжності, характерну за певних припущень також для основного варіанту методу Ньютона, часто вживаного і з теоретичною метою і для практичних обчислень. Зазначимо, що в монографії [91], де докладно проаналізовано метод Ньютона, встановлено, що основний його варіант навіть для скалярного рівняння може мати тільки лінійну швидкість збіжності, а квадратична швидкість збіжності цього методу характерна для випадку, коли йдеться про апроксимацію кореня першої кратності. В цьому розділі досліджені, зокрема, варіанти методу Чаплигіна, в яких у лінеаризованій частині для відшукання наступних ітерацій використовуються оператори, які можуть не бути похідними від заданого оператора, не виключаючи ситуації, коли відповідний оператор не є диференційовним. Встановлені умови, які за цієї ситуації зберігають найважливіші властивості методу Чаплигіна – двосторонність і монотонність ітерацій та квадратичну збіжність. Ці алгоритми, які називаємо аналогами методу Чаплигіна, можна розглядати як засіб врахування збурень у відповідних лінеаризованих доданках задля збереження двосторонності і монотонності та квадратичної збіжності ітерацій, коли потрібно, наприклад, враховувати похибки заокруглень. Результати цього розділу можна розглядати як продовження досліджень із [57].

§7. Метод Чаплигіна

З-поміж наближених методів розв'язування рівняння $f(x) = 0$ з дійсною функцією f можна вирізнити алгоритми, які дають змогу отримувати пари наближень y та z, що охоплюють знизу і зверху вилкою шуканий розв'язок x^* так, що $y \leq x^* \leq z$. Серед ітераційних методів цю властивість мають, наприклад, метод поділу навпіл відрізка $[a; b]$, на якому локалізовано корінь x^*, та так званий комбінований метод хорд і дотичних. Жодних обмежень щодо монотонності або опуклості $f(x)$ метод поділу відрізка навпіл, взагалі кажучи, не потребує. При використанні комбінованого методу хорд і дотичних вигідно вимагати, щоб $f(x)$ була монотонною і випуклою функцією принаймні для близьких від x^* значень x. Схожий спосіб побудови двосторонніх наближень до розв'язку диференціального рівняння вигляду

$$x' = f(t, x) \tag{7.1}$$

з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0 \tag{7.2}$$

запропонував 1918 року С. О. Чаплигін [97] (див. також [81, 87]). Суть методу Чаплигіна у застосуванні до звичайних диференціальних рівнянь вигляду (7.1) зводиться до наступного. Вважатимемо заданими – у одному з двох основних варіантів методу – неперервно диференційовні функції $u(t)$, $v(t)$, для яких при $t = t_0$ маємо

$$u(t_0) = v(t_0) = x_0, \tag{7.3}$$

а при $t \geq t_0$ справджуються нерівності

$$u'(t) \leq f(t, u(t)), \; v'(t) \geq f(t, v(t)), \tag{7.4}$$

з яких за певних обставин випливають нерівності

$$u(t) \leq x^*(t) \leq v(t) \quad (t \in [t_0, t_0 + T], \; T > 0), \tag{7.5}$$

для неперервно диференційовного розв'язку $x^*(t)$ задачі (7.1), (7.2). Перший з основних варіантів методу Чаплигіна можна описати за допомогою формул

$$y_0(t) = u(t), \quad z_0(t) = v(t), \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned} y'_{n+1}(t) &= \tfrac{\partial f(t, y_n(t))}{\partial x}\left(y_{n+1}(t) - y_n(t)\right) + f(t, y_n(t)), \\ z'_{n+1}(t) &= \tfrac{f(t, z_n(t)) - f(t, y_n(t))}{z_n(t) - y_n(t)}\left(z_{n+1}(t) - z_n(t)\right) + f(t, z_n(t)), \end{aligned} \tag{7.7}$$

$$y_{n+1}(t_0) = z_{n+1}(t_0) = x_0. \tag{7.8}$$

В разі, коли існує друга похідна $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, обґрунтування цього алгоритму забезпечується постулюванням знакосталості $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0$.

Інші можливі варіанти методу Чаплигіна теж використовують припущення про опуклість або вгнутість $f(t,x)$ щодо x. Зокрема, у другому варіанті методу, який отримується заміною формул (7.7) формулами

$$\begin{aligned} y'_{n+1}(t) &= \tfrac{\partial f(t,y_n(t))}{\partial x}\left(z_{n+1}(t) - z_n(t)\right) + f(t,z_n(t)), \\ z'_{n+1}(t) &= \tfrac{f(t,z_n(t)) - f(t,y_n(t))}{z_n(t) - y_n(t)}\left(y_{n+1}(t) - y_n(t)\right) + f(t,y_n(t)), \end{aligned} \tag{7.9}$$

для його обґрунтування серед інших припущень потрібно – за існування другої похідної $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ – вимагати, щоб $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \le 0$.
Методові Чаплигіна властиві дві привабливі риси. Перша з них – можливість побудови двох монотонних послідовностей $\{y_n(t)\}$ та $\{z_n(t)\}$, які на кожному кроці ітераційного процесу утворюють вилку для шуканого розв'язку $x^*(t)$ задачі (7.1), (7.2), тобто.

$$y_n(t) \le y_{n+1}(t) \le x^*(t) \le z_{n+1}(t) \le z_n(t) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{7.10}$$

Друга з них – квадратичний характер збіжності методу, що можна описати за допомогою оцінки вигляду

$$z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t) \le C\left(z_n(t) - y_n(t)\right)^2 \qquad (C = const). \tag{7.11}$$

Метод Чаплигіна можна трактувати як алгоритм, який у застосуванні до рівняння

$$x = Fx \tag{7.12}$$

походить від елементарного методу хорд і дотичних для випадку скалярного рівняння вигляду (7.12).

Будемо вважати, що для оператора $F : \mathrm{E}_0 \to \mathrm{E}$, де E_0 – відрізок $[a;b]$ у напівупорядкованому просторі Е, існує неперервна щодо x похідна $F'(x)\,w$ при $x \in [a;b]$, яка є лінійним неперервним оператором щодо w при $w \in [\theta; b-a]$, де θ – нульовий елемент в Е. Нехай, крім того, заданий неперервний лінійний додатній щодо $w \in [\theta; b-a]$, неперервний щодо $y, z \in \mathrm{E}_0$ оператор $\alpha(y,z)\,w$. Приймемо

$$y_0 = a, \quad z_0 = b \tag{7.13}$$

і визначатимемо при кожному $n = 0,\ 1,\ \ldots$ елементи $y_{n+1},\ z_{n+1}$ як розв'язки пари рівнянь

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = F'(y_n)(y_{n+1} - y_n) + Fy_n, \\ &z_{n+1} = (F'(y_n) + \alpha(y_n, z_n))(z_{n+1} - z_n) + Fz_n. \end{aligned} \tag{7.14}$$

За певних обставин цей ітераційний процес породжує співвідношення

$$y_n \le y_{n+1} \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{7.15}$$

Для з'ясування цих обставин припускатимемо, що нерівності (7.15) мають місце для $n = 0$, тобто, що

$$y_0 \le y_1 \le z_1 \le z_0. \tag{7.16}$$

Тоді для $n = 1$ можна знайти

$$\begin{aligned} &y_2 - y_1 = Fy_1 - Fy_0 + F'(y_1)(y_2 - y_1) - F'(y_0)(y_1 - y_0), \\ &z_1 - z_2 = Fz_0 - Fz_1 + (F'(y_1) + \alpha(y_1, z_1))(z_1 - z_2) - \\ &- (F'(y_0) + \alpha(y_0, z_0))(z_0 - z_1). \end{aligned}$$

Беручи до уваги (7.13), бачимо, що за припущення про правдивість нерівностей

$$\begin{aligned} &Fy_1 - Fy_0 - F'(y_0)(y_1 - y_0) \ge \theta, \\ &Fz_0 - Fz_1 - (F'(y_0) + \alpha(y_0, z_0))(z_0 - z_1) \ge \theta \end{aligned} \tag{7.17}$$

оператори $F'(y)\,w$ та $(F'(y) + \alpha(y, z))\,w$ повинні бути такими, щоб з кожної з нерівностей

$$\begin{aligned} &w \ge F'(y)\,w, \\ &w \ge (F'(y) + \alpha(y, z))\,w \end{aligned} \tag{7.18}$$

випливала нерівність $w \ge \theta$. Для цього достатньо, наприклад, щоб: а) *оператори $F'(y)\,w$, $(F'(y) + \alpha(y, z))\,w$ були операторами стиску як лінійні оператори щодо w при $w \in [\theta; b - a]$, $y, z \in [a; b]$; б) при $y, z \in [a; b]$ оператори $F'(y)\,w$, $(F'(y) + \alpha(y, z))\,w$ як лінійні оператори щодо w є додатними неперервними при $w \in [\theta; b - a]$, $y, z \in [a; b]$.* Зазначені вимоги а) та б) є типовими для теорем про операторні нерівності. Дещо складнішою видається ситуація щодо з'ясування природи умов, які гарантують нерівності (7.17). Спрощує цю ситуацію припущення, що існує лінійний щодо w оператор $F_0(y,z)\,w$, для якого з нерівності $y \le z \quad (y, z \in [a,b])$ випливає нерівність

$$Fz - Fy \ge F_0(y,z)\,(z-y)\,. \tag{7.19}$$

За диференційовності F нерівність (7.19) забезпечує (7.17), якщо

$$F_0(y,z)\,w \ge F'(y)\,(z-y)\,, \tag{7.20}$$

$$F_0(y,z)\,w \ge \bigl(F'(y) + \alpha(y,z)\bigr)\,w \tag{7.21}$$

при $w \in [\theta, b-a]$, $y, z \in [a,b]$.

Описаний факт неявно використаний в [57, §14] і – докладніше – в [101]. Використання його призводить до конструювання аналогів методу Чаплигіна, у яких оператор F з рівняння (7.12) не конче мусить бути диференційовним і які водночас можуть мати надлінійну, зокрема, квадратичну швидкість збіжності.

Зазначимо, що, наприклад, у випадку, коли y, z є числами або дійсними функціями, можна прийняти

$$F'(y) + \alpha(y,z) = \frac{Fz - Fy}{z - y}.$$

В такому разі алгоритм (7.13), (7.14) співпадає з одним із первісних варіантів методу Чаплигіна (див. [97, 81]).

Подібним способом можна проаналізувати й другий основний варіант первісного методу Чаплигіна, який – за використання вжитих вище позначень – можна описати за допомогою формул

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = F'(z_n)\,(z_{n+1} - z_n) + Fz_n, \\ &z_{n+1} = (F'(z_n) + \alpha(y_n, z_n))\,(y_{n+1} - y_n) + Fy_n \end{aligned} \tag{7.22}$$

замість формул (7.14), котрі описують перший основний варіант методу Чаплигіна.

Як одну з різновидностей алгоритму (7.14) можна отримати при $\alpha(y,z) = 0$ алгоритм, який описується формулами

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = F'(y_n)\,(y_{n+1} - y_n) + Fy_n, \\ &z_{n+1} = F'(y_n)\,(z_{n+1} - z_n) + Fz_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Подібним способом алгоритм

$$y_{n+1} = F'(z_n)(z_{n+1} - z_n) + Fz_n,$$
$$z_{n+1} = F'(z_n)(y_{n+1} - y_n) + Fy_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{7.24}$$

можна отримати, скориставшись з формул (7.22). Алгоритми, в основі яких лежать формули (7.23) та (7.24), теж називають методами Чаплигіна (див., напр., [49, 57]). Ці алгоритми досліджувалися багатьма авторами (див. також [11, 12, 63, 62, 81, 87, 125]).

Використання методу Чаплигіна обмежена через істотні його вади. По- перше, обгрунтування методу Чаплигіна потребує певних припущень щодо монотонності та опуклості відповідних операторів, що нечасто трапляється у практичних задачах. По-друге, як і для методу Ньютона, для більшості класів рівнянь лінеаризовані рівняння вдається розв'язати точно лише у виняткових випадках. По-третє, навіть якщо вдається отримати явні вирази для y_{n+1} та z_{n+1}, як це, наприклад, маємо при застосуванні методу Чаплигіна до звичайних диференціальних рівнянь, то практична реалізація квадратур потребує використання тих чи інших обчислювальних процедур. Перераховані фактори можуть звести нанівець переваги методу Чаплигіна перед іншими методами апроксимації розв'язків тих чи інших класів рівнянь.

З цього погляду менше клопоту завдає, наприклад, звичайний метод послідовних наближень $x_{n+1} = Fx_n$ до розв'язку рівняння $x = Fx$, яке розглядають, наприклад, у банаховому просторі E. Якщо при цьому банахів простір E – напівупорядкований, а оператор F – монотонний (зокрема, ізотонний), то з існування таких $u, v \in$ E, що $u \leq v$, $u \leq Fu$, $v \geq Fv$, та з існування розв'язку $x^* \in [u, v]$ рівняння $x = Fx$ можуть випливати співвідношення $y_n \leq y_{n+1} \leq x^* \leq z_{n+1} \leq z_n$, де $y_{n+1} = Fy_n$, $z_{n+1} = Fz_n$, $y_0 = u$, $z_0 = v$. Однак практична придатність такого алгоритму теж істотно обмежена як вимогою про монотонність F так і, здебільшого, надто повільним характером збіжності.

Зацікавленість двосторонніми методами спонукали як сама поява методу Чаплигіна так і – особливо – виявлена Н.Н.Лузіним квадратична швидкість збіжності первісного варіанту методу Чаплигіна. Намагання уникнути обмежень щодо монотонності та опуклості відповідних операторів призвели до фундаментальних досліджень основних варіантів методу Чаплигіна та до появи його аналогів у працях В. Кваде [127], Б. Н. Бабкіна [8, 9], а також досліджень А. Н. Балуєва [11, 12], С. Н. Слугіна [87] і низки інших праць (див., напр., бібліографію в [125]). Аналоги методу Чаплигіна, запропоновані В. Кваде та Б. Н. Бабкіним, усуваючи припущення про монотонність та опуклість відповідних операторів, призводять водночас до втрати цими алгоритмами квадратичного характеру збіжності. Двосторонні алгоритми чаплигінського типу для рівнянь з немонотонними і неопуклими операторами із збереженням квадратичної збіжності вперше запропонував М.С.Курпель 1969 р. [44, 46] (див. також [57]). Алгоритми М.С.Курпеля хибують, однак, тим, що потребують диференційовності оператора та знаходження точних розв'язків лінеаризованих рівнянь. Спробу побудови видозмінених алгоритмів Чаплигіна і Курпеля без використання, взагалі кажучи, диференційовності відповідних операторів зроблено в [101]. При цьому досліджені в [101] алгоритми не конче потребують розв'язувати лінеаризовані рівняння точно, водночас маючи за певних обставин квадратичну збіжність.

§8. Спрощені модифікації методу Чаплигіна

Як уже зазначалося, реалізація методу Чаплигіна призводить до потреби на кожному кроці ітераційного процесу розв'язувати лінійні рівняння вигляду (7.14) або їх системи вигляду (7.22) точно або "достатньо точно". Оскільки це можливо тільки для декотрих класів рівнянь, то виникає потреба будувати і досліджувати ті чи інші спрощені варіанти відповідних алгоритмів. Зрештою, і в тих випадках, коли лінеаризовані рівняння формально можна розв'язати точно, надмірна громіздкість такого розв'язку може ставити під сумнів доцільність його практичного знаходження. Спроби конструювання спрощених аналогів методу Чаплигіна належать В. Кваде [127] та Б. Н. Бабкіну [8, 9] (див. також [125]).

Ідею алгоритму В. Кваде у застосуванні до задачі Коші

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{8.1}$$

можна подати в такий спосіб. Нехай L – постійна Ліпшиця щодо

x для функції $f(t,x)$. Задля зручності і дотримуючись викладу в [125], вважатимемо, що x,t,f – дійсні і $f(t,x)$ – неперервна функція. Матимемо на увазі сегмент $[t_0, t_0+a]$ і будемо шукати неперервно диференційовний на $[t_0, t_0+a]$ розв'язок задачі (8.1). Згідно з поданим в [125] описом методу В. Кваде послідовність $\{y_n\}$ нижніх наближень будують за допомогою формул

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \int_{t_0}^{t} e^{-L(t-s)} \left[y_n'(s) - f(s, y_n(s)) \right] ds \qquad (8.2)$$

за припущення, що $y_0'(t) \le f(t, y_0(t))$. За допомогою елементарних спрощень можна переконатися, що $y_{n+1}(t)$ є розв'язком задачі

$$y_{n+1}'(t) = L(y_{n+1}(t) - y_n(t)) + f(t, y_n(t)), \quad y(t_0) = x_0. \qquad (8.3)$$

Припускаючи, що $z_0'(t) \ge f(t, z_0(t))$, приєднаємо до (8.3) рівняння

$$z_{n+1}'(t) = L(z_{n+1}(t) - z_n(t)) + f(t, z_n(t)), \quad z(t_0) = x_0. \qquad (8.4)$$

Зважаючи на те, що розв'язок $z_{n+1}(t)$ задачі (8.4) теж можна подати в аналогічному до (8.2) вигляді, можна трактувати алгоритм В.Кваде як спрощений різновид методу Чаплигіна. З (8.3) та з (8.4) отримується оцінка збіжності цього алгоритму

$$\|z_{n+1}(t) - y_{n+1}(t)\| \le \frac{(2La)^{n+1}}{(n+1)!} M_0, \qquad (8.5)$$

де $M_0 \ge \|z_0(t) - y_0(t)\|$, $\|x(t)\| = \max\limits_{t\in[t_0,t_0+a]} |x(t)|$. Завдяки нерівностям

$$y_n(t) \le y_{n+1}(t) \le x^*(t) \le z_{n+1}(t) \le z_n(t) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \qquad (8.6)$$

які можна отримати для алгоритму (8.3), (8.4), оцінка (8.5) є водночас оцінкою для $z_{n+1}(t) - x(t)$ та для $x(t) - y_{n+1}(t)$.

Таким чином, метод В. Кваде як спрощений різновид методу Чаплигіна має, на відміну від методу Чаплигіна у застосуванні до задачі (8.1), факторіальну збіжність.

Подібним способом можна побудувати алгоритми вигляду

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= L\left(y_{n+1} - y_n\right) + F y_n, \\ z_{n+1} &= L\left(z_{n+1} - z_n\right) + F z_n, \end{aligned} \tag{8.7}$$

що узагальнюють метод В. Кваде для рівняння вигляду

$$x = Fx \tag{8.8}$$

у напівупорядкованому просторі E, якщо оператор F задовольняє умову Ліпшиця з оператором Ліпшиця L.

Зазначимо, що алгоритм В. Кваде можна отримати і як спрощений різновид монотонного методу Ньютона.

Близький за ідеєю до методу В. Кваде двосторонній метод Б.Н.Бабкіна [8, 9] (див. також [125]) запропонований в [8, 9] як двосторонній метод апроксимації розв'язків задачі Коші для неявного диференціального рівняння

$$F\left(t, x, x'\right) = 0, \quad x\left(t_0\right) = x_0 \tag{8.9}$$

з дійсними F та x. Основні припущення, які експлуатуються при побудові методу Б. Н. Бабкіна такі:

$$\left|\frac{\partial F\left(t, x, p\right)}{\partial x}\right| < S, \quad M \geq \frac{\partial F\left(t, x, p\right)}{\partial p} > q > 0, \tag{8.10}$$

якщо зазначені похідні існують і неперервні. Ітераційний процес будуємо за формулами

$$\begin{aligned} y'_{n+1} - y'_n &= \tfrac{S}{q}\left(y_{n+1} - y_n\right) + \tfrac{1}{M} F\left(t, y_n, y'_n\right) = 0, \\ z'_{n+1} - z'_n &= \tfrac{S}{q}\left(z_{n+1} - z_n\right) + \tfrac{1}{M} F\left(t, z_n, z'_n\right) = 0. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Нехай

$$y_0\left(t\right) \leq y_1\left(t\right) \leq z_1\left(t\right) \leq z_0\left(t\right). \tag{8.12}$$

Вважатимемо, що $t \in [t_0, t_1]$, $x \in \left[y_0\left(t\right), z_0\left(t\right)\right]$, $\left|y'\left(t\right)\right| < T$. За цих припущень можна гарантувати, що для єдиного розв'язку $x^*\left(t\right)$ задачі (8.9) і ітерацій (8.11) мають місце співвідношення

$$y_n\left(t\right) \leq y_{n+1}\left(t\right) \leq x^*\left(t\right) \leq z_{n+1}\left(t\right) \leq z_n\left(t\right) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{8.13}$$

при $t \in [t_0, t_1]$. В [125] наведено для $[x_0, x_1]$ оцінку

$$x_1 - x_0 < \frac{q}{S} \ln 2.$$

Для сегменту $[x_0, x_1]$ мають місце оцінки

$$\begin{aligned} &v_{n+1}(t) - u_{n+1}(t) \le \tfrac{\alpha\delta^n}{M} - \tfrac{q}{S}\left(1 - e^{-\frac{S}{q}(t_1 - t_0)}\right), \\ &v'_{n+1}(t) - u'_{n+1}(t) \le \tfrac{\alpha\delta^n}{M}, \end{aligned}$$

де

$$\delta = 1 - \frac{q}{M}\left(2e^{-\frac{S}{q}(t_1 - t_0)} - 1\right),$$

$$\alpha \ge F(t, x, p) \quad (t \in [t_0, t_1],\ y_0(t) \le x \le z_0(t),\ |p| < T).$$

Зазначимо, що алгоритм (8.11) можна отримати як спрощений варіант для алгоритму Чаплигіна, який для рівняння (8.9) можна описати за допомогою формул

$$\tfrac{\partial F(t, y_n, y'_n)}{\partial x'}\left(y'_{n+1} - y'_n\right) + \tfrac{\partial F(t, y_n, y'_n)}{\partial x}\left(y_{n+1} - y_n\right) + F\left(t, y_n, y'_n\right) = 0,$$

$$\tfrac{\partial F(t, y_n, y'_n)}{\partial x'}\left(z'_{n+1} - z'_n\right) + \tfrac{\partial F(t, y_n, y'_n)}{\partial x}\left(z_{n+1} - z_n\right) + F\left(t, z_n, z'_n\right) = 0.$$

Звернемо ще увагу на відомий метод квазілінеаризації, ідею якого часто описують для прикладу рівняння Ріккаті

$$x' = x^2 + p(t)\, x(t) + q(t),$$

яке замінюють "квазілінійним" рівнянням і яке зручно подати як крок ітераційного процесу

$$y'_{n+1} = y_n^2 + 2y_n y_{n+1} + p(t)\, y_{n+1} + q(t). \tag{8.14}$$

З цього приводу див. [14].

Можна переконатися, що формули (8.14) за тих припущень, за яких реалізується цей метод, можна розглядати як ітераційний крок монотонного методу Ньютона.

§9. Аналоги методу Чаплигіна

Мова йтиме про двосторонні алгоритми для рівнянь вигляду

$$Lx = Tx \tag{9.1}$$

з нелінійним оператором T та лінійним оператором L, який має обмежений обернений оператор L^{-1}. Тому вважаючи, що $F = L^{-1}T$, розглядатимемо рівняння

$$x = Fx. \tag{9.2}$$

Характерною прикметою пропонованих алгоритмів є те, що – з одного боку – диференційовність оператора F не постулюємо, а з іншого боку – за певних припущень вони мають надлінійну, зокрема, квадратичну збіжність. У випадку диференційовності оператора F ці алгоритми можуть співпадати з власне методом Чаплигіна. В основі цих результатів – запропонований в [101] підхід до побудови двосторонніх методів. Зазначимо, що цей підхід дозволяє реалізувати непомічену, наприклад, В. Кваде [127], Б. Н. Бабкіним [8, 9] та іншими авторами (див., напр., [125, 57]) можливість конструювання аналогів методів Чаплигіна для рівнянь з недиференційовними операторами, зберігаючи за цієї ситуації характерну для методу Чаплигіна квадратичну збіжність ітерацій.

Нехай $F : \mathrm{E}_0 \to \mathrm{E}$, де E_0 – опукла множина елементів з напівупорядкованого простору E. Постулюємо такі припущення.

А) *Оператор F – неперервний в E_0 і задані неперервні щодо $y, z \in E_0$, лінійні неперервні щодо $w \in E$ оператори $G_1(y,z)\,w$, $\alpha_1(y,z)\,w$, які при $y \le z$ задовольняють нерівність*

$$\left(G_1(y,z) + \alpha_1(y,z)\right)(z - y) \le Fz - Fy. \tag{9.3}$$

Б) *Оператори $G_1(y,z)\,w$, $\alpha_1(y,z)\,w$ не спадають щодо y, не зростають щодо z, причому $\alpha_1(y,z)\,w$ є додатнім як лінійний оператор щодо $w \in E$.*

В) *Кожна з нерівностей*

$$w \ge G_1(y,z)\,w,$$
$$w \ge \left(G_1(y,z) + \alpha_1(y,z)\right) w$$

спричинює нерівність $w \geq \theta$ *(*θ *– нульовий елемент в* E*,* $y \leq z$*,* $y, z \in E_0$*).*

Теорема 9.1. *Нехай справджуються умови А) – В), існує розв'язок* $x^* \in E_0$ *рівняння (9.2) і для кожного* $n = 0, 1, \ldots$ *система рівнянь*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= G_1\left(y_n, z_n\right)\left(y_{n+1} - y_n\right) + Fy_n, \\ z_{n+1} &= \left(G_1\left(y_n, z_n\right) + \alpha_1\left(y_n, z_n\right)\right)\left(z_{n+1} - z_n\right) + Fz_n \end{aligned} \tag{9.4}$$

має розв'язок (y_{n+1}, z_{n+1})*. Крім того, нехай*

$$y_0 \leq y_1 \leq x^* \leq z_1 \leq z_0, \tag{9.5}$$

де (y_1, z_1) *– розв'язок системи (9.4) при* $n = 0$*. Тоді справджуються співвідношення*

$$y_n \leq y_{n+1} \leq x^* \leq z_{n+1} \leq z_n \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{9.6}$$

Доведення. З рівностей (9.4) та з умови А) випливає

$$\begin{aligned} &y_2 - y_1 = G_1\left(y_1, z_1\right)\left(y_2 - y_1\right) + Fy_1 - Fy_0 - G_1\left(y_0, z_0\right)\left(y_1 - y_0\right) \geq \\ &\geq G_1\left(y_1, z_1\right)\left(y_2 - y_1\right) - G_1\left(y_0, z_0\right)\left(y_1 - y_0\right) + \\ &+ \left(G_1\left(y_0, y_1\right) + \alpha_1\left(y_0, y_1\right)\right)\left(y_1 - y_0\right), \end{aligned}$$

оскільки справджуються співвідношення (9.3). Завдяки умові Б) та (9.3) звідси знаходимо

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 \geq G_1\left(y_1, z_1\right)\left(y_2 - y_1\right) + \left(G_1\left(y_0, y_1\right) - G_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(y_1 - y_0\right) \geq \\ \geq G_1\left(y_1, z_1\right)\left(y_2 - y_1\right). \end{aligned}$$

Подібним способом можна знайти

$$\begin{gathered} z_1 - z_2 = \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_1 - z_0\right) + Fz_0 - \left(G_1\left(y_1, z_1\right) + \right. \\ \left. +\alpha_1\left(y_1, z_1\right)\right)\left(z_2 - z_1\right) - Fz_1 \geq \left(G_1\left(y_1, z_1\right) + \alpha_1\left(y_1, z_1\right)\right)\left(z_1 - z_2\right) - \\ - \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_0 - z_1\right) + \left(G_1\left(z_1, z_0\right) + \alpha_1\left(z_1, z_0\right)\right) \times \\ \times \left(z_0 - z_1\right) \geq \left(G_1\left(y_1, z_1\right) + \alpha_1\left(y_1, z_1\right)\right)\left(z_1 - z_2\right) + \left(G_1\left(z_1, z_0\right) - \right. \end{gathered}$$

$$-G_1(y_0,z_0))(z_0-z_1)+(\alpha_1(z_1,z_0)-\alpha_1(y_0,z_0))(z_0-z_1)\geq$$
$$\geq(G_1(y_1,z_1)+\alpha_1(y_1,z_1))(z_1-z_2)\,.$$

Отже, маємо нерівності

$$\begin{aligned}&y_2-y_1\geq G_1(y_1,z_1)(y_2-y_1)\,,\\&z_1-z_2\geq(G_1(y_1,z_1)+\alpha_1(y_1,z_1))(z_1-z_2)\,,\end{aligned}$$

з яких за умови B) маємо

$$y_1\leq y_2,\quad z_1\geq z_2. \tag{9.7}$$

З рівностей (9.2), (9.4) отримуємо подібним способом

$$\begin{aligned}&x^*-y_2=Fx^*-Fy_1+G_1(y_1,z_1)(x^*-y_2)-G_1(y_1,z_1)(x^*-y_1)\geq\\&\geq(G_1(x^*,y_1)+\alpha_1(x^*,y_1))(x^*-y_1)+G_1(y_1,z_1)(x^*-y_2)-\\&-G_1(y_1,z_1)(x^*-y_1)\geq G_1(y_1,z_1)(x^*-y_2)\,,\\&z_2-x^*=(G_1(y_1,z_1)+\alpha_1(y_1,z_1))(z_2-x^*)-(G_1(y_1,z_1)+\\&+\alpha_1(y_1,z_1))(z_1-x^*)++Fz_1-Fx^*\geq(G_1(y_1,z_1)+\alpha_1(y_1,z_1))\times\\&\times(z_2-x^*)+(G_1(x^*,z_1)-G_1(y_1,z_1))(z_1-x^*)+(\alpha_1(x^*,z_1)-\\&-\alpha_1(y_1,z_1))(z_1-x^*)\geq(G_1(y_1,z_1)+\alpha_1(y_1,z_1))(z_2-x^*)\,.\end{aligned}$$

Умова B) є підставою, щоб отримати звідси нерівності $x^*-y_2\geq\theta$, $z_2-x^*\geq\theta$. Тому, беручи до уваги (9.7), будемо мати

$$y_1\leq y_2\leq x^*\leq z_2\leq z_1. \tag{9.8}$$

З (9.7) випливають нерівності (9.8). Завдяки цьому, поклавшись на принцип індукції, теорему можна вважати доведеною.

Назвемо умовою A_0) припущення, яке отримується з умови A), якщо не вимагати, щоб нерівність (9.3) випливала з нерівності $y\leq z$. Тобто, вимагатимемо, щоб нерівність (9.3) справджувалась для всіх $y,z\in\mathrm{E}_0$, а не тільки для тих $y,z\in\mathrm{E}_0$, для яких $y\leq z$:

A_0) Оператор F – неперервний в E_0 і задає неперервні щодо y,z, лінійні неперервні щодо w оператори $G_1(y,z)\,w$, $\alpha_1(y,z)\,w$, для яких при $y,z\in E_0$ справджується нерівність (9.3).

Умовами наступної теореми не передбачено існування розв'язку $x^*\in\mathrm{E}_0$ рівняння (9.2) і не постулюємо співвідношення (9.5).

Теорема 9.2. *Нехай справджуються умови* A_0), *Б), В) і при* $y_0, z_0 \in E_0$ *система (9.4) має розв'язок* (y_{n+1}, z_{n+1}) *для кожного* $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ *Якщо задані елементи* $u, v \in E_0$ *для яких*

$$u \leq Fu, \quad v \geq Fv, \tag{9.9}$$

то при

$$y_0 = u, \quad z_0 = v \tag{9.10}$$

мають місце співвідношення

$$y_n \leq y_{n+1} \leq z_{n+1} \leq z_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\,. \tag{9.11}$$

Доведення. Рівності (9.4), (9.10) та нерівності (9.9) очевидним способом призводять до нерівностей

$$\begin{aligned} &y_1 - y_0 \geq G_1\left(y_0, z_0\right)\left(y_1 - y_0\right), \\ &z_0 - z_1 \geq \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_0 - z_1\right). \end{aligned}$$

Тому завдяки умові В) матимемо

$$y_0 \leq y_1, \quad z_1 \leq z_0. \tag{9.12}$$

Крім того, з (9.9), (9.10) та з умови A_0) випливає

$$\begin{aligned} z_0 - y_0 = v - u \geq Fv - Fu \geq \left(G_1\left(u, v\right) + \alpha_1\left(u, v\right)\right)\left(v - u\right) = \\ = \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_0 - y_0\right). \end{aligned}$$

Тому, зважаючи на умову В), будемо мати

$$y_0 \leq z_0. \tag{9.13}$$

Доведемо тепер нерівність

$$y_1 \leq z_1. \tag{9.14}$$

Задля цього, використовуючи (9.3), (9.4), знаходимо

$$\begin{gathered} z_1 - y_0 \geq \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_1 - z_0\right) + Fz_0 - Fy_0 \geq \\ \geq \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_1 - z_0\right) + \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right) \times \\ \times \left(z_0 - y_0\right) = \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_1 - y_0\right). \end{gathered}$$

Разом з умовою В) це дає підставу для нерівності $z_1 - y_0 \geq \theta$. Скориставшись схожими міркуваннями, отримуємо також

$$z_1 - y_1 = (G_1(y_0, z_0) + \alpha_1(y_0, z_0))(z_1 - z_0) + Fz_0 - Fy_0 - G_1(y_0, z_0) \times \\ \times (y_1 - y_0) \geq G_1(y_0, z_0)(z_1 - y_1) + \alpha_1(y_0, z_0)(z_1 - y_0).$$

Оскільки, як щойно встановлено $z_1 - y_0 \geq \theta$ і оператор $\alpha_1(y, z)\, w$ – додатній як лінійний оператор щодо w, то звідси випливає, що

$$z_1 - y_1 \geq G_1(y_0, z_0)(z_1 - y_1).$$

Отже, можна скористатися з умови В), щоб отримати (9.14). Поєднання співвідношень (9.12), (9.14) означає, що

$$y_0 \leq y_1 \leq z_1 \leq z_0. \tag{9.15}$$

Переконаємося тепер у нерівностях

$$y_1 \leq Fy_1, \quad z_1 \geq Fz_1. \tag{9.16}$$

З цією метою знайдемо

$$Fy_1 - y_1 = Fy_1 - G_1(y_0, z_0)(y_1 - y_0) - Fy_0 \geq$$

$$\geq (G_1(y_0, y_1) - G_1(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + \alpha_1(y_0, y_1)(y_1 - y_0) \geq \theta,$$

$$z_1 - Fz_1 = (G_1(y_0, z_0) - \alpha_1(y_0, z_0))(z_1 - z_0) + Fz_0 - Fz_1 \geq$$

$$\geq (G_1(z_1, z_0) - G_1(y_0, z_0))(z_0 - z_1) + \alpha_1(y_0, z_0)(z_0 - z_1) \geq \theta,$$

бо справджується умова Б). Таким чином елементи y_1, z_1 задовольняють всі вимоги, які умовами теореми передбачені для елементів y_0, z_0. Це дозволяє вважати теорему доведеною на підставі принципу індукції.

Розглянемо ситуацію, за якої оператор F задовольняє правосторонню умову Ліпшиця замість лівосторонньої умови Ліпшиця (9.3). Це означає заміну умов А) – В) іншими умовами.

А$_1$) *Оператор F – неперервний в E_0 і задані неперервні щодо $y, z \in E_0$, лінійні неперервні щодо $w \in E$ оператори $G_2(y, z)\, w$, $\alpha_2(y, z)\, w$, які при $y \leq z$ задовольняють нерівність*

$$Fz - Fy \leq -(G_2(y, z) + \alpha_2(y, z))(z - y). \tag{9.17}$$

Б$_1$) *Оператори* $G_2(y,z)\,w$, $\alpha_2(y,z)\,w$ *не спадають щодо* y, *не зростають щодо* z *і додатні щодо* $w \in E$.

В$_1$) *Система нерівностей*

$$\begin{aligned} &p \geq G_2(y,z)\,q, \\ &q \geq (G_2(y,z) + \alpha_2(y,z))\,p \end{aligned} \tag{9.18}$$

спричинює нерівності $p \geq \theta$, $q \geq \theta$.

За цих умов аналогічні до властивостей алгоритму (9.4) має алгоритм, побудований за допомогою ітераційних формул вигляду

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = -G_2(y_n, z_n)(z_{n+1} - z_n) + Fz_n, \\ &z_{n+1} = -(G_2(y_n, z_n) + \alpha_2(y_n, z_n))(y_{n+1} - y_n) + Fy_n, \\ &(n = 0,\ 1,\ \ldots). \end{aligned} \tag{9.19}$$

Теорема 9.3. *Нехай справджуються умови* A_1) – B_1), *для кожного* $n = 0,\ 1,\ \ldots$ *система (9.19) має розв'язок* $(y_{n+1}, z_{n+1})\,(y_{n+1}, z_{n+1} \in E_0)$ *і, крім того, існує розв'язок* $x^* \in E_0$ *рівняння (9.2) та справджуються співвідношення (9.5) з* y_0, y_1, z_0, z_1, *що задовольняють систему (9.19) при* $n = 0$. *Тоді мають місце співвідношення (9.6).*

Доведення. Подібні до використаних для доведення теореми 9.1 міркування призводять до отримання за допомогою умови А$_1$) співвідношень

$$y_2 - y_1 = -G_2(y_1, z_1)(z_2 - z_1) + G_2(y_0, z_0)(z_1 - z_0) + Fz_1 - Fz_0 \geq$$

$$\geq G_2(y_1, z_1)(z_1 - z_2) - G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) + (G_2(z_1, z_0) + \alpha_2(z_1, z_0)) \times$$

$$\times (z_0 - z_1) = G_2(y_1, z_1)(z_1 - z_2) + (G_2(z_1, z_0) - G_2(y_0, z_0))(z_0 - z_1) +$$

$$+ \alpha_2(z_1, z_0)(z_0 - z_1) \geq G_2(y_1, z_1)(z_1 - z_2),$$

$$z_1 - z_2 = -(G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + (G_2(y_1, z_1) +$$

$$+ \alpha_2(y_1, z_1))(y_2 - y_1) + Fy_0 - Fy_1 \geq (G_2(y_1, z_1) + \alpha_2(y_1, z_1))(y_2 - y_1) -$$

$$-(G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + (G_2(y_0, y_1) +$$

$$+ \alpha_2(y_0, y_1))(y_1 - y_0) = (G_2(y_1, z_1) + \alpha_2(y_1, z_1))(y_2 - y_1) +$$

$$+\left(G_2\left(y_0,y_1\right)-G_2\left(y_0,z_0\right)\right)\left(y_1-y_0\right)+\left(\alpha_2\left(y_0,y_1\right)-\alpha_2\left(y_0,z_0\right)\right)\times$$
$$\times\left(y_1-y_0\right)\geq\left(G_2\left(y_1,z_1\right)+\alpha_2\left(y_1,z_1\right)\right)\left(y_2-y_1\right).$$

Тому за допомогою умови В$_1$) отримуємо (9.7). Подібним способом з (9.2) та (9.19) випливає

$$x^*-y_2=Fx^*-Fz_1+G_2\left(y_1,z_1\right)\left(z_2-z_1\right)\geq$$
$$\geq\left(G_2\left(x^*,z_1\right)+\alpha_2\left(x^*,z_1\right)\right)\left(z_1-x^*\right)+G_2\left(y_1,z_1\right)\left(z_2-x^*\right)-$$
$$-G_2\left(y_1,z_1\right)\left(z_1-x^*\right)=G_2\left(y_1,z_1\right)\left(z_2-x^*\right)+$$
$$+\left(G_2\left(x^*,z_1\right)-G_2\left(y_1,z_1\right)\right)\left(z_1-x^*\right)+\alpha_2\left(x^*,z_1\right)\left(z_1-x^*\right)\geq$$
$$\geq G_2\left(y_1,z_1\right)\left(z_2-x^*\right),$$
$$z_2-x^*=Fy_1-Fx^*-\left(G_2\left(y_1,z_1\right)+\alpha_2\left(y_1,z_1\right)\right)\left(y_2-y_1\right)\geq$$
$$\geq\left(G_2\left(y_1,x^*\right)+\alpha_2\left(y_1,x^*\right)\right)\left(x^*-y_1\right)+\left(G_2\left(y_1,z_1\right)+\alpha_2\left(y_1,z_1\right)\right)\times$$
$$\times\left(x^*-y_2\right)-\left(G_2\left(y_1,z_1\right)+\alpha_2\left(y_1,z_1\right)\right)\left(x^*-y_1\right)=\left(G_2\left(y_1,z_1\right)+\right.$$
$$\left.+\alpha_2\left(y_1,z_1\right)\right)\left(x^*-y_2\right)+\left(G_2\left(y_1,x^*\right)-G_2\left(y_1,z_1\right)\right)\left(x^*-y_1\right)+$$
$$+\left(\alpha_2\left(y_1,x^*\right)-\alpha_2\left(y_1,z_1\right)\right)\left(x^*-y_1\right)\geq$$
$$\geq\left(G_2\left(y_1,z_1\right)+\alpha_2\left(y_1,z_1\right)\right)\left(x^*-y_2\right).$$

Знову завдяки умові В$_1$) звідси знайдемо $x^*-y_2\geq\theta$, $z_2-x^*\geq\theta$, що у поєднанні з доведеними перед цим нерівностями (9.7) для алгоритму(9.19) призводить до нерівностей (9.8). Це означає, що можна покликатися на принцип індукції, щоб вважати теорему доведеною.

Теорема 9.4. *Нехай справджуються умови Б$_1$) – В$_1$), а умова А$_1$) справджується не тільки для $y\leq z$, а для всяких $y,z\in E_0$. Нехай для кожного $n=0,\ 1,\ \ldots$ система (9.19) має розв'язок $(y_{n+1},z_{n+1})\quad(y_{n+1},z_{n+1}\in E_0)$ і, крім того, задані елементи $u,v\in E_0$, для яких*

$$u\leq Fv,\ v\geq Fu. \tag{9.20}$$

Тоді при вибраних за формулами (9.10) початкових наближеннях y_0, z_0, для послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, побудованих за допомогою формул (9.19), справджуються співвідношення (9.11).

Доведення. Як і при доведенні теореми 9.2 можна отримати нерівності (9.12), оскільки з (9.19) при $n = 0$ та з (9.10) і (9.20) випливає

$$\begin{aligned} &y_1 - y_0 \geq G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1), \\ &z_0 - z_1 \geq (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0), \end{aligned}$$

і для підтвердження (9.12) досить звернутися до умови B_1). Крім того, з (9.10), (9.20) та з умов теореми випливає

$$z_0 - y_0 = v - u = Fu - Fv \geq (G_2(u, v) + \alpha_2(u, v))(v - u),$$

що дає змогу на підставі умови B_1) зробити висновок про нерівність (9.13). Доведемо тепер (9.14). Попередньо задля цього, враховуючи (9.10), (9.20), знаходимо

$$z_0 - y_1 \geq Fy_0 - Fz_0 - G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) \geq G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0) \times$$

$$\times (z_0 - y_0) - -G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) \geq G_2(y_0, z_0)(z_1 - y_0),$$

$$z_1 - y_0 \geq Fy_0 - Fz_0 - (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) \geq$$

$$\geq (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(z_0 - y_0) - (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0)) \times$$

$$\times (y_1 - y_0) = (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(z_0 - y_1).$$

Тому умова B_1) забезпечує нерівності

$$z_0 - y_1 \geq \theta, \quad z_1 - y_0 \geq \theta. \tag{9.21}$$

Оскільки з (9.19), враховуючи щойно доведені нерівності, можна знайти

$$z_1 - y_1 = -(G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) - G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1)$$

$$+Fy_0 - Fz_0 \geq (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(z_1 - y_1) - \alpha_2(y_0, z_0)(z_1 - y_0) -$$

$$-G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) + (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(z_0 - y_0) =$$

$$= (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(z_1 - y_1) + G_2(y_0, z_0)(z_1 - y_0) +$$

$$+\alpha_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) \geq (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(z_1 - y_1),$$

то умова B_1) призводить до нерівності $y_1 \leq z_1$. Таким чином, як і при доведенні теореми 9.2, підтверджені нерівності (9.15) для алгоритму (9.19). Залишається довести нерівності

$$y_1 \leq Fz_1, \quad z_1 \geq Fy_1. \tag{9.22}$$

Знаходимо

$$Fz_1 - y_1 = Fz_1 - G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) - Fz_0 \geq$$

$$\geq (G_2(z_1, z_0) + \alpha_2(z_1, z_0))(z_0 - z_1) - -G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) =$$

$$= (G_2(z_1, z_0) - G_2(y_0, z_0))(z_0 - z_1) + \alpha_2(z_1, z_0)(z_0 - z_1) \geq \theta,$$

$$z_1 - Fy_1 = Fy_0 - (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) - Fy_1 \geq$$

$$\geq -(G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + (G_2(y_0, y_1) + \alpha_2(y_0, y_1)) \times$$

$$\times (y_1 - y_0) == (G_2(y_0, y_1) - G_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) +$$

$$+ (\alpha_2(y_0, y_1) - \alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) \geq \theta.$$

Цим теорему доведено, бо елементи y_1, z_1 задовольняють всі ті самі вимоги, які задовольняють y_0, z_0 в умовах теореми і, отже, застосовний принцип індукції.

Теореми 9.1, 9.2 та теореми 9.3, 9.4 не забезпечують збіжність алгоритмів (9.4), (9.10) та (9.19), (9.10) без додаткових обмежень щодо множин E, E_0 і оператора F. Зокрема, за припущення, що E – правильно напівупорядкований простір і $E_0 = [u, v]$ – відрізок в ньому, для алгоритму (9.4), (9.10) можна гарантувати монотонну збіжність послідовностей $\{y_n\}$ і $\{z_n\}$ до границь y^* і z^*, які є відповідно нижнім і верхнім розв'язками рівняння (9.2) в E_0. Для алгоритму (9.19), (9.10) елементи y^*, z^* теж існують за цих припущень, але вони можуть і не бути розв'язками рівняння (9.2). У цьому випадку пара (y^*, z^*) є розв'язком пов'язаної з рівнянням (9.2) системи

$$y = Fz, \quad z = Fy. \tag{9.23}$$

Цей розв'язок (y^*, z^*) системи (9.23) має ту властивість, що для всякого розв'язку $x^* \in E_0 = [u, v]$ рівняння (9.2) мають місце оцінки $y^* \leq x^* \leq z^*$. Зазначимо, що цей випадок, як і випадок, коли y^*, z^* є відповідно нижнім і верхнім розв'язками рівняння (9.2) є прикладами поняття крайнього розв'язку, запровадженого М.С.Курпелем (див. [57]), а також запровадженого В.Лакшмікантамом незалежно від М.С.Курпеля поняття мінімаксного розв'язку, які за описаної тут ситуації співпадають між собою.

Збіжність послідовностей $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$, отриманих за допомогою алгоритму (9.4), до єдиного розв'язку $x^* \in \mathrm{E}_0$ рівняння (9.2) можна обгрунтувати, якщо справджується така умова.

Г) *Заданий лінійний додатній оператор $a_1(y,z)\,w$, неперервний щодо $y, z \in E_0$, неперервний щодо $w \in E$, для якого при $y \le z$, $y, z \in E_0$ справджується нерівність*

$$Fz - Fy \ge \left(G_1(y,z) + a_1(y,z)\right)(z - y)\,. \tag{9.24}$$

Зауважимо, що нерівність (9.24) формально є такою ж як і нерівність (9.17) з умови A_1), але при цьому не співпадають вимоги щодо оператора $\left(G_1(y,z) + a_1(y,z)\right)w$ та оператора $\left(-G_2(y,z) - \alpha_2(y,z)\right)w$ із (9.24) та (9.17).

Зазначимо, що очевидною є нерівність

$$a_1(y,z)\,w \ge \alpha_1(y,z)\,w, \tag{9.25}$$

яка отримується як результат нерівностей (9.17) і (9.24).

Теорема 9.5. *Нехай справджуються умови А) – В) та умова Г), а також нехай існує обернений оператор*

$$\left(I - G_1(y,z)\right)^{-1} w, \tag{9.26}$$

неперервний щодо $y, z \in E_0$, неперервний лінійний і додатній щодо $w \in E_0$. Припустимо, крім того, що E – напівупорядкований банахів простір і

$$\left\| \left(I - G_1(y,z)\right)^{-1} a_1(y,z) \right\| \le q < 1, \tag{9.27}$$

(тут I – одиничний оператор). Тоді ітераційний процес (9.4) збігається до єдиного в E_0 розв'язку x^* рівняння (9.2) не повільніше за геометричну прогресію із знаменником q.

Доведення. З (9.4), (9.6) та із (9.24), (9.25) випливає оцінка

$$
\begin{gathered}
z_{n+1}-y_{n+1}=G_1\left(y_n,z_n\right)\left(z_{n+1}-y_{n+1}\right)-G_1\left(y_n,z_n\right)\left(z_n-y_n\right)- \\
-\alpha_1\left(y_n,z_n\right)\left(z_n-z_{n+1}\right)+Fz_n-Fy_n\leq G_1\left(y_n,z_n\right)\left(z_{n+1}-y_{n+1}\right)+ \\
+\alpha_1\left(y_n,z_n\right)\left(z_n-y_n\right)-\alpha_1\left(y_n,z_n\right)\left(z_n-z_{n-1}\right)\leq \\
\leq G_1\left(y_n,z_n\right)\left(z_{n+1}-y_{n+1}\right)+a_1\left(y_n,z_n\right)\left(z_n-y_n\right).
\end{gathered}
$$

Звідси отримуємо

$$
z_{n+1}-y_{n+1}\leq\left(I-G_1\left(y_n,z_n\right)\right)^{-1}a_1\left(y_n,z_n\right)\left(z_n-y_n\right). \tag{9.28}
$$

Це, завдяки (9.27), призводить до оцінки

$$
\left\|z_{n+1}-y_{n+1}\right\|\leq q\left\|z_n-y_n\right\|. \tag{9.29}
$$

Оскільки звідси випливає, що існують границі послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=x^*$ для єдиного в E_0 розв'язку x^* рівняння (9.4), то можна вважати теорему доведеною.

Як видно з (9.27) і (9.28), за обставин, коли структура оператора $a_1\left(y,z\right)$ дає змогу записати

$$
\left\|a_1\left(y,z\right)\right\|\leq q_0\left\|z-y\right\|^{\gamma}\quad\left(\gamma\geq0\right), \tag{9.30}
$$

замість оцінки (9.29) можна отримати уточнену оцінку

$$
\left\|z_{n+1}-y_{n+1}\right\|\leq p\left\|z_n-y_n\right\|^{1+\gamma}, \tag{9.31}
$$

де

$$
p\geq\left\|\left(I-G_1\left(y_n,z_n\right)\right)^{-1}\right\|\cdot q_0. \tag{9.32}
$$

Якщо $\gamma>0$, то за належного вибору початкових наближень $y_0=u$, $z_0=v$ процес (9.4) може збігатися і при $p\geq1$. При цьому матимемо надлінійну збіжність з показником $1+\gamma$. При $\gamma=1$ отримаємо, зокрема, і квадратичну збіжність, характерну для методу Чаплигіна. Нерівність (9.30) справджується, наприклад, якщо оператор F неперервно диференційовний два рази і при цьому за функцію $a_1\left(y,z\right)$ можна взяти

$$
a_1\left(y,z\right)=\frac{1}{2}F''\left(y\right)\left(z-y\right). \tag{9.33}
$$

За подібною схемою можна дослідити і збіжність алгоритму (9.19). Замість умови Г) можна використати для цього алгоритму таку умову.

Γ_1) *Заданий неперервний щодо* $y, z \in E_0$ *додатній лінійний неперервний щодо* $w \in E$ *оператор* $a_2(y,z)\,w$, *для якого при* $y \leq z$, $y, z \in E_0$ *будемо мати*

$$-\left(G_2(y,z) + a_2(y,z)\right)(z-y) \leq Fz - Fy. \tag{9.34}$$

При цьому потрібно мати на увазі очевидну нерівність

$$a_2(y,z)\,w \geq \alpha_2(y,z)\,w. \tag{9.35}$$

Теорема 9.6. *Нехай справджуються умови* A_1) – B_1) *та* Γ_1), *а також умови, що отримуються з умов теореми 9.5 заміною* $G_1(y,z)$ *на* $G_2(y,z)$ *та* $a_1(y,z)$ *на* $a_2(y,z)$. *Тоді ітераційний процес (9.19) збігається до єдиного в* E_0 *розв'язку* x^* *рівняння (9.2) не повільніше за геометричну прогресію із знаменником* q.

Доведення. За допомогою (9.34), (9.16) і (9.6) можна отримати

$$\begin{gathered} z_{n+1} - y_{n+1} = G_2(y_n,z_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) - G_2(y_n,z_n)(z_n - y_n) - \\ -\alpha_2(y_n,z_n)(y_{n+1} - y_n) + Fy_n - Fz_n \leq G_2(y_n,z_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) - \\ -G_2(y_n,z_n)(z_n - y_n) - \alpha_2(y_n,z_n)(y_{n+1} - y_n) + \\ +G_2(y_n,z_n)(z_n - y_n) + a_2(y_n,z_n)(z_n - y_n) \leq \\ \leq G_2(y_n,z_n)(z_{n+1} - y_{n+1}) + a_2(y_n,z_n)(z_n - y_n). \end{gathered}$$

Тому звідси отримується такий аналог формули (9.28)

$$z_{n+1} - y_{n+1} \leq \left(I - G_2(y_n,z_n)\right)^{-1} a_2(y_n,z_n)(z_n - y_n),$$

який призводить до оцінки (9.29) для ітерацій (9.19). Міркуючи далі так само, як і при доведенні теореми 9.5, переконуємося у правдивості тверджень теореми 9.6.

Аналогічні міркування призводять для алгоритму (9.19) до співвідношень, які є аналогами співвідношень (9.30) – (9.33) і отримуються з них заміною $a_1(y,z)$ та $G_1(y,z)$ на $a_2(y,z)$ та $G_2(y,z)$ відповідно.

Зауваження 9.1. *Оператори* $G_1(y,z)$, $-G_2(y,z)$ *у випадку гладкості оператора* F *можна виразити через похідну Фреше,* *якщо E – банахів напівупорядкований простір. Збурення $\alpha_1(y,z)$ та $\alpha_2(y,z)$ в алгоритмах (9.4) та (9.19) можна прийняти, зокрема, за нульові. Однак нульові $\alpha_1(y,z)$, $\alpha_2(y,z)$ не дозволяють охопити, наприклад, первісний варіант методу Чаплигіна, запропонований самим С. О. Чаплигіним, який формально у скалярному випадку нагадує комбінований метод хорд і дотичних; такий алгоритм для скалярного диференціального рівняння описаний у §2 за допомогою формул (7.6) – (7.7). Збурення $\alpha_1(y,z)$ та $\alpha_2(y,z)$, які фігурують в умовах А) – В) можна трактувати як "поглинаючий агрегат збурень" лінеаризованих рівнянь (9.4) і (9.19). Вони дають змогу враховувати не лише можливу недиференційовність оператора F, а й характер спрощень та заокруглень у лінеаризованих рівняннях з метою – за змогою – обчислити у явному вигляді обернений оператор, а також врахувати похибки від практичної реалізації обчислень таким способом, щоб зберегти двосторонність і монотонність методу та надлінійний характер його теоретичної збіжності.*

Зауваження 9.2. *При використанні алгоритмів (9.4), (9.19) для рівнянь, поданих у вигляді (9.2), можуть трапитися певні формальні труднощі, якщо йдеться, наприклад, про ті чи інші граничні задачі для диференціальних, функціонально-диференціальних та для інших класів рівнянь. Тому опишемо побіжно деякі формальні зміни у наведених формулюваннях припущень і отриманих тверджень для ситуації, коли йдеться про розв'язування рівняння (9.1) замість рівняння (9.2). Приєднаємо до рівняння (9.1) додаткову умову*

$$Sx = r, \tag{9.36}$$

яка, наприклад, у випадку рівняння $x' = f(t,x)$ може співпадати з початковою умовою $x(t_0) = x_0$, з умовою періодичності $x(t_0) = x(t_0 + T)$ і т. п. Зупинимося спочатку на адаптуванні умов А) – Г) до задачі (9.1), (9.36).

Нехай $L : D \to \mathrm{E}_1$, $S : D \to \mathrm{E}_2$, $T : D \to \mathrm{E}_1$, де D – опукла підмножина напівупорядкованого простору E, простори E_1, E_2 – напівупорядковані, S – лінійний оператор, L – лінійний оператор, такий що (коли L – ненульовий оператор) існує лінійний неперервний обернений оператор L^{-1}. Постулюємо структурну нормованість E і E_1 за допомогою архімедових лінеалів N та N_1 відповідно. Сформулюємо такі аналоги умов А) – Г).

А$_2$) *Задані неперервні щодо $y, z \in D$, лінійні неперервні щодо $w \in E$ оператори $g_1(y,z)\,w$, $\beta_1(y,z)\,w$, для яких із співвідношень $y \le z$, $Sy = Sz = r$ випливає, що*

$$(g_1(y,z) + \beta_1(y,z))\,(z - y) \le Tz - Ty.$$

Б$_2$) *Оператори $g_1(y,z)\,w$, $\beta_1(y,z)\,w$ не зростають щодо y, не спадають щодо z при $y, z \in D$, оператор $\beta_1(y,z)\,w$ – додатній як лінійний оператор щодо $w \in E$, оператор F – неперервний.*

В$_2$) *Кожна з нерівностей $Lw \ge g_1(y,z)\,w$ та $Lw \ge (g_1(y,z) + \beta_1(y,z))\,w$ при $Sw = \theta$, $Sy = Sz = r$ спричинює нерівність $w \ge \theta$.*

Сформулюємо аналог теореми 9.1 для рівняння (9.1) з умовою (9.36) та для ітераційного процесу, який описується формулами

$$\begin{aligned} Ly_{n+1} &= g_1(y_n, z_n)\,(y_{n+1} - y_n) + Ty_n, \\ Lz_{n+1} &= (g_1(y_n, z_n) + \beta_1(y_n, z_n))\,(z_{n+1} - z_n) + Tz_n, \end{aligned} \tag{9.37}$$

$$Sy_{n+1} = Sz_{n+1} = r. \tag{9.38}$$

Теорема 9.7. *Нехай справджуються умови А$_2$) – В$_2$) і задача (9.37), (9.38) при кожному $n = 0, 1, \ldots$ має розв'язок (y_{n+1}, z_{n+1}) $(y_{n+1}, z_{n+1} \in D)$. Якщо $x^* \in D$ – розв'язок задачі (9.1), (9.36) і справджуються нерівності (9.5) для y_0, y_1, z_0, z_1, що задовольняють (9.37), (9.38), то мають місце співвідношення (9.6).*

Доведення проводиться за такою самою схемою, яка використана для доведення теореми 9.1. З іншого боку, можна зазначити, що з умов А$_2$) – В$_2$) для задачі (9.1), (9.36) випливають умови А) – В) для рівняння (9.2), якщо позначити

$$G_1(y,z) = L^{-1} g_1(y,z)\,, \quad \alpha_1(y,z) = L^{-1} \beta_1(y,z)\,, \quad F = L^{-1} T,$$

маючи на увазі при цьому умову (9.36).

Можна замість умов А$_2$) – В$_2$) використати інші умови.

А$_3$) *Задані неперервні щодо* y, z *лінійні неперервні щодо* w *оператори* $g_2(y,z)\,w$, $\beta_2(y,z)\,w$, *для яких із співвідношень* $y \le z$, $Sy = Sz = r$ *випливає нерівність*

$$Tz - Ty \le -\left(g_2(y,z) + \beta_2(y,z)\right) w.$$

Б$_3$) *Оператори* $g_2(y,z)\,w$, $\beta_2(y,z)\,w$ *не зростають щодо* y, *не спадають щодо* z *і додатні як лінійні оператори щодо* w, *оператор* F *– неперервний.*

В$_3$) *Система нерівностей*

$$Lp \ge g_2(y,z)\,q,$$

$$Lq \ge \left(g_2(y,z) + \beta_2(y,z)\right) p$$

має тільки такі розв'язки $p, q \in E$, *що* $p \ge \theta$, $q \ge \theta$.

Замість ітераційних формул (9.37) скористаємося з формул

$$\begin{aligned} Ly_{n+1} &= -g_2(y_n,z_n)\,(z_{n+1} - z_n) + Tz_n, \\ Lz_{n+1} &= -\left(g_2(y_n,z_n) + \beta_2(y_n,z_n)\right)(y_{n+1} - y_n) + Ty_n. \end{aligned} \tag{9.39}$$

Для алгоритму (9.39), (9.38) аналогом теореми 9.4 є таке твердження.

Теорема 9.8. *Нехай справджуються умови* А$_3$) *–* В$_3$) *і при кожному* $n = 0, 1, \ldots$ *задача (9.39), (9.38) має розв'язок* (y_{n+1}, z_{n+1}) $(y_{n+1}, z_{n+1} \in D)$. *Нехай існує розв'язок* $x^* \in D$ *задачі (9.1), (9.36) і правдиві нерівності (9.5) для* y_0, y_1, z_0, z_1, *що задовольняють співвідношення (9.38), (9.39). Тоді правдиві співвідношення (9.6).*

Для доведення можна скористатися міркуванням, схожим до того, що наводилося для обгрунтування теореми 9.7.

Подібним способом можна отримати аналоги теорем 9.2 та 9.5. для алгоритму (9.37), (9.38).а для алгоритму (9.39), (9.38) – аналоги теорем 9.3 та 9.6.

Зауваження 9.3. *Можна подібним способом проаналізувати й інші алгоритми із структурою ітераційних формул, схожою на* *структуру формул (9.4) та (9.19). Наприклад, можна припускати, що в умовах А) – В) оператори* $G_1(y,z)$ $\alpha_1(y,z)$ *не спадають за обидвома аргументами* y *та* z*. Тоді замість ітераційних формул (9.4) потрібно брати формули*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= G_1(y_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) + Fy_n, \\ z_{n+1} &= (G_1(y_n, y_n) + \alpha_1(y_n, y_n))(z_{n+1} - z_n) + Fz_n. \end{aligned} \tag{9.40}$$

Схожі заміни можна було б розглянути і у випадку умов $А_1$) – $В_1$) та ітераційних формул (9.19). Для операторів $a_1(y,z)$, $a_2(y,z)$ нерівності (9.25) та (9.35) матимуть, зокрема, вигляд $a_1(y,z)w \ge \alpha_1(y,z)w$ та $a_2(y,z)w \ge \alpha_2(y,z)w$.

Ліва частина нерівності (9.27) матиме для алгоритму (9.40) вигляд $\left\|(I - G_1(y,y))^{-1} a_1(y,z)\right\|$, а для відповідного аналогу алгоритму (9.19) – вигляд $\left\|(I - G_2(z,z))^{-1} a_2(y,z)\right\|$. Аналоги попередніх теорем для таких алгоритмів лише формальними подробицями відрізняються від наведених теорем, а їх доведення можна провести, користуючись схемою доведень попередніх теорем.

Зазначимо також, що за прийнятих припущень алгоритм (9.40) охоплює різновидності алгоритму М.С.Курпеля з [50], а також проекційно-ітеративні аналоги методів Курпеля, досліджені в [49, 50, 57, 62].

РОЗДІЛ IV. УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ЧАПЛИГІНА І МОНОТОННОГО МЕТОДУ НЬЮТОНА

Оскільки обгрунтування методу Чаплигіна для тих чи інших класів операторних рівнянь використовує властивості монотонності і опуклості відповідних операторів (див., напр., [81, 87]), то можливості їх застосування вельми обмежені, бо в конкретних практичних задачах не часто трапляються оператори з цими властивостями. Використання ліпшицієвості операторів замість їх диференційовності в конструкціях двосторонніх методів А.Н.Балуєва [11, 12], В. Кваде [127] (див. також. [125]), Ю.І.Ковача [31, 32] і багатьох інших авторів (див., напр. бібліографію в [125] та в [49, 57]), пропонованих як узагальнення методу Чаплигіна, призводить до втрати квадратичного характеру збіжності методів, хоча їх обгрунтування не потребує монотонності та опуклості відповідних операторів. З іншого боку, в теорії цих методів ліпшицієвість операторів використовується не в повному обсязі. Зокрема, для забезпечення їх монотонності і двосторонності можна обмежитися односторонньою ліпшицієвістю, яку вперше використали в теорії інтегральних нерівностей Н.В.Азбелєв і З.Б.Цалюк [5], назвавши її L_1 (L_2)-умовою Азбелєва, а згодом В.Вальтер [135] під терміном "W-умова Вальтера". Ю.В.Покорний використав односторонню ліпшицієвість для дослідження одного класу операторів, названих ним "B-монотонними"і "B-додатними"[83] (див. також [49]). В цьому розділі односторонню ліпшицієвість використовуємо для побудови і обгрунтування двосторонніх методів, які поєднують ідеї методу Чаплигіна з ідеями двосторонніх алгоритмів із [11, 12, 31, 32, 127]. Досліджений також монотонний аналог методу Ньютона, який можна пов'язувати з методом квазілінеаризації із [14].

§10. Рівняння з односторонньо ліпшицієвими операторами

Ліпшицієвість оператора F належить до найпростіших вимог, що забезпечують однозначну розв'язність рівняння

$$x = Fx, \tag{10.1}$$

а також збіжність методу послідовних наближень

$$x_{n+1} = Fx_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{10.2}$$

до розв'язку цього рівняння. Ліпшицієвість оператора F часто використовують для побудови двосторонніх монотонних послідовних наближень до розв'язку рівняння (10.1) з немонотонною правою частиною (див. з цього приводу, напр., [108, 109] та низку робіт Ю.І.Ковача і його учнів [31, 32], а також бібліографію в [125]). Зазначимо, що в цій ситуації, наприклад, для банахового простору E, умову Ліпшиця

$$\|Fy - Fx\| \le L\,\|x - y\| \tag{10.3}$$

можна використовувати у неповному обсязі. Маємо на увазі, що використовуючи поняття напівупорядкованості простору E, можна обійтися слабкішими за (10.3) припущеннями. Йдеться про умови, які називатимемо односторонньою ліпшицієвістю. Зазначимо, що відому в теорії інтегральних нерівностей L_1 (L_2)-умову Азбелева [5, 6], яку деколи також називають W-умовою Вальтера (див. [135]), можна трактувати як односторонню умову Ліпшиця.

Нехай E – напівупорядкований банахів простір, $[a,b] = \mathrm{E}_0$ – відрізок в E, тобто $[a,b] = \{x | a \le x \le b,\ a,b,x \in E\}$. Будемо вважати заданим неперервний за y, z, w $(y\,, z\ \in\ [a,b],\ w\ \in\ [\theta, b-a],\ \theta$ – нульовий елемент в $E)$ лінійний додатній щодо w оператор $A_1\,(y,z)\,w$, для якого з нерівності $y \le z$ випливає нерівність

$$-A_1\,(z,y)\,(z-y) \le Fz - Fy. \tag{10.4}$$

Це припущення називатимемо лівосторонньою умовою Ліпшиця. Умова (10.4) справджується, наприклад, якщо F задовольняє звичайну умову Ліпшиця (10.3), а також, якщо справджується формально дещо загальніша двостороння умова вигляду

$$-A_1(z,y)(z-y) \le Fz - Fy \le A_2(z,y)(z-y) \\ (y \le z,\ y,z \in E_0) \tag{10.5}$$

з оператором $A_2(y,z)\,w$, який має ті ж властивості, що і оператор $A_1(y,z)\,w$.

Будемо розглядати ітераційний процес

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -A_1(z_n,y_n)(z_n-y_n) + Fy_n, \\ z_{n+1} &= A_1(z_n,y_n)(z_n-y_n) + Fz_n \quad (n=0,\ 1,\ \ldots). \end{aligned} \tag{10.6}$$

Цей ітераційний алгоритм відрізняється від ітераційних алгоритмів (9.4) та (9.19) чаплигінського типу не лише тим, що формули (10.6), на відміну від формул (9.4) та (9.19), не містять у правих частинах невідомих y_{n+1}, z_{n+1}, а й властивостями оператора $A_1(y,z)\,w$ в (10.6) у порівнянні з властивостями операторів $G_1(y,z)\,w$ і $G_2(y,z)\,w$ у формулах (9.4) та (9.19) відповідно.

Теорема 10.1. *Нехай: 1) справджується лівостороння умова Ліпшиця, причому оператор $A_1(y,z)\,w$ не спадає за y, не зростає за z; 2) мають місце співвідношення*

$$y_0 \le y_1 \le x \le z_1 \le z_0, \tag{10.7}$$

де $y_0 = a$, $z_0 = b$, y_1, z_1 визначені за допомогою (10.6) при $n = 0$, $x \in [a,b]$ – розв'язок рівняння (10.1). Тоді при $n = 0,1,\ldots$ справджуються співвідношення

$$y_n \le y_{n+1} \le x \le z_{n+1} \le z_n. \tag{10.8}$$

Доведення. Нехай для якогось $n > 0$ співвідношення (10.8) справджуються. З (10.6), використовуючи (10.4) та умови 1) і 2) знаходимо

$$\begin{aligned} &y_{n+1} - y_n = -A_1(z_n,y_n)(z_n-y_n) + Fy_n + A_1(z_{n-1},y_{n-1})\times \\ &\times(z_{n-1}-y_{n-1}) - Fy_{n-1} \ge A_1(z_{n-1},y_{n-1})(z_{n-1}-y_{n-1}) - \\ &-A_1(z_n,y_n)(z_n-y_n) - A_1(y_n,y_{n-1})(y_n-y_{n-1}) \ge \\ &\ge A_1(z_{n-1},y_{n-1})(z_{n-1}-y_{n-1}) - A_1(z_{n-1},y_{n-1})(z_n-y_n) - \\ &-A_1(z_n,y_{n-1})(y_n-y_{n-1}) = A_1(z_{n-1},y_{n-1})(z_{n-1}-z_n) \ge \theta, \end{aligned}$$

$$z_n - z_{n+1} = A_1(z_{n-1}, y_{n-1})(z_{n-1} - y_{n-1}) + Fz_{n-1} -$$
$$-A_1(z_{n-1}, y_{n-1})(z_{n-1} - y_{n-1}) - A_1(z_n, y_n)(z_n - y_n) -$$
$$-A_1(z_{n-1}, z_n)(z_{n-1} - z_n) \geq A_1(z_{n-1}, y_{n-1})(z_{n-1} - y_{n-1}) -$$
$$-A_1(z_{n-1}, y_{n-1})(z_n - y_n) - A_1(z_{n-1}, y_{n-1})(z_{n-1} - z_n) =$$
$$= A_1(z_{n-1}, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) \geq \theta.$$

Отже,

$$y_n \leq y_{n+1}, \quad z_{n+1} \leq z_n. \tag{10.9}$$

Крім того, з (10.1), (10.6) на підставі (10.4) та умов 1) і 2) отримуємо

$$x - y_{n+1} = Fx + A_1(z_n, y_n)(z_n - y_n) - Fy_n \geq A_1(z_n, y_n) \times$$
$$\times (z_n - y_n) - A_1(x, y_n)(x - y_n) \geq A_1(z_n, y_n)(z_n - y_n) -$$
$$-A_1(z_n, y_n)(x - y_n) = A_1(z_n, y_n)(z_n - x) \geq \theta,$$

$$z_{n+1} - x = A_1(z_n, y_n)(z_n - y_n) + Fz_n - Fx \geq A_1(z_n, y_n) \times$$
$$(z_n - y_n) - A_1(z_n, x)(z_n - x) \geq A_1(z_n, y_n)(z_n - y_n) -$$
$$-A_1(z_n, y_n)(z_n - x) = A_1(z_n, y_n)(x - y_n) \geq \theta.$$

Це означає, що $y_{n+1} \leq x$, $z_{n+1} \geq x$ і, тому поєднуючи це з (10.9), доходимо висновку про можливість переходу в (10.8) від $n = k - 1$ до $n = k$. Беручи до уваги співвідношення (10.7) і спираючись на принцип індукції, можемо вважати теорему доведеною.

Умови теореми 10.1 не гарантують, взагалі кажучи, існування бодай одного розв'язку рівняння (10.1). Забезпечують існування розв'язку додаткові обмеження на простір E та на оператор F. В окремому випадку, коли оператор F – неперервний і ізотонний, тобто за ситуації, коли оператор $A_1(y, z)\, w$ в нерівності (10.4) можна прийняти за нуль-оператор, а для простору E постулювати правильну напівупорядкованість, і замість співвідношень (10.7) вимагати співвідношень

$$y_0 \leq y_1 \leq z_1 \leq z_0, \tag{10.10}$$

можна стверджувати (див., напр. [33, 41, 57]), що існують на $[a, b]$ нижній розв'язок y^* та верхній розв'язок z^* рівняння (10.1) і має місце монотонна збіжність до цих розв'язків відповідно послідовностей $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$. У випадку, коли $A_1(y, z)$ не є нульовим оператором за зазначених припущень можна переконатися, що y^* та z^* як границі відповідно послідовностей $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ існують і є компонентами крайнього на $[a,b]$ розв'язку (y^*,z^*) системи

$$\begin{aligned} y &= -A_1(z,y)(z-y)+Fy, \\ z &= \quad A_1(z,y)(z-y)+Fz, \end{aligned} \tag{10.11}$$

запровадженого М. С. Курпелем (див. [57]). Нагадаємо, що розв'язок $(y^*,z^*) \quad (y^*,z^* \in E_0)$ називають крайнім в E_0 розв'язком системи

$$\begin{aligned} y &= T_1(y,z), \\ z &= T_2(z,y), \end{aligned} \tag{10.12}$$

якщо для всякого іншого розв'язку $(y,z) \quad (y,z \in E)$ цієї системи справджуються співвідношення

$$y^* \leq y \leq z^*, \quad y^* \leq z \leq z^*.$$

Якщо система (10.12) вироджується до одного рівняння, тобто, коли вона має вигляд $y = Fy$, $z = Fz$, компоненти y^*, z^* крайнього розв'язку (y^*,z^*) співпадають відповідно з нижнім і верхнім розв'язками рівняння (10.1). Зазначимо, що як уже згадувалося, поняття крайнього розв'язку близьке до поняття мінімаксного розв'язку системи (10.12), запровадженого В.Лакшмікантамом (див. [123]) незалежно від М. С. Курпеля.

Переконаємося, що система (10.11) має крайній в $E_0 = [a,b]$ розв'язок за припущень, що $y_0 = a$, $z_0 = b$, оператори $A_1(y,z)\,w$, Fx – неперервні щодо $x,y,z \in E_0$, $w \in [\theta, b-a]$, простір E – правильно напівупорядкований банахів, а також, що справджується умова 1) та, замість умови 2), ослаблена умова (10.10). Для доведення зазначимо насамперед, що за цих обставин з (10.10) випливає, що нерівність $z_n \geq y_n$ спричинює нерівність $z_{n+1} \geq y_{n+1}$. Щоб переконатися в цьому, використаємо (10.6) і знайдемо

$$\begin{aligned} &z_{n+1} - y_{n+1} = 2A_1(z_n,y_n)(z_n-y_n) + Fz_n - Fy_n \geq \\ &\geq 2A_1(z_n,y_n)(z_n-y_n) - A_1(z_n,y_n)(z_n-y_n) \geq \theta. \end{aligned}$$

Оскільки нерівності (10.9) вже отримані при доведенні попередньої теореми як наслідок нерівностей $y_{n-1} \leq y_n$, $z_n \leq z_{n-1}$ з використанням тих припущень, які щойно постульовані, то будемо мати

$$y_n \le y_{n+1} \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \tag{10.13}$$

З (10.13) і правильної напівупорядкованості E випливає існування границь $y^*, z^* \in [a,b]$, для яких

$$y_n \le y_{n+1} \le y^* \le z^* \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \tag{10.14}$$

Неперервність $A_1\,(y,z)\,w$, Fx є підставою для того, щоб пара (y^*, z^*) була розв'язком системи (10.11). Залишається переконатися, що цей розв'язок є крайнім в E_0 її розв'язком. Задля цього будемо вважати, що (y,z) – який-небудь розв'язок системи (10.11) з компонентами $y, z \in E_0$, і скористаємося з того, що за умовою $y_0 = a$, $z_0 = b$. Тому $y_0 \le y \le z_0$, $y_0 \le z \le z_0$. Припускаючи, що $y_n \le y \le z_n$, $y_n \le z \le z_n$, використаємо (10.6) і (10.11) для того, щоб знайти, що

$$\begin{gathered} y - y_{n+1} \ge -A_1\,(z,y)\,(z-y) + A_1\,(z_n,y_n)\,(z_n-y_n) - \\ -A_1\,(y,y_n)\,(y-y_n) \ge A_1\,(z_n,y_n)\,(z_n - z) \ge \theta, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} z_{n+1} - y \ge A_1\,(z_n,y_n)\,(z_n-y_n) - A_1\,(z,y)\,(z-y) - \\ -A_1\,(z_n,y)\,(z_n-y) \ge A_1\,(z_n,y_n)\,(z - y_n) \ge \theta, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} z - y_{n+1} \ge A_1\,(z_n,y_n)\,(z_n-y_n) + A_1\,(z,y)\,(z-y) - \\ -A_1\,(z,y_n)\,(z-y_n) \ge A_1\,(z_n,y_n)\,(z_n - y) \ge \theta, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} z_{n+1} - z \ge A_1\,(z_n,y_n)\,(z_n-y_n) - A_1\,(z,y)\,(z-y) - \\ -A_1\,(z_n,z)\,(z_n-z) \ge A_1\,(z_n,y_n)\,(y - y_n) \ge \theta, \end{gathered}$$

тобто,

$$y_{n+1} \le y \le z_{n+1}, \quad y_{n+1} \le z \le z_{n+1}. \tag{10.15}$$

Тому згідно з принципом індукції і завдяки способові знаходження y^* та z^* маємо підставу для висновку про нерівності $y^* \le y \le z^*$ та $y^* \le z \le z^*$. Отже, що й треба було підтвердити, (y^*, z^*) є крайнім в E_0 розв'язком системи (10.11).

Наведені міркування дають підставу для такого підсумку.

Теорема 10.2. *Нехай: система (10.11) не може мати розв'язків (y,z) $(y, z \in E_0)$, відмінних від розв'язків вигляду (x,x); E – правильно напівупорядкований простір, справджується* *лівостороння умова Ліпшиця (10.4), оператори* Fx, $A_1(y,z)\,w$ *неперервні при* $x, y, z \in E_0$, $w \in [\theta, b-a]$, *оператор* $A_1(y,z)\,w$ *не спадає щодо* y, *не зростає щодо* z; *мають місце співвідношення (10.10). Тоді існує єдиний розв'язок* $x \in E_0 = [a,b]$ *рівняння (10.1), до якого збігаються послідовності* $\{y_n\}$ *та* $\{z_n\}$, *причому при* $n = 0, 1, \ldots$ *мають місце оцінки (10.8).*

Доведення. Якщо зауважити, що умови теореми означають, що компоненти y^*, z^* крайнього розв'язку (y^*, z^*) мусять бути рівними між собою: $y^* = z^*$, то єдиність крайнього розв'язку системи (10.11) і сама структура цієї системи (10.11), а також попередні міркування доводять теорему.

Однією з найпростіших умов для гарантування рівності $y^* = z^*$ є вимога про правосторонню ліпшицієвість оператора F, тобто, припущення про існування неперервного щодо $y, z \in E_0$, лінійного неперервного щодо $w \in [\theta, b-a]$ оператора $A_2(y,z)\,w$, для якого нерівність $y \le z$ призводить до нерівності

$$Fz - Fy \le A_2(z,y)(z-y). \tag{10.16}$$

Зважаючи на структуру алгоритму (10.6), йдеться, отже, про двосторонню ліпшицієвість (10.5) оператора F.

Теорема 10.3. *Нехай: 1) оператор* $A_1(y,z)\,w$ *не спадає щодо* y, *не зростає щодо* z; *2) справджується співвідношення (10.10); 3) справджується правостороння умова Ліпшиця; 4) справджується оцінка*

$$\|H\| \le q < 1 \tag{10.17}$$

для оператора

$$2A_1(z,y) + A_2(z,y) = H(z,y) = H \quad (y, z \in E_0). \tag{10.18}$$

Тоді послідовності $\{y_n\}$ *та* $\{z_n\}$ *збігаються до єдиного розв'язку* $x^* \in E_0$ *рівняння (10.1) не повільніше за геометричну прогресію із знаменником* q.

Доведення. Використовуючи (10.6), (10.13), (10.16), можна одержати

$$z_{n+1} - y_{n+1} \le (2A_1(z_n,y_n) + A_2(z_n,y_n))(z_n - y_n). \tag{10.19}$$

Беручи до уваги (10.17), доходимо висновку про існування границь y^* та z^* послідовностей $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ і про рівність $y^* = z^*$. Позначимо $x^* = y^* = z^*$. Можна стандартним способом пересвідчитися, що x^* є єдиним в E_0 розв'язком рівняння (10.1). Завдяки (10.19) матимемо

$$\max\{\|y_{n+1} - x^*\|, \|z_{n+1} - x^*\|\} \le \mathrm{q} \max\{\|y_n - x^*\|, \|z_n - x^*\|\},$$

що є підставою вважати теорему доведеною.

Очевидно, що для доведення попередньої теореми можна було б скористатися умовою Ліпшиця (10.3), яка випливає з одночасної правосторонньої і лівосторонньої ліпшицієвості (10.5). Однак числа L та q, взагалі кажучи, можуть бути різними. Деколи можна вважати, що оператор $A_2(y,z)\,w$ має вигляд

$$A_2(y,z)\,w = -A_1(y,z)\,w + \alpha(y,z)\,w, \tag{10.20}$$

де $\alpha(y,z)\,w$ – лінійний додатній щодо $w \in [\theta, b-a]$, неперервний щодо y, z, w оператор $(y, z \in E_0)$. У цьому випадку формула (10.18) має вигляд

$$H = H(z,y) = A_1(z,y) + \alpha(z,y)\,. \tag{10.21}$$

Така ситуація може трапитися, зокрема, за припущення, що F має першу і другу похідні Фреше $F'(z)\,w$ та $F''(z)\,tw$ при від'ємності першої з них та додатності другої, якщо прийняти

$$A_1(y,z)\,w = -F'(z)\,w, \quad \alpha(y,z)\,w = \frac{1}{2}F''(z)\,(z-y)\,w. \tag{10.22}$$

Подібним способом можна дослідити алгоритм

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -A_2(z_n, y_n)\,(z_n - y_n) + F z_n, \\ z_{n+1} &= A_2(z_n, y_n)\,(z_n - y_n) + F y_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,, \end{aligned} \tag{10.23}$$

якщо допустити, що F задовольняє правосторонню умову Ліпшиця (10.16).

Теорема 10.4. *Нехай: 1) справджується правостороння умова Ліпшиця з неперервним щодо* y, z, w $(y, z \in E_0,\ w \in [\theta, b-a])$ *лінійним додатнім щодо* w *оператором* $A_2(y,z)\,w$ *і при цьому оператор* $A_1(y,z)\,w$ *не спадає щодо* y*, не зростає щодо* z*; 2) правдиві* *співвідношення (10.7) для* $y_0 = a$, $z_0 = b$, y_1, z_1, *які задовольняють співвідношення (10.23) при* $n = 0$, *де* $x \in E_0$ *– розв'язок рівняння (10.1). Тоді при* $n = 0,\ 1,\ \ldots$ *для алгоритму (10.23) мають місце співвідношення (10.8).*

Доведення. Придатна схема міркувань, за якою доведено теорему 10.1. Однак матимемо деякі зміни в подробицях. Тому, використовуючи всюди (10.23) замість (10.6), знаходимо

$$y_{n+1} - y_n = -A_2\left(z_n, y_n\right)\left(z_n - y_n\right) + Fz_n + A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right) \times$$

$$\times \left(z_{n-1} - y_{n-1}\right) - Fz_{n-1} \geq -A_2\left(z_n, y_n\right)\left(z_n - y_n\right) +$$

$$+A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(z_{n-1} - y_{n-1}\right) - A_2\left(z_{n-1}, z_n\right)\left(z_{n-1} - z_n\right) \geq$$

$$\geq -A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(z_n - y_n\right) + A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(z_{n-1} - y_{n-1}\right) -$$

$$-A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(z_{n-1} - z_n\right) = A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(y_n - y_{n-1}\right) \geq \theta,$$

$$z_n - z_{n+1} = A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(z_{n-1} - y_{n-1}\right) + Fy_{n-1} - A_2\left(z_n, y_n\right) \times$$

$$\left(z_n - y_n\right) - Fy_n \geq\geq A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(z_{n-1} - y_{n-1}\right) -$$

$$-A_2\left(z_n, y_n\right)\left(z_n - y_n\right) - A_2\left(y_n, y_{n-1}\right)\left(y_n - y_{n-1}\right) \geq$$

$$\geq A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(z_{n-1} - y_{n-1}\right) - A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(z_n - y_n\right) -$$

$$-A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(y_n - y_{n-1}\right) = A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(z_{n-1} - z_n\right) \geq \theta.$$

Звідси випливають нерівності (10.9). Далі отримаємо також

$$x - y_{n+1} = Fx + A_2\left(z_n, y_n\right)\left(z_n - y_n\right) - Fz_n \geq A_2\left(z_n, y_n\right) \times$$

$$\times \left(z_n - y_n\right) - A_2\left(z_n, x\right)\left(z_n - x\right) \geq A_2\left(z_n, y_n\right)\left(z_n - y_n\right) -$$

$$-A_2\left(z_n, y_n\right)\left(z_n - x\right) = A_2\left(z_n, y_n\right)\left(x - y_n\right) \geq \theta,$$

$$z_{n+1} - x = A_2\left(z_n, y_n\right)\left(z_n - y_n\right) + Fy_n - Fx \geq A_2\left(z_n, y_n\right) \times$$

$$\times \left(z_n - y_n\right) - A_2\left(x, y_n\right)\left(x - y_n\right) \geq A_2\left(z_n, y_n\right)\left(z_n - y_n\right) -$$

$$-A_2\left(z_n, y_n\right)\left(x - y_n\right) = A_2\left(z_n, y_n\right)\left(z_n - x\right) \geq \theta,$$

що призводить до нерівностей $y_{n+1} \leq x$, $z_{n+1} \geq x$. Вони у поєднанні з уже доведеними нерівностями (10.9) підтверджують обгрунтованість переходу від $n = k - 1$ до $n = k$ в (10.8), тобто обгрунтованість кроку індукції для процесу (10.23) у співвідношеннях (10.8). Це означає, що теорему доведено.

Так само як і для системи (10.11) можна довести існування крайнього розв'язку (y^*, z^*) в E_0 системи

$$\begin{aligned} y &= -A_2\left(z,y\right)\left(z-y\right)+Fz, \\ z &= A_2\left(z,y\right)\left(z-y\right)+Fy \end{aligned} \tag{10.24}$$

і на цьому шляху одержати для алгоритму (10.23) аналог теореми 10.2. При цьому у подальших міркуваннях відштовхуватимемося від співвідношень (10.10) замість (10.7), не постулюючи існування розв'язку рівняння (10.1). Для цього спочатку переконаємося, що з нерівності $z_n \geq y_n$ випливає нерівність $z_{n+1} \geq y_{n+1}$. Використовуючи (10.23) і правосторонню ліпшицієвість, знайдемо

$$\begin{aligned} &z_{n+1} - y_{n+1} = 2A_2\left(z_n, y_n\right)\left(z_n - y_n\right) + Fy_n - Fz_n \geq \\ &\geq 2A_2\left(z_n, y_n\right)\left(z_n - y_n\right) - A_2\left(z_n, y_n\right)\left(z_n - y_n\right) \geq \theta. \end{aligned}$$

Разом з (10.9), які вже отримані як фрагмент доведення теореми 10.3, це означає обгрунтованість переходу в (10.13) від $n = k-1$ до $n = k$. Інші подробиці доведення теореми 10.2 можна повторити цілком, замінюючи тільки оператор $A_1\left(y,z\right)w$ оператором $A_2\left(y,z\right)w$. У підсумку матимемо такий аналог теореми 10.2.

Теорема 10.5. *Нехай: 1) система (10.24) не може мати розв'язків* (y,z) $\quad (y, z \in E_0)$, *відмінних від розв'язків вигляду* (x,x); *2) E – правильно напівупорядкований простір; 3) справджується правостороння умова Ліпшиця (10.16),* Fx, $A_2\left(y,z\right)w$ *– неперервні при* $x, y, z \in E_0$, $w \in [\theta, b-a]$, *оператор* $A_2\left(y,z\right)w$ *не спадає щодо* y, *не зростає щодо* z; *4) правдиві співвідношення (10.10). Тоді існує єдиний розв'язок* $x \in E_0$ *рівняння (10.1), до цього розв'язку збігаються послідовності* $\{y_n\}$ *та* $\{z_n\}$, *утворені за допомогою ітераційного процесу (10.23), і, крім того, мають місце оцінки (10.8) при* $n = 0, 1, \ldots$.

Оцінюючи збіжність алгоритму (10.23), можна отримати аналог теореми 10.3. Відповідні умови і обгрунтування такого аналогу практично повторюють відповідні умови і обгрунтування самої теореми 10.3, у яких потрібно лише скрізь замінити $A_1\left(y,z\right)w$ на $A_2\left(y,z\right)w$. Це стосується також до формул (10.20), (10.21) із взаємною заміною $A_1\left(y,z\right)w$ та $A_2\left(y,z\right)w$.

§11. Квазічаплигінські алгоритми

Винесений у заголовок термін будемо вживати для алгоритмів, що поєднують ідеї методу Чаплигіна і двосторонніх алгоритмів з односторонньо ліпшицієвими операторами з §10. Оправдання для них вбачаємо, зокрема, в тому, що використання методів чаплигінського типу обмежене – серед інших причин – через потребу на кожному кроці ітераційного процесу розв'язувати лінеаризовані рівняння “точно” або “достатньо точно”. Часто це важко або й неможливо реалізувати. Тому на практиці нерідко втрачається не лише надлінійний характер збіжності, а й двосторонність і монотонність реального ітераційного процесу. За спробу проаналізувати описану ситуацію можна прийняти пропонований далі підхід до побудови двосторонніх ітераційних алгоритмів.

Розглянемо рівняння

$$x = Fx \tag{11.1}$$

у напівупорядкованому просторі E з неперервним на відрізку $E_0 = [a, b]$ ($a, b \in E$, $a \leq b$) оператором F. Постулюємо такі припущення:

1) *Задані неперервні щодо $y, z \in E_0$, лінійні неперервні щодо $w \in [\theta, b - a]$ оператори $G_1(y,z)\,w$, $\alpha_1(y,z)\,w$, $A_1(y,z)\,w$, для яких при $y \leq z$, $y, z \in E_0$ будемо мати*

$$(G_1(y,z) + \alpha_1(y,z) - A_1(z,y))\,(z - y) \leq Fz - Fy; \tag{11.2}$$

2) *Оператори $G_1(y,z)\,w$, $\alpha_1(y,z)\,w$, $A_1(y,z)\,w$ не спадають щодо y, не зростають щодо z, $\alpha_1(y,z)\,w$, $A_1(y,z)\,w$ додатні як лінійні оператори щодо w;*

3) *Кожна з нерівностей*

$$\begin{aligned} &w \geq G_1(y,z)\,w, \\ &w \geq (G_1(y,z) + \alpha_1(y,z))\,w \end{aligned}$$

спричинює нерівність $w \geq \theta$.

4) *При $y_0 = a$, $z_0 = b$ система рівнянь*

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = G_1(y_n, z_n)\,(y_{n+1} - y_n) - A_1(z_n, y_n)\,(z_n - y_n) + Fy_n, \\ &z_{n+1} = (G_1(y_n, z_n) + \alpha_1(y_n, z_n))\,(z_{n+1} - z_n) + \\ &+ A_1(z_n, y_n)\,(z_n - y_n) + Fz_n \end{aligned} \tag{11.3}$$

для кожного $n = 0, 1, \ldots$ *має розв'язок* (y_{n+1}, z_{n+1}) $(y_{n+1}, z_{n+1} \in E_0)$.

Теорема 11.1. *Нехай справджуються умови 1) – 4), існує розв'язок* $x^* \in E_0$ *рівняння (11.1) і, крім того, справджуються співвідношення*

$$y_0 \le y_1 \le x^* \le z_1 \le z_0. \tag{11.4}$$

Тоді

$$y_n \le y_{n+1} \le x^* \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{11.5}$$

Доведення. Рівності (11.3) та умови 1), 2), 4) і (11.4) слугують підставою для співвідношень

$$\begin{aligned}
&y_2 - y_1 = G_1(y_1, z_1)(y_2 - y_1) - A_1(z_1, y_1)(z_1 - y_1) + Fy_1 - \\
&-G_1(y_0, z_0)(y_1 - y_0) + A_1(z_0, y_0)(z_0 - y_0) - Fy_0 \ge G_1(y_1, z_1) \times \\
&\times (y_2 - y_1) - G_1(y_0, z_0)(y_1 - y_0) + \alpha_1(y_0, y_1)(y_0 - y_1) + \\
&+A_1(z_0, y_0)(z_0 - y_0) - A_1(z_1, y_1)(z_1 - y_1) + G_1(y_0, y_1)(y_1 - y_0) - \\
&-A_1(y_0, y_1)(y_0 - y_1) \ge G_1(y_1, z_1)(y_2 - y_1) + (G_1(y_0, y_1) - \\
&-G_1(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + A_1(z_0, y_0)(z_0 - z_1) \ge G_1(y_1, z_1)(y_2 - y_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z_1 - z_2 = G_1(y_0, z_0)(z_1 - z_0) + \alpha_1(y_0, z_0)(z_1 - z_0) + A_1(z_0, y_0) \times \\
&\times (z_0 - y_0) + Fz_0 - G_1(y_1, z_1)(z_2 - z_1) - \alpha_1(y_1, z_1)(z_2 - z_1) - \\
&-A_1(z_1, y_1)(z_1 - y_1) - Fz_1 \ge (G_1(y_1, z_1) + \alpha_1(y_1, z_1))(z_1 - z_2) - \\
&-G_1(y_0, z_0)(z_0 - z_1) + G_1(z_1, z_0)(z_0 - z_1) + A_1(z_0, y_0)(z_0 - y_0) - \\
&-A_1(z_1, y_1)(z_1 - y_1) - A_1(z_0, z_1)(z_0 - z_1) - \alpha_1(y_0, z_0)(z_0 - z_1) + \\
&+\alpha_1(z_1, z_0)(z_0 - z_1) \ge (G_1(y_1, z_1) + \alpha_1(y_1, z_1))(z_1 - z_2).
\end{aligned}$$

Отже, $y_2 - y_1 \ge G_1(y_1, z_1)(y_2 - y_1)$, $z_1 - z_2 \ge (G_1(y_1, z_1) + \alpha_1(y_1, z_1))(z_1 - z_2)$. Звертаючись до умови 3), робимо висновок, що

$$y_1 \le y_2, \quad z_2 \le z_1. \tag{11.6}$$

З (11.1) та (11.3) випливає також

$$\begin{aligned}
&x^* - y_2 = Fx^* - Fy_1 + G_1(y_1, z_1)(x^* - y_2) + A_1(z_1, y_1)(z_1 - y_1) - \\
&-G_1(y_1, z_1)(x^* - y_1) \ge G_1(y_1, z_1)(x^* - y_2) + G_1(x^*, y_1)(x^* - y_1) - \\
&-G_1(y_1, z_1)(x^* - y_1) + A_1(z_1, y_1)(z_1 - y_1) - A_1(y_1, x^*)(x^* - y_1) + \\
&+\alpha_1(x^*, y_1)(x^* - y_1) \ge G_1(y_1, z_1)(x^* - y_2),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&z_2 - x^* = G_1(y_1, z_1)(z_2 - x^*) + \alpha_1(y_1, z_1)(z_2 - x^*) + A_1(z_1, y_1) \times \\
&\times (z_1 - y_1) - G_1(y_1, z_1)(z_1 - x^*) - \alpha_1(y_1, z_1)(z_1 - x^*) + Fz_1 - Fx^* \geq \\
&\geq (G_1(y_1, z_1) + \alpha_1(y_1, z_1))(z_2 - x^*) - G_1(y_1, z_1)(z_1 - x^*) + \\
&+ G_1(x^*, z_1)(z_1 - x^*) + A_1(z_1, y_1)(z_1 - y_1) - A_1(z_1, x^*)(z_1 - x^*) - \\
&- \alpha_1(y_1, z_1)(z_1 - x^*) - \alpha_1(x^*, z_1)(x^* - z_1) \geq \\
&\geq (G_1(y_1, z_1) + \alpha_1(y_1, z_1))(z_2 - x^*).
\end{aligned}
$$

Звідси, знову покликаючись на умову 3), отримуємо $x^* - y_2 \geq \theta$, $z_2 - x^* \geq \theta$. Таким чином, враховуючи (11.6) переконуємось, що (11.4) призводять до нерівностей (11.5) для $n = 1$. Це є підставою вважати доведеними нерівності (11.5).

Нехай існування розв'язку $x^* \in E_0$ рівняння (11.1) не постулюється. З нерівностей

$$y_0 \leq y_1 \leq z_1 \leq z_0 \tag{11.7}$$

за виконання умов 1) – 4) можна отримати нерівності

$$y_n \leq y_{n+1} \leq z_{n+1} \leq z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{11.8}$$

До того ж висновку (11.8) можна дійти, замінивши припущення (11.7) таким: для y_0, z_0 справджуються співвідношення

$$
\begin{aligned}
&y_0 \leq -A_1(y_0, z_0)(z_0 - y_0) + Fy_0, \\
&z_0 \geq \quad A_1(y_0, z_0)(z_0 - y_0) + Fz_0 \quad (y_0 \leq z_0).
\end{aligned} \tag{11.9}
$$

Що це справді так, переконуємося, отримавши з (11.3) та (11.9) нерівності

$$
\begin{aligned}
&y_1 - y_0 \geq G_1(y_1, z_1)(y_1 - y_0), \\
&z_0 - z_1 \geq (G_1(y_1, z_1) + \alpha_1(y_1, z_1))(z_0 - z_1).
\end{aligned} \tag{11.10}
$$

Це дає змогу за допомогою умови 3) отримати нерівності

$$y_0 \leq y_1, \quad z_1 \leq z_0. \tag{11.11}$$

Для доведення нерівності

$$y_1 \leq z_1 \tag{11.12}$$

потрібно спочатку отримати, що

$$z_1 - y_0 \geq \theta. \tag{11.13}$$

Задля цього скористаємося з (11.3), (11.9) та з умов 1), 2). Матимемо

$$\begin{aligned}
&z_1 - y_0 \geq G_1(y_0, z_0)(z_1 - z_0) + \alpha_1(y_0, z_0)(z_1 - z_0) + A_1(z_0, y_0) \times \\
&\times (z_0 - y_0) + Fz_0 - Fy_0 + A_1(z_0, y_0)(z_0 - y_0) \geq G_1(y_0, z_0)(z_1 - z_0) + \\
&+ \alpha_1(y_0, z_0)(z_1 - z_0) + 2A_1(z_0, y_0)(z_0 - y_0) + G_1(y_0, z_0)(z_0 - y_0) + \\
&+ \alpha_1(y_0, z_0)(z_0 - y_0) - A_1(y_0, z_0)(z_0 - y_0) \geq \\
&\geq (G_1(y_0, z_0) + \alpha_1(y_0, z_0))(z_1 - y_0).
\end{aligned}$$

Використання умови 3) підтверджує правдивість (11.13). Тепер знаходимо

$$\begin{aligned}
&z_1 - y_1 = G_1(y_0, z_0)(z_1 - y_1) - G_1(y_0, z_0)(z_0 - y_0) + \alpha_1(y_0, z_0) \times \\
&\times (z_1 - z_0) + 2A_1(y_0, z_0)(z_0 - y_0) + Fz_0 - Fy_0 \geq G_1(y_0, z_0)(z_1 - y_1) + \\
&+ A_1(z_0, y_0)(z_0 - y_0) - \alpha_1(y_0, z_0)(z_0 - z_1) + \alpha_1(y_0, z_0)(z_0 - y_0) \geq \\
&\geq G_1(y_0, z_0)(z_1 - y_1)
\end{aligned}$$

й, оскільки можна покликатися на умову 3), отримуємо (11.12). Таким чином, з (11.9) випливають нерівності (11.7).

Підтвердимо тепер, що зазначені припущення дають змогу стверджувати, що y_1, z_1 задовольняють нерівності

$$\begin{aligned}
y_1 &\leq -A_1(z_1, y_1)(z_1 - y_1) + Fy_1, \\
z_1 &\geq A_2(z_1, y_1)(z_1 - y_1) + Fz_1.
\end{aligned} \tag{11.14}$$

Обґрунтованість цього видно з такого викладу.

$$\begin{aligned}
&-A_1(z_1, y_1)(z_1 - y_1) + Fy_1 - y_1 = -A_1(z_1, y_1)(z_1 - y_1) + Fy_1 - \\
&- [G_1(y_0, z_0)(y_1 - y_0) - A_1(z_0, y_0)(z_0 - y_0) + Fy_0] \geq -A_1(z_1, y_1) \times \\
&\times (z_1 - y_1) + A_1(z_0, y_0)(z_0 - y_0) - A_1(y_1, y_0)(y_1 - y_0) + (G_1(y_0, y_1) - \\
&- G_1(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + \alpha_1(y_0, y_1)(y_1 - y_0) \geq \\
&\geq A_1(z_0, y_0)(-z_1 + y_1 + z_0 - y_0 - y_1 + y_0) \geq \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z_1 - [A_1(z_1, y_1)(z_1 - y_1) + Fz_1] = G_1(y_0, z_0)(z_1 - z_0) + \alpha_1(y_0, z_0) \times \\
&\times (z_1 - z_0) + A_1(z_0, y_0)(z_0 - y_0) - A_1(z_1, y_1)(z_1 - y_1) + Fz_0 - Fz_1 \geq \\
&\geq (G_1(z_1, z_0) - G_1(y_0, z_0))(z_0 - z_1) + (\alpha_1(z_1, z_0) - \alpha_1(y_0, z_0)) \times \\
&\times (z_0 - z_1) + A_1(z_0, y_0)(z_0 - y_0 - z_1 + y_1 - z_0 + z_1) \geq \theta.
\end{aligned}$$

Сформулюємо твердження, які підсумують наведені міркування.

Теорема 11.2. *Нехай справджуються умови 1) – 4), а також співвідношення (11.9). Тоді мають місце нерівності (11.8).*

Приєднуючи до умов теореми 11.2 вимогу, щоб E був правильно напівупорядкованим простором, матимемо можливість стверджувати, що існують $y^*, z^* \in E_0$, до яких збігаються відповідно послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$. Однак це не дає підстав для висновку, що y^* або z^* є розв'язком рівняння (11.1). Можна лише упевнитися, що пара (y^*, z^*) є розв'язком системи

$$\begin{aligned} y &= -A_1\,(z,y)\,(z-y) + Fy, \\ z &= \quad A_1\,(z,y)\,(z-y) + Fz. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Можна довести, що цей розв'язок є крайнім в E_0 системи (11.15). Це означає, що для всякого розв'язку $x^* \in E_0$ рівняння (11.1) матимемо оцінки

$$y^* \leq x^* \leq z^*, \tag{11.16}$$

бо (x^*, x^*) в такому випадку є розв'язком системи (11.15). Якщо при цьому система (11.15) має єдиний розв'язок в $E_0 \times E_0$, то розв'язок (x^*, x^*) і крайній розв'язок (y^*, z^*) співпадають між собою. Отже, співвідношення (11.16) перетворюються у рівності $y^* = z^* = x^*$, й тому x^* є єдиним в E_0 розв'язком рівняння (11.1).

Теорема 11.3. *Якщо E – правильно напівупорядкований простір, справджуються умови теореми 11.2, і система (11.15) має єдиний в $E_0 \times E_0$ розв'язок, і має розв'язок в E_0 рівняння (11.1), то послідовності $\{y_n\}$ і $\{z_n\}$, побудовані за формулами (11.3), збігаються до єдиного в E_0 розв'язку рівняння (11.1).*

Доведення випливає з наведених перед формулюванням теореми міркувань.

Зробимо додаткові припущення щодо оператора F, вважаючи E напівупорядкованим банаховим простором. Нехай:

5) *Заданий неперервний щодо $y, z \in E_0$, неперервний лінійний додатній оператор $\beta_1\,(y,z)\,w$, для якого при $y, z \in E_0$, $y \leq z$ будемо мати*

$$Fz - Fy \leq \left(G_1\,(y,z) + \alpha_1\,(y,z) + \beta_1\,(y,z) - A_1\,(z,y)\right)(z-y)\,; \tag{11.17}$$

6) *При $y, z \in E_0$ існує додатній лінійний неперервний обернений оператор*

$$\Gamma_1\,(y,z) = \left(I - G_1\,(y,z) - \alpha_1\,(y,z)\right)^{-1},$$

причому для оператора

$$Q_1(y,z)=\Gamma_1(y,z)\left(A_1(z,y)+\beta_1(y,z)\right)= \\ =\left(I-G_1(y,z)-\alpha_1(y,z)\right)^{-1}\left(A_1(z,y)+\beta_1(y,z)\right) \tag{11.18}$$

має місце оцінка

$$\|Q_1(y,z)\|\le q(y,z)\,\|z-y\|^{\gamma}\quad (\gamma\ge 0,\ y,z\in E_0)\,. \tag{11.19}$$

Теорема 11.4. *Нехай справджуються умови 1) – 6) і, крім того,*

$$\|Q_1(y,z)\|\le q(y,z)\,\|z-y\|^{\gamma}\le q_0<1\quad (y,z\in E_0)\,. \tag{11.20}$$

Тоді до єдиного в E_0 розв'язку $x^*\in E_0$ рівняння (11.1) збігається монотонно не спадаючи послідовність $\{y_n\}$ та монотонно не зростаючи послідовність $\{z_n\}$. При цьому мають місце оцінки

$$\max\left\{\|x^*-y_{n+1}\|,\|z_{n+1}-x^*\|\right\}\le q_0\,\|z_n-y_n\|\,, \tag{11.21}$$

$$\max\left\{\|x^*-y_{n+1}\|,\|z_{n+1}-x^*\|\right\}\le q\,\|z_n-y_n\|^{1+\gamma} \tag{11.22}$$

та

$$\|z_{n+1}-y_{n+1}\|\le q_0\,\|z_n-y_n\|\,, \tag{11.23}$$

$$\|z_{n+1}-y_{n+1}\|\le q\,\|z_n-y_n\|^{1+\gamma}\,, \tag{11.24}$$

де

$$q\ge\max_{y,z\in E_0}q(y,z)\,. \tag{11.25}$$

Доведення. Завдяки (11.8) та (11.17) можна знайти

$$z_{n+1}-y_{n+1}=G_1(y_n,z_n)(z_{n+1}-y_{n+1})-\alpha_1(y_n,z_n)(z_n-z_{n+1})- \\ -G_1(y_n,z_n)(z_n-y_n)+2A_1(z_n,y_n)(z_n-y_n)+Fz_n-Fy_n\le \\ \le G_1(y_n,z_n)(z_{n+1}-y_{n+1})+\alpha_1(y_n,z_n)(z_{n+1}-y_n)+ \\ +\left(A_1(z_n,y_n)+\beta_1(y_n,z_n)\right)(z_n-y_n)\le\left(G_1(y_n,z_n)+\alpha_1(y_n,z_n)\right)\times \\ \times(z_{n+1}-y_{n+1})+\left(A_1(z_n,y_n)+\beta_1(y_n,z_n)\right)(z_n-y_n)\,.$$

Звідси, маючи на увазі умову 6), одержуємо

$$z_{n+1}-y_{n+1}\le Q_1(y_n,z_n)(z_n-y_n) \tag{11.26}$$

з визначеним за формулою (11.18) оператором $Q_1(y,z)$. Співвідношення (11.19) і (11.20) гарантують збіжність послідовностей $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ до єдиної спільної границі $x^* \in E_0 = [a,b]$, яка з огляду на неперервність операторів $Fx,\ A_1(x,y)\,w,\ G_1(x,y)\,w,\ \alpha_1(x,y)\,w$, є розв'язком рівняння (11.1) в E_0 і цей розв'язок – єдиний. Монотонність послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ гарантують співвідношення (11.5). Тому матимемо нерівності

$$\theta \le x^* - y_n \le z_n - y_n, \quad \theta \le z_n - x^* \le z_n - y_n \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

з яких випливають оцінки (11.21) та (11.22).

Зауваження 11.1. *Оцінка (11.22) можлива для* $\gamma > 1$ *й у тих випадках, коли жодний з операторів* $G_1(y,z)$, $G_1(y,z) + \alpha_1(y,z)$, $G_1(y,z) + \alpha_1(y,z) - A_1(z,y)$ *та* $G_1(y,z) + \alpha_1(y,z) + \beta_1(y,z) - A_1(z,y)$ *не співпадає з похідною від оператора* F, *а також і для того випадку, коли оператор* F *– недиференційовний.*

Зауваження 11.2. *Як частинний випадок алгоритму (11.3) з нього отримується алгоритм (9.4) за припущення, що* $A_1(y,z)\,w$ *є нульовим оператором. Якщо ж нуль-операторами є* $G_1(y,z)$, $\alpha_1(y,z)$, *то з (11.3) одержимо алгоритм (10.6).*

Зауваження 11.3. *Ітераційний процес (11.3) можна тлумачити як спосіб адаптації алгоритму (9.4) до ситуації, коли оператор* $G_1(y,z)$ *у формулах (9.4) доцільно розбити на два доданки* G_1' *та* A_1 *(перший знову позначимо через* G_1*) таким способом, щоб полегшити розв'язання системи (9.4) щодо* y_{n+1}, z_{n+1}, *зберігаючи двосторонність і монотонність ітерацій. Оператори* $\alpha_1(y,z)$ *та* $\beta_1(y,z)$, *як і в §9, трактуємо як збурення оператора* $G_1(y,z)$, *за яких зберігається також і надлінійна збіжність ітерацій (9.4).*

Замінимо умови 1) – 4) іншими припущеннями.

1a) *Оператор* F *– неперервний в* E_0 *і задані неперервні щодо* $y, z \in E_0$ *лінійні неперервні щодо* w *оператори* $G_2(y,z)\,w$, $\alpha_2(y,z)\,w$, $A_2(y,z)\,w$, *для яких з нерівності* $y \le z$ *випливає нерівність*

$$Fz - Fy \le \left(A_2(z,y) - G_2(y,z) - \alpha_2(y,z)\right)(z - y). \qquad (11.27)$$

2a) *Оператори* $G_2(y,z)\,w$, $\alpha_2(y,z)\,w$, $A_2(y,z)\,w$ *не спадають щодо* y, *не зростають щодо* z, $\alpha_2(y,z)\,w$, $A_2(y,z)\,w$ *– додатні як лінійні оператори щодо* w.

3a) *Система нерівностей*

$$\begin{aligned} &\varphi \geq G_2(y,z)\,\psi, \\ &\psi \geq (G_2(y,z) + \alpha_2(y,z))\,\varphi \end{aligned}$$

має тільки такі розв'язки, що $\varphi \geq \theta$, $\psi \geq \theta$.

4a) *Система рівнянь*

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = -G_2(y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n) - \\ &-A_2(z_n,y_n)(z_n-y_n) + Fz_n, \\ &z_{n+1} = -(G_2(y_n,z_n)+\alpha_2(y_n,z_n))(y_{n+1}-y_n) + \\ &+A_2(z_n,y_n)(z_n-y_n) + Fy_n \end{aligned} \tag{11.28}$$

для кожного $n = 0,1,\ldots$ *має розв'язок* (y_{n+1}, z_{n+1}) ($y_{n+1}, z_{n+1} \in E_0$).

Теорема 11.5. *Нехай: а) справджуються умови 1а) – 4а); б) рівняння (11.1) має розв'язок* $x^* \in E_0$; *в) для* y_0, y_1, z_0, z_1, *що задовольняють (11.28) при* $n = 0$ *з* $y_0 = a$, $z_0 = b$, *правдиві співвідношення (11.4). Тоді мають місце співвідношення (11.5).*

Доведення. Можна міркувати майже так само як і при доведенні теореми 11.1. З (11.28), (11.4) та умов 1а), 2а), 4а), якщо припустити, що нерівності (11.5) мають місце для якогось $n > 0$, випливає

$$\begin{aligned} &y_{n+1} - y_n = G_2(y_n,z_n)(z_n - z_{n+1}) - A_2(z_n,y_n)(z_n-y_n) + Fz_n - \\ &-G_2(y_{n-1},z_{n-1})(z_{n-1}-z_n) + A_2(z_{n-1},y_{n-1})(z_{n-1}-y_{n-1}) - Fz_{n-1} \geq \\ &\geq G_2(y_n,z_n)(z_n-z_{n+1}) - G_2(y_{n-1},z_{n-1})(z_{n-1}-z_n) + A_2(z_{n-1},y_{n-1}) \times \\ &\times (z_{n-1}-y_{n-1}) - A_2(z_n,y_n)(z_n-y_n) + (G_2(z_n,z_{n-1}) + \alpha_2(z_n,z_{n-1}) - \\ &-A_2(z_{n-1},z_n))(z_{n-1}-z_n) \geq G_2(y_n,z_n)(z_n-z_{n+1}) + \\ &+A_2(z_{n-1},z_n)(y_n-y_{n-1}) + (G_2(z_n,z_{n-1}) - G_2(y_{n-1},z_{n-1})) \times \\ &\times (z_{n-1}-z_n) + \alpha_2(z_n,z_{n-1})(z_{n-1}-z_n) \geq G_2(y_n,z_n)(z_n-z_{n+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &z_n - z_{n+1} = (G_2(y_n,z_n) + \alpha_2(y_n,z_n))(y_{n+1}-y_n) - A_2(z_n,y_n) \times \\ &\times (z_n-y_n) - Fy_n - (G_2(y_{n-1},z_{n-1}) + \alpha_2(y_{n-1},z_{n-1}))(y_n-y_{n-1}) + \\ &+A_2(z_{n-1},y_{n-1})(z_{n-1}-y_{n-1}) - Fy_{n-1} \geq (G_2(y_n,z_n) + \alpha_2(y_n,z_n)) \times \\ &\times (y_{n+1}-y_n) - A_2(z_n,y_n)(z_n-y_n) - G_2(y_{n-1},z_{n-1})(y_n-y_{n-1}) - \\ &-\alpha_2(y_{n-1},z_{n-1})(y_n-y_{n-1}) + A_2(z_{n-1},y_{n-1})(z_{n-1}-y_{n-1}) + \\ &+(G_2(y_{n-1},y_n) + \alpha_2(y_{n-1},y_n) - A_2(y_n,y_{n-1}))(y_n-y_{n-1}) \geq \\ &\geq (G_2(y_n,z_n) + \alpha_2(y_n,z_n))(y_{n+1}-y_n) + (G_2(y_{n-1},y_n) - \\ &-G_2(y_{n-1},z_{n-1}))(y_n-y_{n-1}) + (\alpha_2(y_{n-1},y_n) - \alpha_2(y_{n-1},z_{n-1})) \times \\ &\times (y_n-y_{n-1}) + A_2(z_{n-1},y_{n-1})(z_{n-1}-y_{n-1}) \geq \\ &\geq (G_2(y_n,z_n) + \alpha_2(y_n,z_n))(y_{n+1}-y_n). \end{aligned}$$

За умовою 3а) звідси одержуємо нерівності

$$y_n \le y_{n+1},\ z_n \ge z_{n+1}. \tag{11.29}$$

Подібним способом з (11.1) і (11.28) можна знайти

$$\begin{aligned}
&x^* - y_{n+1} = Fx^* - G_2(y_n, z_n)(z_n - z_{n+1}) + A_2(z_n, y_n)(z_n - y_n) - \\
&-Fz_n \ge G_2(y_n, z_n)(z_{n+1} - x^*) - G_2(y_n, z_n)(z_n - x^*) + \\
&+A_2(z_n, y_n)(z_n - y_n) - A_2(z_n, x^*)(z_n - x^*) + G_2(x^*, z_n)(z_n - x^*) + \\
&+\alpha_2(x^*, z_n)(z_n - x^*) \ge G_2(y_n, z_n)(z_{n+1} - x^*) + (G_2(x^*, z_n) - \\
&-G_2(y_n, z_n))(z_n - x^*) + \alpha_2(x^*, z_n)(z_n - x^*) + A_2(z_n, y_n)(x^* - y_n) \ge \\
&\ge G_2(y_n, z_n)(z_{n+1} - x^*),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z_{n+1} - x^* = -G_2(y_n, z_n)(y_{n+1} - y_n) - \alpha_2(y_n, z_n)(y_{n+1} - y_n) + \\
&+A_2(z_n, y_n)(z_n - y_n) + Fy_n - Fz_n \ge (G_2(y_n, z_n) + \alpha_2(y_n, z_n)) \times \\
&\times (x^* - y_{n+1}) - (G_2(y_n, z_n) + \alpha_2(y_n, z_n))(x^* - y_n) + A_2(z_n, y_n) \times \\
&\times (z_n - y_n) - A_2(x^*, y_n)(x^* - y_n) + G_2(y_n, x^*)(x^* - y_n) + \alpha_2(y_n, x^*) \times \\
&\times (x^* - y_n) \ge (G_2(y_n, z_n) + \alpha_2(y_n, z_n))(x^* - y_{n+1}) + (G_2(y_n, x^*) - \\
&-G_2(y_n, z_n))(x^* - y_n) + (\alpha_2(y_n, x^*) - \alpha_2(y_n, z_n))(x^* - y_n) + \\
&+A_2(z_n, y_n)(z_n - x^*) \ge (G_2(y_n, z_n) + \alpha_2(y_n, z_n))(x^* - y_{n+1}).
\end{aligned}$$

Звідси за допомогою умови 3а) знайдемо, що $y_{n+1} \le x^* \le z_{n+1}$. Це у поєднанні з (11.29) призводить до висновку, що для алгоритму (11.28) можливий перехід у нерівностях (11.5) від $n = k - 1$ до $n = k$, що й завершує доведення теореми.

В умовах теореми 11.5 можна замінити вимогу (11.4) на (11.7) і не постулювати існування розв'язку рівняння (11.1). В такому разі для ітераційного процесу (11.28) за виконання умов 1а) – 4а) з нерівностей (11.7) випливають нерівності (11.8). Умову (11.4), взагалі кажучи, можна замінити іншою.

Теорема 11.6. *Нехай: а)* $y_0 = a,\ z_0 = b$,

$$\begin{aligned}
&y_0 \le -A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) + Fz_0, \\
&z_0 \ge A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) + Fy_0;
\end{aligned} \tag{11.30}$$

б) справджуються умови 1а) – 4а). Тоді для послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *утворених за допомогою алгоритму (11.28) справджуються співвідношення (11.8).*

Доведення. Схема міркувань є такою самою, якою ми користувалися для доведення теореми 11.2. Скористаємося з (11.30), (11.28) для $n = 0$, щоб отримати нерівності (11.11). Знаходимо спочатку

$$
\begin{aligned}
&z_0 - y_1 \geq Fy_0 + A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) - G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) + \\
&+A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) - Fz_0 \geq -A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) + G_2(y_0, z_0) \times \\
&\times (z_0 - y_0) + \alpha_2(y_0, z_0)(z_0 - y_0) + A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) \\
&-G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) + A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) \geq G_2(y_0, z_0)(z_1 - y_0),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z_1 - y_0 \geq A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) - G_2(y_0, z_0)(y_1 - y_0) - \alpha_2(y_0, z_0) \times \\
&\times (y_1 - y_0) + Fy_0 - Fz_0 + A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) \geq A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) - \\
&-G_2(y_0, z_0)(y_1 - y_0) - \alpha_2(y_0, z_0)(y_1 - y_0) - A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) + \\
&+G_2(y_0, z_0)(z_0 - y_0) + \alpha_2(y_0, z_0)(z_0 - y_0) + A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) \geq \\
&\geq (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(z_0 - y_1).
\end{aligned}
$$

Умова 3а) дає змогу отримати звідси нерівності

$$
z_1 - y_0 \geq \theta, \quad z_0 - y_1 \geq \theta. \tag{11.31}
$$

Із (11.28) при $n = 0$ можна отримати, використовуючи (11.31)

$$
\begin{gathered}
z_1 - y_1 = Fy_0 - Fz_0 - G_2(y_0, z_0)(y_1 - y_0) - \alpha_2(y_0, z_0)(y_1 - y_0) + \\
+2A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) - G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) \geq -A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) + \\
+G_2(y_0, z_0)(z_0 - y_0) + \alpha_2(y_0, z_0)(z_0 - y_0) - G_2(y_0, z_0)(y_1 - y_0) - \\
-\alpha_2(y_0, z_0)(y_1 - y_0) + 2A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) - G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) \geq \\
\geq A_2(z_0, y_0)(z_0 - y_0) + G_2(y_0, z_0)(z_1 - y_1) + \alpha_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) \geq \\
\geq G_2(y_0, z_0)(z_1 - y_1).
\end{gathered}
$$

Тому умова 3а) призводить до нерівності $z_1 - y_1 \geq \theta$. Разом з (11.11) це підтверджує нерівності (11.7). Для обгрунтування можливості кроку індукції від $n = 0$ до $n = 1$ залишається довести нерівності

$$
\begin{aligned}
&y_1 \leq -A_2(z_1, y_1)(z_1 - y_1) + Fz_1, \\
&z_1 \geq A_2(z_1, y_1)(z_1 - y_1) + Fy_1.
\end{aligned} \tag{11.32}
$$

Знаходимо

$$
\begin{aligned}
&(-A_2(z_1,y_1)(z_1-y_1)+Fz_1)-y_1=-A_2(z_1,y_1)(z_1-y_1)+Fz_1+\\
&+A_2(z_0,y_0)(z_0-y_0)-G_2(y_0,z_0)(z_0-z_1)-Fz_0\geq\\
&\geq -A_2(z_1,y_1)(z_1-y_1)+A_2(z_0,y_0)(z_0-y_0)-G_2(y_0,z_0)(z_0-z_1)+\\
&+G_2(z_1,z_0)(z_0-z_1)+\alpha_2(z_1,z_0)(z_0-z_1)-A_2(z_0,z_1)(z_0-z_1)\geq\\
&\geq A_2(z_1,y_1)(y_1-y_0)+(G_2(z_1,z_0)-G_2(y_0,z_0))(z_0-z_1)+\\
&+\alpha_2(z_1,z_0)(z_0-z_1)\geq\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z_1-(A_2(z_1,y_1)(z_1-y_1)+Fy_1)=-G_2(y_0,z_0)(y_1-y_0)-\\
&-\alpha_2(y_0,z_0)(y_1-y_0)+A_2(z_0,y_0)(z_0-y_0)-A_2(z_1,y_1)(z_1-y_1)+\\
&+Fy_0-Fy_1\geq -G_2(y_0,z_0)(y_1-y_0)-\alpha_2(y_0,z_0)(y_1-y_0)+\\
&+A_2(z_0,y_0)(z_0-y_0)-A_2(z_1,y_1)(z_1-y_1)-A_2(y_1,y_0)(y_1-y_0)+\\
&+G_2(y_0,y_1)(y_1-y_0)+\alpha_2(y_0,y_1)(y_1-y_0)\geq A_2(z_1,y_1)(z_0-z_1)+\\
&+(G_2(y_0,y_1)-G_2(y_0,z_0))(y_1-y_0)+\\
&+(\alpha_2(y_0,y_1)-\alpha_2(y_0,z_0))(y_1-y_0)\geq\theta.
\end{aligned}
$$

Отже, обгрунтоване покликання на принцип індукції, завдяки якому теорему вважаємо доведеною.

При дослідженні процесу (11.28) на збіжність вважатимемо E правильно напівупорядкованим простором. Аналог теореми 11.3 для алгоритму (11.28) можна отримати таким самим способом, як отримано теорему 11.3 для алгоритму (11.3).

Теорема 11.7. *Нехай справджуються умови теореми 11.6, система*

$$
\begin{aligned}
y&=-A_2(z,y)(z-y)+Fz,\\
z&=A_2(z,y)(z-y)+Fy
\end{aligned}
\tag{11.33}
$$

має єдиний в $E_0\times E_0$ розв'язок і має розв'язок в E_0 рівняння (11.1). Тоді послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, отримані за допомогою ітераційного алгоритму (11.28), збігаються до єдиного в E_0 розв'язку рівняння (11.1).

Доведення не наводимо, бо лише незначними подробицями воно відрізняється від доведення теореми 11.3.

Для формулювання аналогу теореми 11.4 потрібні додаткові припущення. Нехай

5а) *Заданий неперервний щодо $y,z\in E_0$, додатній лінійний неперервний оператор $\beta_2(y,z)\,w$, для якого співвідношення $y\leq z$,*

$y, z \in E_0$ призводять до нерівності

$$\left(A_2(z, y) - G_2(y, z) - \alpha_2(y, z) - \beta_2(y, z)\right)(z - y) \leq Fz - Fy. \quad (11.34)$$

6а) *Справджуються припущення, які тільки потребують формальної заміни в умові 6) операторів $A_1,\ \alpha_1,\ G_1,\ \beta_1$ операторами $A_2,\ \ \alpha_2,\ \ G_2,\ \ \beta_2$ відповідно, зберігаючи всі інші позначення незмінними. При цьому залишаються незмінними формально усі співвідношення (11.18) – (11.26).*

Теорема 11.8. *Нехай справджуються умови 1а) – 6а) та (11.20). Тоді для алгоритму (11.28) зберігаються всі твердження теореми 11.4.*

Доведення пропускаємо, бо воно неістотно відрізняється від доведення теореми 11.4.

Зауваження 11.4. *Подібним способом можна дослідити також деякі інші алгоритми. Наприклад, замість ітераційних формул (11.3) або (11.28) можна скористатися формулами*

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = G_1(y_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) - A_1(y_n, y_n)(z_n - y_n) + Fy_n, \\ &z_{n+1} = \left(G_1(y_n, y_n) + \alpha_1(y_n, y_n)\right)(z_{n+1} - z_n) + \\ &+A_1(y_n, y_n)(z_n - y_n) + Fz_n \end{aligned} \quad (11.35)$$

або

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = -G_2(z_n, z_n)(z_{n+1} - z_n) - A_2(z_n, z_n)(z_n - y_n) + Fz_n, \\ &z_{n+1} = -\left(G_2(z_n, z_n) + \alpha_2(z_n, z_n)\right)(y_{n+1} - y_n) + \\ &+A_2(z_n, z_n)(z_n - y_n) + Fy_n, \end{aligned} \quad (11.36)$$

а також

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = G_1(z_n, z_n)(y_{n+1} - y_n) - A_1(z_n, z_n)(z_n - y_n) + Fy_n, \\ &z_{n+1} = \left(G_1(z_n, z_n) + \alpha_1(z_n, z_n)\right)(z_{n+1} - z_n) + \\ &+A_1(z_n, z_n)(z_n - y_n) + Fz_n \end{aligned} \quad (11.37)$$

або

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = -G_2(y_n, y_n)(z_{n+1} - z_n) - A_2(y_n, y_n)(z_n - y_n) + Fz_n, \\ &z_{n+1} = -\left(G_2(y_n, y_n) + \alpha_2(y_n, y_n)\right)(y_{n+1} - y_n) + \\ &+A_2(y_n, y_n)(z_n - y_n) + Fy_n, \end{aligned} \quad (11.38)$$

та деякими іншими ітераційними формулами, близькими за структурою до формул (11.3), (11.28). Обгрунтування таких алгоритмів можна провести за використаною для досліджень алгоритмів (11.3) і (11.28) схемою, вносячи відповідні зміни до умов, які можна отримати як аналоги умов 1) – 4) та 5) і 6).

§12. Аналог монотонного методу Ньютона для рівнянь з немонотонними операторами

Для рівняння вигляду

$$x = Fx \tag{12.1}$$

метод Ньютона можна описати за допомогою формул

$$x_{n+1} = F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{12.2}$$

де $F'(x_n)$ – похідна Фреше від оператора F в точці x_n. Його реалізація вимагає знаходження похідної $F'(x)$ від оператора F та оберненого оператора $\Gamma(x) = (I - F'(x))^{-1}$ у деякій області $\mathrm{D} \subseteq E$ (E – банахів простір), що містить розв'язок x^* рівняння (12.1). Ліпшицієвість похідної $F'(x)$ щодо x забезпечує за певних припущень квадратичну збіжнусть ітерацій $\{x_n\}$ до x^*. Оскільки насправді (12.2) рідко вдається розв'язати щодо x_{n+1}, то доводиться апроксимувати $F'(x)$ та $\Gamma(x)$ тим чи іншим способом. Здебільшого це призводить до втрати квадратичного характеру збіжності реальних варіантів алгоритму (12.2). Самий метод Ньютона і різні аспекти його застосовності до тих чи інших класів рівнянь піддані докладному аналізові у численних роботах (див., напр., [28, 33, 41, 79]). Основний акцент досліджень в [79] стосується алгоритмів, для яких постулюється диференційовність Fx.

Досліджуватимемо ітераційний процес

$$x_{n+1} = G_1(x_{n-1}, x_n)(x_{n+1} - x_n) + Fx_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{12.3}$$

який охоплює метод Ньютона (12.2) при $G_1(x_{n-1}, x_n) = F'(x_n)$ і для якого у загальному випадку не вимагаємо існування $F'(x)$. При цьому існування $F'(x)$ не конче означає, що $G_1(x_{n-1}, x_n) = F'(x_n)$. Вказуємо, зокрема, умови, за яких алгоритм (12.3) може мати квадратичну швидкість збіжності деколи й тоді, коли F не є диференційовним оператором. Будемо вважати E напівупорядкованим банаховим простором, D $\subseteq$ E – деякою підмножиною в E. Сформулюємо основні припущення.

(А$_1$). *Заданий лінійний неперервний щодо $w \in E$, неперервний неспадний щодо $y, z \in D$ оператор $G_1(y,z)\,w$, для якого при $y, z \in D$, $y \leq z$ маємо*

$$G_1(y,z)(z-y) \leq Fz - Fy. \tag{12.4}$$

(Б$_1$). *Заданий такий лінійний неперервний додатній щодо $w \in E$, неперервний щодо $y, z \in D$ оператор $\alpha_1(y,z)\,w$, що із співвідношень $y \leq z$, $y, z \in D$ випливає*

$$Fz - Fy \leq \left(G_1(y,z) + \alpha_1(y,z)\right)(z-y). \tag{12.5}$$

(В$_1$). *З нерівності*

$$w \geq G_1(y,z)\,w \quad (y, z \in D) \tag{12.6}$$

випливає, що $w \geq \theta$, де θ – нульовий елемент в E.

(Г$_1$). *Заданий елемент $u \in D$, для якого*

$$u \leq Fu. \tag{12.7}$$

Розглянемо ітераційний процес

$$y_1 = G_1(y_0, y_0)(y_1 - y_0) + Fy_0, \tag{12.8}$$

$$y_{n+1} = G_1(y_{n-1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) + Fy_n \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{12.9}$$

прийнявши

$$y_0 = u. \tag{12.10}$$

Тобто, будемо досліджувати ітераційний процес, побудований за формулами вигляду (12.3), у яких $x_k = y_k$; $G_0 = G_1(y_0, y_0)$, $G_n = G_1(y_{n-1}, y_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$.

За припущення, що можна розв'язати рівняння (12.8), (12.9) для кожного $n = 1,\ 2,\ \ldots$ так, що $y_n \in \mathrm{D}$, з умов (A_1), (B_1), (Γ_1) випливає висновок про обґрунтованість нерівностей

$$y_n \leq y_{n+1} \quad (n = 0, 1, \ldots)\,. \tag{12.11}$$

Справді, співвідношення (12.7), (12.8), (12.10) призводять до співвідношень

$$y_1 - y_0 \geq G_1\,(y_0, y_0)\,(y_1 - y_0) + Fy_0 - Fy_0 = G_1\,(y_0, y_0)\,(y_1 - y_0)\,,$$

на підставі яких за допомогою умови (B_1) отримуємо нерівність $y_0 \leq y_1$. Знайдемо тепер із (12.8), (12.9), використовуючи цю нерівність та умову (A_1), що

$$\begin{gathered} Fy_1 - y_1 = Fy_1 - G_1\,(y_0, y_0)\,(y_1 - y_0) - Fy_0 \geq \\ \geq (G_1\,(y_1, y_0) - G_1\,(y_0, y_0))\,(y_1 - y_0) \geq \theta. \end{gathered}$$

Маючи намір скористатися з принципу індукції, припустимо, що $y_{n-1} \leq y_n$, $y_n \leq Fy_n$. Тоді подібним способом можна отримати

$$\begin{gathered} y_{n+1} - y_n = G_1\,(y_{n-1}, y_n)\,(y_{n+1} - y_n) + Fy_n - G_1\,(y_{n-2}, y_{n-1}) \times \\ \times (y_n - y_{n-1}) - Fy_{n-1} \geq G_1\,(y_{n-1}, y_n)\,(y_{n+1} - y_n) + \\ + G_1\,(y_{n-1}, y_n)\,(y_n - y_{n-1}) - G_1\,(y_{n-2}, y_{n-1})\,(y_n - y_{n-1}) = \\ = G_1\,(y_{n-1}, y_n)\,(y_{n+1} - y_n) + (G_1\,(y_{n-1}, y_n) - \\ - G_1\,(y_{n-2}, y_{n-1}))\,(y_n - y_{n-1}) \geq G_1\,(y_{n-1}, y_n)\,(y_{n+1} - y_n)\,. \end{gathered}$$

Тому умова (B_1) дає підставу для висновку про правдивість нерівності $y_n \leq y_{n+1}$. Враховуючи це, можна отримати

$$\begin{gathered} Fy_{n+1} - y_{n+1} = -G_1\,(y_{n-1}, y_n)\,(y_{n+1} - y_n) + Fy_{n+1} - Fy_n \geq \\ \geq -G_1\,(y_{n-1}, y_n)\,(y_{n+1} - y_n) + G_1\,(y_n, y_{n+1})\,(y_{n+1} - y_n) = \\ = (G_1\,(y_n, y_{n+1}) - G_1\,(y_{n-1}, y_n))\,(y_{n+1} - y_n) \geq \theta. \end{gathered}$$

Отже, з припущення і умов (A_1), (B_1), (Γ_1) випливають нерівності $y_n \leq y_{n+1}$, $y_{n+1} \leq Fy_{n+1}$. Цим нерівності (12.11) доведені.

Якщо додатково припускати, що E – правильно напівупорядкований банахів простір і що множина D – обмежена і замкнена, то з (12.11) випливає існування границі $x^* \in \mathrm{D}$ монотонної обмеженої послідовності $\{y_n\}$.

Постулюючи ще й неперервність Fx та маючи на увазі неперервність $G_1(y,z)\,w$, передбачену умовою (A_1), можна зробити висновок, що x^* – розв'язок рівняння (12.1).

Наведені міркування дозволяють сформулювати висновки у вигляді окремої теореми.

Теорема 12.1. *Нехай: 1) справджуються умови (A_1), (B_1), (Γ_1); 2) рівняння (12.8) можна розв'язати щодо y_1, а рівняння (12.9) для кожного $n = 1,\ 2,\ \ldots$ можна розв'язати таким способом, що $y_n \in D \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$; 3) банахів простір E – правильно напівупорядкований; D – обмежена замкнена множина в E; 4) оператор F – неперервний в D. Тоді послідовність $\{y_n\}$, утворена за допомогою алгоритму (12.8) – (12.10), збігається монотонно до деякого розв'язку $x^* \in D$ рівняння (12.1), причому*

$$y_n \le y_{n+1} \le x^* \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \tag{12.12}$$

Приєднання до умов (A_1), (B_1), (Γ_1) умови (Б$_1$) дозволяє, не постулюючи правильну напівупорядкованість E та обмеженість D, твердити про існування єдиного розв'язку $x^* \in \mathrm{D}$ рівняння (12.1) та монотонну збіжність послідовності $\{y_n\}$, а також отримати оцінку збіжності ітераційного процесу (12.8) – (12.10). Отриману в такий спосіб теорему сформулюємо таким чином.

Теорема 12.2. *Нехай справджуються умови (A_1) – (Γ_1) і оператор F – неперервний в D. Тоді, якщо існує обернений оператор $\Gamma(y,z) = (I - G_1(y,z))^{-1}$ і оператор*

$$H{=}H(x,y,z) = (I{-}G_1(y,z))^{-1}\,[\alpha_1(y,z) + G_1(y,z) - G_1(x,y)] \tag{12.13}$$

задовольняє при $x,y,z \in D$ співвідношення

$$\|H\| \le q < 1, \tag{12.14}$$

то послідовність $\{y_n\}$ можна побудувати за формулами (12.8) – (12.10) і мають місце оцінки (12.12) та

$$\|y_{n+1} - x^*\| \le q\,\|y_n - x^*\| \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{12.15}$$

для єдиного розв'язку x^* рівняння (12.1).

Доведення. З припущення про існування оберненого оператора $\Gamma(y,z)$ та з (12.13), (12.14) і умов (A_1) – (Γ_1) випливають співвідношення

$$\begin{gathered} y_{n+1} - y_n = G_1(y_{n-1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) - \\ -G_1(y_{n-2}, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) + Fy_n - Fy_{n-1} \leq \\ \leq G_1(y_{n-1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) + [\alpha_1(y_{n-1}, y_n) + \\ +G_1(y_{n-1}, y_n) - G_1(y_{n-2}, y_{n-1})](y_n - y_{n-1}). \end{gathered} \tag{12.16}$$

Оскільки звідси матимемо

$$\|y_{n+1} - y_n\| \leq q\,\|y_n - y_{n-1}\|, \tag{12.17}$$

то традиційні міркування, пов'язані із застосуванням банахового принципу стиску, призводять до висновку про визначеність і збіжність послідовності $\{y_n\}$ до границі $x^* \in \mathrm{D}$, а також про єдиність x^* як розв'язку рівняння (12.1) в D. Монотонність послідовності $\{y_n\}$ гарантують умови (A_1), (B_1), (Γ_1). Тому можна вважати доведеними нерівності (12.12). Підставу для оцінок (12.14) отримаємо завдяки співвідношенням

$$\begin{gathered} x^* - y_{n+1} = Fx^* - Fy_n - G_1(y_{n-1}, y_n)(y_{n+1} - y_n) \leq \\ \leq G_1(y_n, x^*)(x^* - y_n) + \alpha_1(y_n, x^*)(x^* - y_n) + \\ +G_1(y_{n-1}, y_n)(x^* - y_{n+1}) - G_1(y_{n-1}, x^*)(x^* - y_n) = \\ = G_1(y_{n-1}, y_n)(x^* - y_{n+1}) + [\alpha_1(y_n, x^*) + \\ +G_1(y_n, x^*) - G_1(y_{n-1}, x^*)](x^* - y_n). \end{gathered} \tag{12.18}$$

Цим теорему доведено.

В частковому випадку нехай $G_1(y,z)$ не залежить від y. Тобто в умовах (A_1) – (B_1) матимемо такі зміни.

($\mathrm{A'}_1$). *Заданий лінійний неперервний щодо $w \in E$, неперервний неспадний щодо $z \in D$ оператор $G_1(z)\,w$, для якого при $y, z \in D$, $y \leq z$ маємо*

$$G_1(z)(z - y) \leq Fz - Fy. \tag{12.19}$$

($\text{Б}'_1$). *Заданий такий лінійний неперервний додатній щодо $w \in E$, неперервний щодо $y, z \in D$ оператор $\alpha_1(y,z)\,w$, який разом з* *оператором* $G_1(z)\,w$ *з умови* (A'_1) *задовольняє при* $y \le z,\ y, z \in D$ *нерівність*

$$Fz - Fy \le \left(G_1(z) + \alpha_1(y, z)\right)(z - y)\,. \tag{12.20}$$

(B'$_1$). *З нерівності*

$$w \ge G_1(z)\,w \quad (y, z \in D) \tag{12.21}$$

випливає, що $w \ge \theta$.

Ітераційні формули (12.8), (12.9) за цієї ситуації можна подати у вигляді

$$y_{n+1} = G_1(y_n)\,(y_{n+1} - y_n) + Fy_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \tag{12.22}$$

При заміні умов (A$_1$) – (B$_1$) теореми 12.1 умовами (A'$_1$) – (B'$_1$) очевидним чином зберігаються всі міркування у її доведенні.

Заміна умов (A$_1$) – (B$_1$) умовами (A'$_1$) – (B'$_1$) дає змогу уточнити оцінки збіжності ітераційного процесу (12.22), (12.10) у порівнянні з процесом (12.8) – (12.10). Оскільки у цьому випадку замість (12.13) для оператора H будемо мати

$$H = H(y, z) = (I - G_1(z))^{-1}\left[\alpha_1(y, z) + G_1(z) - G_1(y)\right]. \tag{12.23}$$

За ситуації, коли при $y \le z,\ y, z \in \mathrm{D}$ маємо

$$\alpha_1(y, z) + G_1(z) - G_1(y) \le L(y, z)\,(z - y)\,, \tag{12.24}$$

де $L(y,z)w$ – заданий лінійний додатний щодо w оператор, ітераційний процес (12.22), (12.10) має квадратичну швидкість збіжності. Якщо, зокрема,

$$\|L(y, z)\| \le a_0, \quad \left\|(I - G_1(y, z))^{-1}\right\| \le b_0, \tag{12.25}$$

$$a_0 b_0 \|y_1 - y_0\| \le q_0 < 1,$$

то можна отримати оцінку

$$\|y_{n+1} - y_n\| \le h_0 \|y_n - y_{n-1}\|^2\,, \quad \|y_{n+1} - x^*\| \le h_0 \|y_n - x^*\|^2\,, \tag{12.26}$$

де $h_0 = a_0 b_0$. Завдяки цьому доходимо висновку про можливість стверджувати, що в D існує єдиний розв'язок x^* рівняння (12.1). До цього розв'язку монотонно збігається з квадратичною швидкістю послідовність $\{y_n\}$, утворена за допомогою алгоритму (12.22), (12.10). Отриманий результат оформимо у вигляді окремого твердження.

Теорема 12.3. *Нехай: 1) справджуються умови (A'$_1$) – (B'$_1$) та (Г$_1$); 2) рівняння (12.22) для кожного* $n = 0,\ 1,\ \ldots$ *можна розв'язати щодо* $y_{n+1} \in D$ *і справджуються припущення про правдивість (12.24) – (12.25); 3) множина D – замкнена в E. Тоді існує єдиний розв'язок* $x^* \in D$ *рівняння (12.1) і до нього монотонно збігається послідовність* $\{y_n\}$*, побудована за допомогою ітераційного процесу (12.22), (12.10). При цьому правдиві оцінки (12.12) та (12.26).*

В іншому випадку можна припустити, що замість (12.24) маємо

$$\left\|\alpha_1 (y,z) + G_1 (z) - G_1 (y)\right\| \le Q \left\|z - y\right\|^{\gamma} \quad (\gamma \ge 0)\,. \tag{12.27}$$

Нехай

$$Q \left\|y_1 - y_0\right\|^{\gamma} \le q_0 < 1. \tag{12.28}$$

Якщо $\gamma > 0$, то можна отримати

$$\begin{gathered}\left\|y_{n+1} - x^*\right\| \le Q \left\|y_n - x^*\right\|^{1+\gamma};\\ \left\|y_{n+1} - y_n\right\| \le Q \left\|y_n - y_{n-1}\right\|^{1+\gamma},\end{gathered} \tag{12.29}$$

що гарантує збіжність до x^* послідовності $\{y_n\}$, якщо тільки мають місце співвідношення (12.28).

Задля прикладу розглянемо спеціальний випадок алгоритму (12.22), коли оператор Fx – диференційовний. Нехай існує похідна Фреше $F'(x)\,w$ від оператора Fx. Тоді в (12.22) можна прийняти $G_1 (y) = F'(y)$ і формули (12.22) матимуть вигляд

$$y_{n+1} = F'(y_n)\,(y_{n+1} - y_n) + F y_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \tag{12.30}$$

Якщо $F'(x)\,w$ – додатній неперервний щодо w і неперервний ізотонний щодо x, то умова (A'$_1$) справджується. Якщо, крім того, заданий додатній лінійний щодо $z - y$ оператор $L(y,z)$ такий, що

$$G_1 z - G_1 y \le L(y,z)\,(z - y)\,, \tag{12.31}$$

то для алгоритму (12.23), (12.10) матимемо, взагалі кажучи, квадратичну збіжність. При цьому в разі існування другої похідної $(F''(x)\,g)\,w$ від оператора F та за умови додатності $F''(x)$ можна прийняти, наприклад,

$$L(y,z) = \frac{1}{2}F''(z)(z-y)\,. \tag{12.32}$$

Зазначимо, що оператори $G_1(z)$ та $\alpha_1(y,z)$ з постульованими умовами (А'$_1$) – (Г'$_1$) можуть існувати й тоді, коли похідні $F'(x)$ та $F''(x)$ не існують, а у випадку диференційовності Fx не конче брати $G_1(y) = F'(y)$, і оператор $L(y,z)$ не обов'язково визначати за (12.32).

Зауваження 12.1. *Можна переконатися, що формальна заміна нерівності (12.7) в умові (Γ_1) протилежною нерівністю, взагалі кажучи, не призводить до аналогу теореми 12.1 з формальною заміною нерівностей (12.12) протилежними нерівностями. Для отримання такого аналогу теореми 12.1 потрібно, окрім зазначеної зміни в умові (Γ_1), змінити умову (A_1). Саме в умові (A_1) замість нерівності (12.4) потрібно вимагати протилежної нерівності, а також заміть додатності$G_1(y,z)\,w$ щодо w вимагати додатності щодо w оператора $(-G_1(y,z))\,w$. Зазначена специфіка монотонного методу Ньютона дає підстави вважати, взагалі кажучи, неможливим запропонувати двосторонній монотонний метод Ньютона для рівняння (12.1) з немонотонним оператором F. Звернемо увагу, що така вада невластива методові Чаплигіна, що підтверджено результатами §7. З цього погляду видається оправданим стверджувати, що попри формальну близькість метод Чаплигіна і метод Ньютона відрізняються один від одного істотно їх природою, і не можна вважати прийнятним висловлюване іноді хибне твердження про ідентичність цих методів.*

Зауваження 12.2. *Дальший виклад стосується побудови двосторонніх алгоритмів для рівняння (12.1) з немонотонною правою частиною. З них не отримується ні алгоритм (12.9), (12.10) та його спрощений варіант (12.22), ні самий монотонний метод Ньютона, який є частковим випадком алгоритму (12.22) за припущення про існування похідної $F'(x)\,w$ від оператора F та її використання в (12.22) у ролі оператора G_1.*

Далі, як і у §7, замість рівняння (12.1) розглядатимемо рівняння

$$x = T(x, x), \tag{12.33}$$

вважаючи, що

$$T(x, x) = Fx$$

і постулюючи такі вимоги.

(A). *Задані лінійні неперервні щодо w оператори $G_1 w$, $G_2 w$, для яких при $x, y, z \in D$, $y \le z$ будемо мати*

$$\begin{aligned} & G_1(z-y) \le T(z, x) - T(y, x), \\ & T(x, z) - T(y, z) \le -G_2(z-y). \end{aligned} \tag{12.34}$$

Оператори $G_i w$ $(i = 1,\ 2)$ у співвідношеннях (12.34) будемо вважати постійними операторами, тобто, будемо мати на увазі, що в (12.34) вони не залежать від x, y, z, а діють як лінійні оператори на $w = z - y$.

(Б). *Задані лінійні неперервні додатні щодо w, неперервні щодо $y, z \in D$ оператори $\alpha_1(y, z)\, w$, $\alpha_2(y, z)\, w$, для яких із співвідношень $x, y, z \in D$, $y \le z$ випливають нерівності*

$$\begin{aligned} & T(z, x) - T(y, x) \le (G_1 + \alpha_1(y, z))(z-y), \\ & -(G_2 + \alpha_2(y, z))(z-y) \le T(x, z) - T(x, y). \end{aligned} \tag{12.35}$$

(В). *При $y, z, p, q \in D$, $y \le z$ з нерівностей*

$$p \le G_1 p + G_2 q, \quad q \ge G_1 p + G_2 q \tag{12.36}$$

випливають нерівності $p \ge \theta$, $q \ge \theta$.

(Г). *Задані елементи $u, v \in D$, для яких*

$$u \le v, \quad u \le T(u, v), \quad v \ge T(v, u). \tag{12.37}$$

Розглянемо ітераційний процес

$$\begin{aligned} y_{n+1} = {} & G_1(y_n, z_n)(y_{n+1} - y_n) - G_2(y_n, z_n)(z_{n+1} - z_n) + \\ & + T(y_n, z_n), \\ z_{n+1} = {} & G_1(z_n, y_n)(z_{n+1} - z_n) - G_2(z_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) + \\ & + T(z_n, y_n) \end{aligned} \tag{12.38}$$

при

$$y_0 = u, \ \ z_0 = v. \qquad (12.39)$$

Теорема 12.4. *Нехай: 1) справджуються умови (А) – (Г); 2) для кожного $n = 0, 1, \ldots$ систему (12.38) можна розв'язати щодо $y_{n+1}, z_{n+1} \in D$; 3) оператор $T\,(y, z)$ – неперервний в $[a, b] \times [a, b]$; 4) система рівнянь $y = T\,(y, z)\,, \ \ z = T\,(z, y)$ має єдиний в $[a, b] \times [a, b]$ розв'язок (y^*, z^*), причому $y^* = z^*$. Тоді для єдиного розв'язку $x^* = y^* = z^*$ рівняння (12.33) правдиві співвідношення*

$$y_n \le y_{n+1} \le x^* \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \qquad (12.40)$$

Доведення пропускаємо, бо за цих припущень алгоритм (12.38), (12.39) і саму теорему 12.4 можна отримати як частковий випадок із досліджень, проведених у §7.

РОЗДІЛ V. МЕТОДИ КУРПЕЛІВСЬКОГО ТИПУ

Докладну інформацію щодо методів Курпеля, які узагальнюють метод Чаплигіна на рівняння з неопуклими немонотонними операторами, містять роботи М.С.Курпеля [44, 46], і монографія [57], у якій започатковані також деякі видозміни методів Курпеля. Деякі нові алгоритми, які є модифікаціями двосторонніх методів М.С.Курпеля, досліджені також в [47] і [50]. Результати, наведені у цьому розділі, розвивають ідеї із [57] і [101, 108]. Зазначимо, що у досліджених тут алгоритмах при побудові аналогів методів Курпеля фігурують оператори, які можуть не бути похідними Фреше від заданого оператора. Якщо ж відповідні похідні існують, то з досліджених у §14 алгоритмів отримуються методи Курпеля із [46] та їх модифікації із [57] і із [47, 50].

§13. Двосторонні методи Курпеля та їх модифікації

Уже зазначалося, що двосторонній метод Чаплигіна для його обгрунтування потребує опуклості або вгнутості оператора F у правій частині рівняння

$$x = Fx,$$

а також його монотонності. М. С. Курпель 1969 року для диференціального рівняння $x' = f(t,x)$ запропонував [44] двосторонній метод, який не потребує для обгрунтування монотонності та опуклості $f(t,x)$ щодо x і водночас – цим відрізняється двосторонній метод Курпеля з-поміж інших відомих узагальнень методу Чаплигіна – має квадратичну швидкість збіжності, характерну для методу Чаплигіна. Абстрактна схема методу Курпеля докладно проаналізована в [45] та в монографії [57]. В [57] досліджені також деякі видозміни методу Курпеля, покликані до існування тою обставиною, що розв'язання лінійних систем рівнянь, котрі описують ітераційний процес методу Курпеля, часто є складною задачею, яку рідко вдається розв'язати у замкненому вигляді. У зв'язку з цим М. С. Курпелем та його учнями досліджені, зокрема, проекційно-ітеративні аналоги методу Курпеля (див., напр., [49, 50, 62]), більшість яких описана в [57] та в [49] (див. також бібліографію в [49, 57]). Аналіз можливих "збурень" у лінеаризованій частині ітераційних формул методу Курпеля реалізований у [101], де вказані, зокрема, допустимі межі таких "збурень", за яких зберігається квадратичний характер збіжності методу Курпеля.

Розглянемо двосторонні алгоритми, запропоновані [44, 45] М.С.Курпелем (див. також [49, 57]) як узагальнення і модифікації методу Чаплигіна. Виклад будемо вести для рівняння

$$Lx = Fx \tag{13.1}$$

з умовою

$$Sx = r \tag{13.2}$$

за схемою, використаною М. С. Курпелем в [45] (див. також [57]). Зазначимо насамперед, що в цих алгоритмах не використовується вимога про опуклість і монотонність оператора F.

Будемо вважати, що заданий неперервний за сукупністю аргументів оператор $T\,(y, z)$, для якого

$$T\,(x, x) = Fx. \tag{13.3}$$

Тут $L : \mathrm{D} \to E_1$, $S : \mathrm{D} \to E_2$, $T\,(y, z) : \mathrm{D} \times \mathrm{D} \to E_1$, D – опукла множина з напівупорядкованого простору E, оператори L, S – лінійні в області D, причому існує лінійний неперервний обернений оператор L^{-1}, якщо L є ненульовим оператором, E_1, E_2 – напівупорядковані простори. Вважатимемо, що E та E_1 – структурно нормовані за допомогою архімедових лінеалів N та N_1 відповідно.

Припускаємо, що оператор $T\,(y, z)\,w$ має в $\mathrm{D} \times \mathrm{D}$ перші похідні за y та z (в тому чи іншому розумінні), які позначатимемо відповідно $T_1\,(y, z)\,w$ та $T_2\,(y, z)\,w$; вважатимемо ці похідні неперервними щодо $y, z \in \mathrm{D}$, $w \in \mathrm{E}$ (наприклад, в трактуванні породженої напівупорядкованістю топології) і лінійними щодо w. Нехай справджуються такі умови.

A) *Оператор $T_1\,(y, z)\,w$ не спадає щодо y, z, а оператор $T_2\,(y, z)\,w$ не зростає щодо y, z; при цьому співвідношення $y \le x$, $x, y, z \in D$, $Sx = Sy = Sz = r$ призводять до нерівностей*

$$\begin{aligned} T\,(x, z) - T\,(y, z) &\ge T_1\,(y, z)\,(x - y)\,, \\ T\,(z, x) - T\,(z, y) &\le T_2\,(z, y)\,(x - y)\,. \end{aligned} \tag{13.4}$$

Б) *Із співвідношень* $x, y, z, w \in D$,

$$Sy = Sx = \theta_2, \quad Sz = Sw = r, \tag{13.5}$$

де θ_2 *– нульовий елемент в* E_2*, та співвідношень*

$$\begin{aligned} Lx &\geq T_1(z,w)\,x - T_2(z,w)\,y, \\ Ly &\geq T_1(w,z)\,y - T_2(w,z)\,x \end{aligned} \tag{13.6}$$

випливають співвідношення $x \geq \theta_1$, $y \geq \theta_1$ (θ_1 *– нульовий елемент в* E_1).

В) *Задані елементи* $y_0, z_0 \in D$*, для яких* $Sy_0 = Sz_0 = r$,

$$\begin{aligned} y_0 &\leq T(y_0, z_0), \\ z_0 &\geq T(z_0, y_0). \end{aligned} \tag{13.7}$$

Розглянемо ітераційний процес

$$\begin{aligned} Ly_{n+1} &= T_1(y_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) + T_2(y_n, y_n)(z_{n+1} - z_n) + \\ &\qquad + T(y_n, z_n), \\ Lz_{n+1} &= T_1(y_n, y_n)(z_{n+1} - z_n) + T_2(y_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) + \\ &\qquad + T(z_n, y_n), \end{aligned} \tag{13.8}$$

$$Sy_{n+1} = Sz_{n+1} = r, \tag{13.9}$$

який описує один з двох основних варіантів методу Курпеля.

Теорема 13.1 *(див. [57, теорема 13.1]). Нехай для всякого* $n = 0,\ 1,\ \ldots$ *задачу (13.8), (13.9) можна розв'язати щодо* $y_{n+1}, z_{n+1} \in D$ *і існує розв'язок* $x^* \in D$ *задачі (13.1), (13.2). Якщо справджуються умови А) – В), то правдиві співвідношення*

$$y_n \leq y_{n+1} \leq x^* \leq z_{n+1} \leq z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{13.10}$$

Доведення використовує, зокрема, таке твердження про двосторонні операторні нерівності.

Теорема 13.2 *(див. [57, теорема 6.1]). Якщо справджуються умови А) – В), то за припущення, що $x^* \in D$ є розв'язком задачі (13.1), (13.2), справджуються оцінки*

$$y_0 \leq x^* \leq z_0. \tag{13.11}$$

Зауважимо, що нерівність $y_0 \leq z_0$ в умовах теорем 13.1 та 13.2 не постулюється. Зазначимо також, що з нерівностей

$$y_0 \leq y_1 \leq z_1 \leq z_0 \tag{13.12}$$

та з припущення про розв'язність щодо y_{n+1}, z_{n+1} задачі (13.8), (13.9) із умов А) та Б) випливають нерівності

$$y_n \leq y_{n+1} \leq z_{n+1} \leq z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \tag{13.13}$$

Теорема 13.3 *(див. [57, теорема 13.4]). Нехай: 1) справджуються умови теореми 13.1; 2) для всякого $x \in D$ існує обернений оператор*

$$\left(L - T_1\left(x,x\right) - T_2\left(x,x\right)\right)^{-1} = Ax,$$

який задовольняє умову Ліпшиця з оператором Ліпшиця A_0, а також справджуються умови Ліпшиця вигляду

$$\begin{aligned} &\left\|T_1\left(x,z\right) - T_1\left(y,z\right)\right\| \leq L_1 \left\|x - y\right\|, \\ &\left\|T_2\left(z,z\right) - T_2\left(z,y\right)\right\| \leq L_2 \left\|x - y\right\|; \end{aligned}$$

3) послідовність $\{\sigma_n\}$ збігається рівномірно в N до нульового елементу θ_N, де

$$\sigma_{n+1} = B\sigma_n^2,\ \ \sigma_0 = \left\|z_0 - y_0\right\|,\ \ B = \frac{1}{2} A_0 \left(L_1 + L_2\right).$$

Тоді мають місце оцінки

$$\left\|x^* - y_n\right\| \leq \sigma_n, \quad \left\|z_n - x^*\right\| \leq \sigma_n, \quad \left\|z_n - y_n\right\| \leq \sigma_n \tag{13.14}$$

для кожного $n = 0,\ 1,\ \ldots$

Зазначимо, що для випадку, коли E, E_1 є банаховими напівупорядкованим просторами, з оцінок (13.14) випливають оцінки

$$\begin{aligned} \|x^* - y_n\| &\leq \beta^{2^n-1}\sigma_0, \\ \|z_n - x^*\| &\leq \beta^{2^n-1}\sigma_0, \\ \|z_n - y_n\| &\leq \beta^{2^n-1}\sigma_0, \end{aligned} \tag{13.15}$$

бо оператори L_1, L_2, A_0, B є діями множення на дійсні числа λ_1, λ_2, α_0, β відповідно. За цієї ситуації для збіжності ітераційного процесу достатньо, щоб справджувалася нерівність

$$\beta\sigma_0 < 1. \tag{13.16}$$

У тому випадку, коли оператор $T(y,z)$ не залежить від z, алгоритм (13.8), (13.9) перетворюється в один з варіантів методу Чаплигіна. При цьому збережуться теореми 13.1 – 13.3 з відповідними поправками, які зводяться до того, що відповідні умови можна подати у спрощеному вигляді. Зокрема, можна вважати, що оператори $T_1(y,z)$, $T_2(y,z)$ не залежать від z, тобто замість $T_1(y,z)\,w$ матимемо $T_1(y)\,w$, а $T_2(y,z)\,w$ є нуль-оператором. Умови А) – В) матимуть такий вигляд.

А$_1$) *Оператор $T(y)\,w$ не спадає щодо y і співвідношення $y \leq x$, $x, y \in D$, $Sx = Sy = r$ призводять до нерівності*

$$Tx - Ty \geq T_1(y)(x - y).$$

Б$_1$) *Із співвідношень*

$$Lx \geq T_1(z)\,x, \quad Sx = \theta_2, \quad Sz = r$$

випливає, що $x \geq \theta_1$.

В$_1$) *Задані елементи $y_0, z_0 \in D$, для яких мають місце співвідношення*

$$y_0 \leq Ty_0, \quad z_0 \geq Tz_0, \quad Sy_0 = Sz_0 = r.$$

У цьому випадку ітераційні формули (13.8) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &Ly_{n+1} = T_1(y_n)(y_{n+1} - y_n) + Ty_n, \\ &Lz_{n+1} = T_2(y_n)(z_{n+1} - z_n) + Tz_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \end{aligned} \tag{13.17}$$

В іншому частковому випадку, котрий теж описує один з варіантів методу Чаплигіна, можна прийняти, що $T_1(y, z)w$ є нульовим оператором, а $T(y, z)w$, $T_2(y, z)w$ можна вважати незалежними від y, тобто $T(y, z)w = T(z)w$, $T_2(y, z)w = T_2(z)w$. Умови А) – В) матимуть тоді такий вигляд:

А$_2$) *Оператор $T(z)w$ не спадає щодо z і співвідношення $y \le xx, y \in D$, $Sx = Sy = r$ призводять до нерівності*

$$Tx - Ty \le T_2(y)(x - y).$$

Б$_2$) *Із співвідношень*

$$Lx \ge -T_2(z)y, \quad Ly \ge -T_2(w)x,$$

де $y \le x$, $x, y, z, w \in D$, $Sy = Sx = \theta_2$, $\quad Sz = Sw = r$, випливає, що $x \ge \theta_1$, $y \ge \theta_1$.

В$_2$) *Задані такі $y_0, z_0 \in D$, для яких $Sy_0 = Sz_0 = r$,*

$$y_0 \le -Tz_0, \quad z_0 \ge -Ty_0.$$

У цьому випадку ітераційні формули (13.8) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &Ly_{n+1} = T_2(y_n)(z_{n+1} -_n) + Tz_n, \\ &Lz_{n+1} = T_2(y_n)(y_{n+1} - y_n) + Ty_n. \end{aligned} \tag{13.18}$$

Зауваження 13.1. *Розглянуті алгоритми не охоплюють, наприклад, алгоритму (7.7), (7.8) та основних варіантів алгоритмів із §9 та §11.*

Приклад 13.1. Для задачі Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{13.19}$$

з дійсною функцією $f(t,x)$, можна вважати, що

$$T(x,y) = f(t,x), \quad Lx = \frac{dx(t)}{dt}, \quad Sx_0 = x(t_0).$$

Ітераційний алгоритм (13.17), (13.9) для цього випадку розглянутий в [61, 62].

Замість розглянутого варіанту (13.8), (13.9) методу Курпеля можна розглянути й інші його різновидності.

Замінимо умови А) – В) такими умовами.

А$_3$) *Оператори* $T_1(y,z)w$, $-T_2(y,z)w$ *не спадають щодо* y, *не зростають щодо* z *і співвідношення* $y \le x$, $x,y,z \in D$, $Sx = Sy = Sz = r$ *призводять до нерівностей*

$$\begin{array}{l} T(x,z) - T(y,x) \ge T_1(y,z)(z-y), \\ T(x,z) - T(x,y) \le T_2(y,z)(z-y). \end{array}$$

Б$_3$) *Із співвідношень* $x,y,z,w \in D$, $Sy = Sx = \theta_2$, $Sz = Sw = r$ *та*

$$\begin{array}{l} Lx \ge T_1(z,w)x - T_2(z,w)y, \\ Ly \ge T_1(w,z)y - T_2(w,z)x \end{array}$$

випливають нерівності $x \ge \theta_1$, $y \ge \theta_1$.

За припущень А$_3$), Б$_3$), В) ітераційні формули (13.8) замінимо формулами

$$\begin{array}{l} Ly_{n+1} = T_1(y_n,z_n)(y_{n+1}-y_n) + T_2(y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n) + \\ +T(y_n,z_n), \\ Lz_{n+1} = T_1(y_n,z_n)(z_{n+1}-z_n) + T_2(y_n,z_n)(y_{n+1}-y_n) + \\ +T(y_n,z_n). \end{array} \tag{13.20}$$

Алгоритми, близькі до алгоритму (13.20), (13.9), досліджені в [72, 101, 108, 114].

§14. Аналоги методу Курпеля

Вимоги щодо монотонності та опуклості оператора F у рівнянні

$$x = Fx \tag{14.1}$$

належать до істотних перешкод, які утруднюють використання методу Чаплигіна і його модифікацій та узагальнень на практиці. Як зазначалось, численні спроби у цьому напрямку призводили здебільшого до таких двосторонніх монотонних алгоритмів з немонотонними і неопуклими операторами, які втрачають – у порівнянні з самим методом Чаплигіна – характерну квадратичну збіжність і мають тільки лінійну швидкість збіжності. Це стосується, зокрема, алгоритмів, які розглядаються в §§8, 10. Розглянуті у §13 двосторонні методи Курпеля (див. також [44, 46, 49, 50, 54, 57]) позбавлені, взагалі кажучи, як першої, так і другої із зазначених вад. Вони не потребують, щоб оператор F був монотонним або опуклим і водночас зберігають квадратичну збіжність, охоплюючи і самий метод Чаплигіна для рівнянь з монотонними та опуклими операторами. Ці методи Курпеля й близькі до них інші двосторонні алгоритми, описані у §13, мають, проте, як і самий метод Чаплигіна, й інші вади. Йдеться, перш за все, про диференційовність оператора F, та про потребу знаходження відповідних обернених операторів. Оскільки оператор F може бути недиференційовним, то застосування до рівняння (14.1) методу Чаплигіна або методу Курпеля неможливе. З іншого боку, знаходити відповідні обернені оператори – якщо вони існують – практично для більшості задач вдається тільки наближено. Ці фактори теж істотно обмежують можливості використання методів Чаплигіна і Курпеля для реальних задач й часто зводять нанівець переваги швидкої теоретичної їх збіжності. Певною мірою ослабити згубний вплив цих вад на придатність алгоритмів методу Чаплигіна для використання у практичних задачах можуть досліджені у §9 алгоритми, а для методу Курпеля – досліджені нижче у цьому параграфі аналоги двостороннього методу Курпеля. Йдеться про двосторонні алгоритми з близькою до Курпелевих методів формальною архітектурою ітераційних формул. В цих алгоритмах у лінеаризованій частині ітераційних формул відповідні оператори не мусять бути похідними від оператора F. Можна вважати, що за цієї ситуації пропоновані алгоритми дають змогу описати множину можливих лінійних “збурень” у лінійній частині ітераційних формул. Використаний тут підхід дозволяє описати такі допустимі збурення, які зберігають двосторонність і монотонність ітерацій та їх квадратичну збіжність.

Будемо вважати заданим оператор $T\left(y,z\right)$, для якого в області визначення E_0 оператора Fx матимемо

$$T\left(x,x\right)=Fx, \tag{14.2}$$

причому E_0 – обмежена замкнена множина елементів із напівупорядкованого простору E, $T\left(y,z\right):E_0\times E_0\to E$ є неперервним оператором. Основні обмеження щодо рівняння (14.1), якому завдяки (14.2) надамо вигляду

$$x=T\left(x,x\right), \tag{14.3}$$

сформулюємо так. Нехай:

1) *Задані неперервні щодо* $y,z\in E_0$ *лінійні неперервні щодо* $w\in E$ *оператори* $G_1\left(y,z\right)w$, $\alpha_1\left(y,z\right)w$, $G_2\left(y,z\right)w$, $\alpha_2\left(y,z\right)w$, *для яких при* $x,y,z\in E_0$ *маємо*

$$\begin{aligned}&\left(G_1\left(y,z\right)+\alpha_1\left(y,z\right)\right)\left(z-y\right)\leq T\left(z,x\right)-T\left(y,x\right),\\&T\left(x,z\right)-T\left(x,y\right)\leq-\left(G_2\left(y,z\right)+\alpha_2\left(y,z\right)\right)\left(z-y\right).\end{aligned} \tag{14.4}$$

2) *Оператори* $G_1\left(y,z\right)w$, $\alpha_1\left(y,z\right)w$, $G_2\left(y,z\right)w$, $\alpha_2\left(y,z\right)w$ *не спадають щодо* y, *не зростають щодо* z, *оператори* $\alpha_1\left(y,z\right)w$, $\alpha_2\left(y,z\right)w$ *– додатні як лінійні оператори щодо* w.

3) *Якщо*

$$\begin{aligned}&G_1\left(y,z\right)\leq Q_1\left(y,z\right)\leq G_1\left(y,z\right)+\alpha_1\left(y,z\right),\\&G_1\left(y,z\right)\leq Q_3\left(y,z\right)\leq G_1\left(y,z\right)+\alpha_1\left(y,z\right),\end{aligned} \tag{14.5}$$

$$\begin{aligned}&G_2\left(y,z\right)\leq Q_2\left(y,z\right)\leq G_2\left(y,z\right)+\alpha_2\left(y,z\right),\\&G_2\left(y,z\right)\leq Q_4\left(y,z\right)\leq G_2\left(y,z\right)+\alpha_2\left(y,z\right),\end{aligned} \tag{14.6}$$

то з нерівностей

$$\begin{aligned}&p\geq Q_1\left(y,z\right)p+Q_2\left(y',z'\right)q,\\&q\geq Q_3\left(y',z'\right)q+Q_4\left(y,z\right)p\end{aligned} \tag{14.7}$$

для $y, z, y', z' \in E_0$, $p, q \in E$ *випливають нерівності* $p \geq \theta$, $q \geq \theta$.

4) *Задані* $u, v \in E_0$, *для яких*

$$\begin{aligned} & u \leq T(u, v), \\ & v \geq T(v, u). \end{aligned} \tag{14.8}$$

5) *При кожному* $n = 0,\ 1,\ \ldots$ *система рівнянь*

$$\begin{aligned} & y_{n+1} = G_1(y_n, z_n)(y_{n+1} - y_n) - \\ & -G_2(y_n, z_n)(z_{n+1} - z_n) + T(y_n, z_n), \\ & z_{n+1} = (G_1(y_n, z_n) + \alpha_1(y_n, z_n))(z_{n+1} - z_n) - \\ & -(G_2(y_n, z_n) + \alpha_2(y_n, z_n))(y_{n+1} - y_n) + T(z_n, y_n), \end{aligned} \tag{14.9}$$

$$y_0 = u, \quad z_0 = v, \tag{14.10}$$

має розв'язок (y_{n+1}, z_{n+1}), *причому* $y_{n+1}, z_{n+1} \in E$.

Теорема 14.1. *Нехай справджуються умови 1) – 5) і рівняння (14.3) має розв'язок* $x \in E_0$. *Тоді*

$$y_n \leq y_{n+1} \leq x^* \leq z_{n+1} \leq z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{14.11}$$

Доведення. Оскільки справджуються співвідношення (14.8) і (14.10), то із (14.9) при $n = 0$ знаходимо

$$\begin{aligned} & y_1 - y_0 \geq G_1(y_0, z_0)(y_1 - y_0) + G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1), \\ & z_0 - z_1 \geq (G_1(y_0, z_0) + \alpha_1(y_0, z_0))(z_0 - z_1) + \\ & +(G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0). \end{aligned}$$

Звідси за умовою 3) одержуємо

$$y_0 \leq y_1, \quad z_1 \leq z_0. \tag{14.12}$$

Із (14.3), (14.8) за допомогою умови 1) можна знайти

$$\begin{aligned} & x^* - u \geq T(x^*, x^*) - T(u, v) \geq \\ & \geq (G_1(u, x^*) + \alpha_1(u, x^*))(x^* - u) + (G_2(x^*, v) + \alpha_2(x^*, v))(v - x^*), \\ & v - x^* \geq T(v, u) - T(x^*, x^*) \geq \\ & \geq (G_1(x^*, v) + \alpha_1(x^*, v))(v - x^*) + (G_2(u, x^*) + \alpha_2(u, x^*))(x^* - u). \end{aligned}$$

Умова 3) є підставою, щоб отримати звідси висновок про те, що справджуються нерівності

$$u = y_0 \le x^* \le z_0 = v. \tag{14.13}$$

Тепер можна перейти до обгрунтування нерівностей

$$y_1 \le x^* \le z_1. \tag{14.14}$$

Задля цього скористаємося із (14.3), (14.9) для $n = 0$ та (14.10) і умовами 1), 2), враховуючи (14.12), (14.13). Будемо мати

$$\begin{gathered} x^* - y_1 = T(x^*, x^*) - G_1(y_0, z_0)(y_1 - y_0) + G_2(y_0, z_0)(z_1 - z_0) - \\ -T(y_0, z_0) \ge G_1(y_0, z_0)(x^* - y_1) + G_2(y_0, z_0)(z_1 - x^*) - \\ -G_1(y_0, z_0)(x^* - y_0) - G_2(y_0, z_0)(z_0 - x^*) + (G_1(y_0, x^*) + \\ +\alpha_1(y_0, x^*))(x^* - y_0) + (G_2(x^*, z_0) + \alpha_2(x^*, z_0))(z_0 - x^*) \ge \\ \ge G_1(y_0, z_0)(x^* - y_1) + G_2(y_0, z_0)(z_1 - x^*), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} z_1 - x^* = (G_1(y_0, z_0) + \alpha_1(y_0, z_0))(z_1 - z_0) - (G_2(y_0, z_0) + \\ +\alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + T(z_0, y_0) - T(x^*, x^*) \ge (G_1(y_0, z_0) + \\ +\alpha_1(y_0, z_0))(z_1 - x^*) + (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(x^* - y_1) - \\ -(G_1(y_0, z_0) + \alpha_1(y_0, z_0))(z_0 - x^*) - (G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0)) \times \\ \times (x^* - y_0) + (G_1(x^*, z_0) + \alpha_1(x^*, z_0))(z_0 - x^*) + (G_2(y_0, x^*) + \\ +\alpha_2(y_0, x^*))(x^* - y_0) \ge (G_1(y_0, z_0) + \alpha_1(y_0, z_0))(z_1 - x^*) + \\ +(G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(x^* - y_1). \end{gathered}$$

Звідси отримуємо підтвердження нерівностей (14.14), бо можна скористатися з умови 3). Беручи до уваги (14.12), доходимо висновку про правдивість нерівностей (14.11) для $n = 0$, тобто, нерівностей

$$y_0 \le y_1 \le x^* \le z_1 \le z_0. \tag{14.15}$$

Можна буде вважати доведення завершеним, якщо обґрутуємо нерівності

$$\begin{aligned} y_1 &\le T(y_1, z_1), \\ z_1 &\ge T(z_1, y_1). \end{aligned} \tag{14.16}$$

Використаємо задля цього (14.9), (14.14) та умови 1), 2). Матимемо

$$\begin{gathered} T(y_1, z_1) - y_1 = T(y_1, z_1) - G_1(y_0, z_0)(y_1 - y_0) + G_2(y_0, z_0) \times \\ \times (z_1 - z_0) - T(y_0, z_0) \ge (G_1(y_0, y_1) - G_1(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + \\ +(G_2(z_1, z_0) - G_2(y_0, z_0))(z_0 - z_1) + \alpha_1(y_0, y_1)(y_1 - y_0) + \\ +\alpha_2(z_1, z_0)(z_0 - z_1) \ge \theta, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
z_1 - T(z_1, y_1) = (G_1(y_0, z_0) + \alpha_1(y_0, z_0))(z_1 - z_0) - (G_2(y_0, z_0) + \\
+\alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + T(z_0, y_0) - T(z_1, y_1) \geq \\
\geq (G_1(z_1, z_0) - G_1(y_0, z_0))(z_0 - z_1) + (G_2(y_0, y_1) - \\
-G_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + (\alpha_1(z_1, z_0) - \alpha_1(y_0, z_0))(z_0 - z_1) + \\
+(\alpha_2(y_0, y_1) - \alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) \geq \theta.
\end{gathered}$$

Отже, підтверджені співвідношення (14.15), (14.16). Завдяки цьому маємо, що y_1, z_1 задовольняють всі ті вимоги, які задовольняють елементи $y_0 = u$, $z_0 = v$ в умовах теореми. Тому принцип індукції є підставою для того, щоб вважати теорему доведеною.

Теорема 14.2. *Нехай: а) справджуються умови 2), 3), 5) та ослаблений варіант умови 1), який отримується з неї, коли припустити, що нерівності (14.4) виконуються не при всяких $y, z \in E_0$, а лише для таких, що $y \leq z$; б) для елементів $u = y_0$, $v = z_0$, y_1, z_1, які задовольняють умову 5), правдиві нерівності*

$$y_0 \leq y_1 \leq z_1 \leq z_0. \tag{14.17}$$

Тоді справджуються співвідношення

$$y_n \leq y_{n+1} \leq z_{n+1} \leq z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{14.18}$$

Доведення. Переконаємося, що в (14.18) можливий перехід від $n = 0$ до $n = 1$. Доведення нерівностей $y_1 \leq y_2$, $z_2 \leq z_1$ ґрунтується на такому викладі

$$\begin{gathered}
y_2 - y_1 = G_1(y_1, z_1)(y_2 - y_1) - G_2(y_1, z_1)(z_2 - z_1) + T(y_1, z_1) - \\
-G_1(y_0, z_0)(y_1 - y_0) + G_2(y_0, z_0)(z_1 - z_0) - T(y_0, z_0) \geq G_1(y_1, z_1) \times \\
\times (y_2 - y_1) + G_2(y_1, z_1)(z_1 - z_2) - G_1(y_0, z_0)(y_1 - y_0) - G_2(y_0, z_0) \times \\
\times (z_0 - z_1) + (G_1(y_0, y_1) + \alpha_1(y_0, y_1))(y_1 - y_0) + (G_2(z_1, z_0) + \\
+\alpha_2(z_1, z_0))(z_0 - z_1) \geq G_1(y_1, z_1)(y_2 - y_1) + G_2(y_1, z_1)(z_1 - z_2) + \\
+(G_1(y_0, y_1) - G_1(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + (G_2(z_1, z_0) - G_2(y_0, z_0)) \times \\
\times (z_0 - z_1) + \alpha_1(y_0, y_1)(y_1 - y_0) + \alpha_2(z_1, z_0)(z_0 - z_1) \geq \\
\geq G_1(y_1, z_1)(y_2 - y_1) + G_2(y_1, z_1)(z_1 - z_2),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
z_1 - z_2 = (G_1(y_0, z_0) + \alpha_1(y_0, z_0))(z_1 - z_0) - (G_2(y_0, z_0) + \\
+\alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + T(z_0, y_0) - (G_1(y_1, z_1) + \alpha_1(y_1, z_1)) \times \\
\times (z_2 - z_1) + (G_2(y_1, z_1) + \alpha_2(y_1, z_1))(y_2 - y_1) - T(z_1, y_1) \geq \\
\geq (G_1(y_1, z_1) + \alpha_1(y_1, z_1))(z_1 - z_2) + (G_2(y_1, z_1) + \\
+\alpha_2(y_1, z_1))(y_2 - y_1) - (G_1(y_0, z_0) + \alpha_1(y_0, z_0)) \times
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\times(z_0-z_1)-(G_2(y_0,z_0)+\alpha_2(y_0,z_0))(y_1-y_0)+(G_1(z_1,z_0)+\\+\alpha_1(z_1,z_0))(z_0-z_1)+(G_2(y_0,y_1)+\alpha_2(y_0,y_1))(y_1-y_0)\geq\\\geq(G_1(y_1,z_1)+\alpha_1(y_1,z_1))(z_1-z_2)+(G_2(y_1,z_1)+\alpha_2(y_1,z_1))\times\\\times(y_2-y_1)+(G_1(z_1,z_0)-G_1(y_0,z_0))(z_0-z_1)+(G_2(y_0,y_1)-\\-G_2(y_0,z_0))(y_1-y_0)+(\alpha_1(z_1,z_0)-\alpha_1(y_0,z_0))(z_0-z_1)+\\+(\alpha_2(y_0,y_1)-\alpha_2(y_0,z_0))(z_0-z_1)\geq(G_1(y_1,z_1)+\\+\alpha_1(y_1,z_1)(z_1-z_2)+(G_2(y_1,z_1)+\alpha_2(y_1,z_1))(y_2-y_1)\,.\end{gathered}$$

Використання умови 3) призводить до потрібних нерівностей, тобто $y_1 \leq y_2$, $z_1 \geq z_2$. Знаходимо подібним способом також

$$\begin{gathered}z_2-y_2=G_1(y_1,z_1)(z_2-y_2)+G_2(y_1,z_1)(z_2-y_2)-\\-G_1(y_1,z_1)(z_1-y_1)-G_2(y_1,z_1)(z_1-y_1)-\alpha_1(y_1,z_1)\times\\\times(z_1-z_2)-\alpha_2(y_1,z_1)(y_2-y_1)+T(z_1,y_1)-T(y_1,z_1)\geq\\\geq(G_1(y_1,z_1)+G_2(y_1,z_1))(z_2-y_2)-(G_1(y_1,z_1)+G_2(y_1,z_1))\times\\\times(z_1-y_1)-\alpha_1(y_1,z_1)(z_1-z_2)-\alpha_2(y_1,z_1)(y_2-y_1)+\\+(G_1(y_1,z_1)+\alpha_1(y_1,z_1))(z_1-y_1)+(G_2(y_1,z_1)+\alpha_2(y_1,z_1))\times\\\times(z_1-y_1)=(G_1(y_1,z_1)+G_2(y_1,z_1))(z_2-y_2)+\\+\alpha_1(y_1,z_1)(z_2-y_1)+\alpha_2(y_1,z_1)(z_1-y_2)\geq\\\geq(G_1(y_1,z_1)+\alpha_1(y_1,z_1)+G_2(y_1,z_1)+\alpha_2(y_1,z_1))(z_2-y_2)\,,\end{gathered}$$

звідки за умовою 3) дозволяє зробити висновок про правдивість нерівності $z_2 - y_2 \geq \theta$. Таким чином, доведено можливість зробити крок індукції у (14.18) від $n = 0$ до $n = 1$, отже, доведено теорему.

Приєднаємо до умов теореми 14.2 додаткове припущення про правильну напівупорядкованість E та $E_0 = [u, v] \quad (u \leq v)$. Це призводить до твердження про існування границь $y^*, z^* \in E_0$ відповідно послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$. При цьому (y^*, z^*) є розв'язком системи

$$\begin{aligned}y&=T(y,z)\,,\\z&=T(z,y)\end{aligned}\tag{14.19}$$

завдяки неперервності правої частини системи (14.9). Можна переконатися, що цей розв'язок є крайнім в E_0 розв'язком системи (14.19). Задля цього потрібно підтвердити нерівності

$$y_n \leq y \leq z_n, \;\; y_n \leq z \leq z_n \;\; (n = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{14.20}$$

для всякого її розв'язку (y, z), для якого $y, z \in E_0$. Оскільки при $n = 0$ ці нерівності справджуються завдяки (14.10), то досить обгрунтувати крок індукції в (14.20). Це можна зробити майже так само як і при доведенні нерівностей (14.14). Справді,

$$
\begin{gathered}
y - y_1 = T\left(y, z\right) - G_1\left(y_0, z_0\right)\left(y_1 - y_0\right) + G_2\left(y_0, z_0\right)\left(z_1 - z_0\right) - \\
-T\left(y_0, z_0\right) \geq G_1\left(y_0, z_0\right)\left(y - y_1\right) + G_2\left(y_0, z_0\right)\left(z_1 - z\right) - \\
-G_1\left(y_0, z_0\right)\left(y - y_0\right) - G_2\left(y_0, z_0\right)\left(z_0 - z\right) + \left(G_1\left(y_0, y\right) + \right. \\
\left. +\alpha_1\left(y_0, y\right)\right)\left(y - y_0\right) + \left(G_2\left(z, z_0\right) + \alpha_2\left(z, z_0\right)\right)\left(z_0 - z\right) = \\
= G_1\left(y_0, z_0\right)\left(y - y_1\right) + G_2\left(y_0, z_0\right)\left(z_1 - z\right) + \left(G_1\left(y_0, y\right) - \right. \\
\left. -G_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(y - y_0\right) + \left(G_2\left(z, z_0\right) - G_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_0 - z\right) + \\
+\alpha_1(y_0, y)(y - y_0) + \alpha_2(z, z_0)(z_0 - z) \geq \\
\geq G_1\left(y_0, z_0\right)\left(y - y_1\right) + G_2\left(y_0, z_0\right)\left(z_1 - z\right),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
z_1 - y = \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_1 - z_0\right) - \left(G_2\left(y_0, z_0\right) + \right. \\
\left. +\alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(y_1 - y_0\right) + T\left(z_0, y_0\right) - T\left(y, z\right) \geq \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \right. \\
\left. +\alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_1 - y\right) + \left(G_2\left(y_0, z_0\right) + \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z - y_1\right) - \\
-\left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_0 - y\right) - \left(G_2\left(y_0, z_0\right) + \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right) \times \\
\times\left(z - y_0\right) + \left(G_1\left(y, z_0\right) + \alpha_1\left(y, z_0\right)\right)\left(z_0 - y\right) + \left(G_2\left(y_0, z\right) + \right. \\
\left. \alpha_2\left(y_0, z\right)\right)\left(z - y_0\right) = \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_1 - y\right) + \\
+\left(G_2\left(y_0, z_0\right) + \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z - y_1\right) + \left(G_1\left(y, z_0\right) + \alpha_1\left(y, z_0\right) - \right. \\
\left. -G_1\left(y_0, z_0\right) - \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_0 - y\right) + \left(G_2\left(y_0, z\right) + \alpha_2\left(y_0, z\right) - \right. \\
\left. -G_2\left(y_0, z_0\right) - \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z - y_0\right) \geq \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right) \times \\
\times\left(z_1 - y\right) + \left(G_2\left(y_0, z_0\right) + \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z - y_1\right),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
z - y_1 = T\left(z, y\right) - G_1\left(y_0, z_0\right)\left(y_1 - y_0\right) + G_2\left(y_0, z_0\right)\left(z_1 - z_0\right) - \\
-T\left(y_0, z_0\right) \geq G_1\left(y_0, z_0\right)\left(z - y_1\right) + G_2\left(y_0, z_0\right)\left(z_1 - y\right) - \\
-G_1\left(y_0, z_0\right)\left(z - y_0\right) - G_2\left(y_0, z_0\right)\left(z_0 - y\right) + \left(G_1\left(y_0, z\right) + \right. \\
\left. +\alpha_1\left(y_0, z\right)\right)\left(z - y_0\right) + \left(G_2\left(y, z_0\right) + \alpha_2\left(y, z_0\right)\right)\left(z_0 - y\right) = \\
= G_1\left(y_0, z_0\right)\left(z - y_1\right) + G_2\left(y_0, z_0\right)\left(z_1 - y\right) + \left(G_1\left(y_0, z\right) - \right. \\
\left. -G_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z - y_0\right) + \left(G_2\left(y, z_0\right) - G_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_0 - y\right) + \\
+\alpha_1\left(y_0, z\right)\left(z - y_0\right) + \alpha_2\left(y, z_0\right)\left(z_0 - y\right) \geq \\
\geq G_1\left(y_0, z_0\right)\left(z - y_1\right) + G_2\left(y_0, z_0\right)\left(z_1 - y\right),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
z_1 - z = \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_1 - z_0\right) - \left(G_2\left(y_0, z_0\right) + \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right) \times \\
\times \left(y_1 - y_0\right) + T\left(z_0, y_0\right) - T\left(z, y\right) \geq \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_1 - z\right) + \\
+ \left(G_2\left(y_0, z_0\right) + \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(y - y_1\right) - \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_0 - z\right) - \\
- \left(G_2\left(y_0, z_0\right) + \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(y - y_0\right) + \left(G_1\left(z, z_0\right) + \alpha_1\left(z, z_0\right)\right)\left(z_0 - z\right) + \\
+ \left(G_2\left(y_0, y\right) + \alpha_2\left(y_0, y\right)\right)\left(y - y_0\right) = \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_1 - z\right) + \\
+ \left(G_2\left(y_0, z_0\right) + \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(y - y_1\right) + \left(G_1\left(z, z_0\right) - G_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_0 - z\right) + \\
+ \left(G_2\left(y_0, y\right) - G_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(y - y_0\right) + \left(\alpha_1\left(z, z_0\right) - \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_0 - z\right) + \\
+ \left(\alpha_2\left(y_0, y\right) - \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(y - y_0\right) \geq \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right) \times \\
\times \left(z_1 - z\right) + \left(G_2\left(y_0, z_0\right) + \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(y - y_1\right).
\end{gathered}
$$

Отже, маємо змогу застосувати умову 3) до двох систем нерівностей

$$
\begin{aligned}
& y - y_1 \geq G_1\left(y_0, z_0\right)\left(y - y_1\right) + G_2\left(y_0, z_0\right)\left(z_1 - z\right), \\
& z_1 - z \geq \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_1 - z\right) + \\
& + \left(G_2\left(y_0, z_0\right) + \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(y - y_1\right)
\end{aligned}
$$

та

$$
\begin{aligned}
& z_1 - y \geq \left(G_1\left(y_0, z_0\right) + \alpha_1\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z_1 - y\right) + \\
& + \left(G_2\left(y_0, z_0\right) + \alpha_2\left(y_0, z_0\right)\right)\left(z - y_1\right), \\
& z - y_1 \geq G_1\left(y_0, z_0\right)\left(z - y_1\right) + G_2\left(y_0, z_0\right)\left(z_1 - y\right).
\end{aligned}
$$

Тому $y - y_1 \geq \theta$, $z - z_1 \geq \theta$, $z_1 - y \geq \theta$, $z - y_1 \geq \theta$. Це означає, що на підставі принципу індукції нерівності (14.20) доведені.

Якщо тепер припустити, що розв'язок системи (14.19) – єдиний, а рівняння (14.3) має бодай один розв'язок, то стає очевидним, що в такому разі $y^* = z^*$. Це означає, що ми довели таке твердження.

Теорема 14.3. *Нехай справджуються умови теореми 14.2, а також: а) E – правильно напівупорядкований простір, $E_0 = [u, v]$; б) система (14.8) має єдиний в $E_0 \times E_0$ розв'язок; в) розв'язок $x^* \in E_0$ рівняння (14.3) існує. Тоді для єдиного в E_0 розв'язку x^* рівняння (14.3) мають місце оцінки (14.11) і до цього розв'язку збігаються послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$.*

Теорема 14.3 не дає змоги оцінити швидкість збіжності процесу (14.9), (14.10).

Приєднаємо до умов 1) – 5) два додаткові припущення.

6) *Задані неперервні щодо $y, z \in E_0$, додатні лінійні неперервні щодо $w \in E$ оператори $\beta_1(y, z)\, w$, $\beta_2(y, z)\, w$, для яких при $y \leq z$,*

$x, y, z \in E_0$ *мають місце нерівності*

$$
\begin{aligned}
&T(z,x) - T(y,x) \leq (G_1(y,z) + \beta_1(y,z))(z-y), \\
&-(G_2(y,z) + \beta_2(y,z))(z-y) \leq T(x,z) - T(x,y).
\end{aligned}
\tag{14.21}
$$

7) *Існує неперервний щодо* $y, z \in E_0$*, додатній лінійний неперервний щодо* $w \in E$ *обернений оператор*

$$
(I - G_1(y,z) - G_2(y,z))^{-1} w = g(y,z) w \tag{14.22}
$$

такий, що лінійний щодо w *оператор*

$$
H(y,z) w = (I - G_1(y,z) - G_2(y,z))^{-1} (\beta_1(y,z) + \beta_2(y,z)) \tag{14.23}
$$

задовольняє нерівність

$$
\|H(y,z)\| \leq q \cdot \|z-y\|^{\gamma} \quad (\gamma \geq 0), \tag{14.24}
$$

де E *– напівупорядкований банахів простір,* I *– тотожний оператор в* E.

Теорема 14.4. *Нехай справджуються умови 1) – 7) і*

$$
q \cdot \|z-y\| \leq q_0 < 1. \tag{14.25}
$$

Тоді послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *збігаються до единого в* E_0 *розв'язку* $x^* \in E_0$ *рівняння (14.3) не повільніше за геометричну прогресію із знаменником* q_0. *При цьому справджуються оцінки*

$$
\begin{aligned}
\max\{\|x^* - y_{n+1}\|, \|z_{n+1} - x^*\|\} \leq \|z_{n+1} - y_{n+1}\| \leq \\
\leq q \|z_n - y_n\|^{1+\gamma}
\end{aligned}
\tag{14.26}
$$

та

$$
\begin{aligned}
\max\{\|x^* - y_{n+1}\|, \|z_{n+1} - x^*\|\} \leq \\
\leq \|z_{n+1} - y_{n+1}\| \leq q_0 \|z_n - y_n\|.
\end{aligned}
\tag{14.27}
$$

Доведення ґрунтується на оцінці

$$
z_{n+1} - y_{n+1} \leq H(y,z)(z_n - y_n), \tag{14.28}
$$

яку можна одержати з формул (14.9), використовуючи оцінки (14.11) та умови 6) і 7). Знаходимо

$$\begin{gathered}z_{n+1}-y_{n+1}\leq\left(G_1\left(y_n,z_n\right)+G_2\left(y_n,z_n\right)\right)\left(z_{n+1}-y_{n+1}\right)+\\+\left(\beta_1\left(y_n,z_n\right)+\beta_2\left(y_n,z_n\right)\right)\left(z_n-y_n\right)-\alpha_1\left(y_n,z_n\right)\left(z_n-z_{n+1}\right)-\\-\alpha_2\left(y_n,z_n\right)\left(y_{n+1}-y_n\right)\leq\left(G_1\left(y_n,z_n\right)+G_2\left(y_n,z_n\right)\right)\times\\\times\left(z_{n+1}-y_{n+1}\right)+\left(\beta_1\left(y_n,z_n\right)+\beta_2\left(y_n,z_n\right)\right)\left(z_n-y_n\right).\end{gathered}\tag{14.29}$$

Оскільки обернений оператор $g\left(y,z\right)$ – додатній, то із (14.29) отримуємо оцінку (14.28). Маючи на увазі співвідношення (14.11) і монотонність норми та (14.24), (14.25), можна одержати потрібні оцінки (14.26), (14.27).

Розглянемо деякі часткові випадки. Вважаючи E – напівупорядкованим банаховим простором, припустимо, що існують похідні Фреше $T_1\left(y,z\right)w$, $T_2\left(y,z\right)w$ відповідно за y та за z оператора $T(y,z)w$. У цьому випадку, прийнявши

$$G_1\left(y,z\right)w=T_1\left(y,z\right)w,\quad G_2\left(y,z\right)w=-T_2\left(y,z\right)w,\tag{14.30}$$

$$\alpha_1\left(y,z\right)=\alpha_2\left(y,z\right)=\theta,\tag{14.31}$$

із (14.9), (14.10), отримуємо алгоритм, близький до одного з алгоритмів М. С. Курпеля, описаних у §13 (див. також [46, 55]).

Приймемо тепер

$$\begin{gathered}G_1\left(y,z\right)\left(z-y\right)=\left(T_1\left(y,z\right)-\alpha_{10}\left(z-y\right)\right)\left(z-y\right),\\G_2\left(y,z\right)\left(z-y\right)=-\left(T_2\left(y,z\right)-\alpha_{20}\left(z-y\right)\right)\left(z-y\right),\end{gathered}\tag{14.32}$$

де α_{10}, α_{20} – білінійні оператори, які діють $[\theta,v-u]\times[\theta,v-u]$ в $[\theta,v-u]$. У цьому випадку можна отримати результати, близькі до результатів із [99] і які охоплюють результати із [99]. За цієї ситуації алгоритм (14.9), (14.10) характеризується квадратичною швидкістю збіжності.

Розглянемо випадок, коли оператори G_1, G_2 мають вигляд

$$\begin{gathered}G_1\left(y,z\right)=T_1\left(y,y\right)+\\+\tfrac{1}{2}T_{11}\left(y,y\right)h\left(y\right)\left(z-T\left(z,y\right)-y+T\left(y,z\right)\right),\end{gathered}\tag{14.33}$$

$$\begin{gathered}G_2\left(y,z\right)=-T_2\left(y,y\right)+\\+\tfrac{1}{2}T_{22}\left(y,y\right)h\left(y\right)\left(z-T\left(z,y\right)-y+T\left(y,z\right)\right),\end{gathered}\tag{14.34}$$

де

$$h\,(y) = (I - T_1\,(y,y) + T_2\,(y,y))^{-1}\,, \qquad (14.35)$$

$T_{11},\quad T_{22}$– другі похідні Фреше від $T\,(y,z)$ щодо y та z відповідно, причому T_{11}, T_{22} як білінійні оператори діють відповідно із $[\theta, v-u]\times[\theta, v-u]$ в $[\theta, v-u]$. Приймемо

$$G\,(y,z) = (I - T_1\,(y,z) + T_2\,(y,z))\,w. \qquad (14.36)$$

Теорема 14.5. *Нехай справджуються умови 1) – 7) з означеними за допомогою формул (14.33), (14.35) оператори* $G_1\,(y,z)$, $G_2\,(y,z)$, $h\,(y)$. *Нехай* $h\,(y)\,w$ *є додатнім як лінійний щодо* w *оператор. Тоді для двостороннього ітераційного процесу (14.9), (14.10) має місце оцінка*

$$\|z_{n+1} - y_{n+1}\| \le Q\,\|z_n - y_n\|^3 \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,, \qquad (14.37)$$

де

$$\begin{gathered} Q \ge \tfrac{1}{4}\,\|G\,(y,z)\,(T_{11}\,(y,y) - T_{22}\,(y,y))\,h\,(y)\,\times \\ \times\left\{\sup_{y,z\in[y_n,z_n]}(T_1\,(y,y) - T_2\,(y,y))\right\}\Bigg\|. \end{gathered} \qquad (14.38)$$

Доведення. Безпосередньо із (14.9) випливає

$$\begin{gathered} z_{n+1} - y_{n+1} = [G_1\,(y_n,z_n) + G_2\,(y_n,z_n)]\,(z_{n+1} - y_{n+1}) - \\ - [T\,(y_n,z_n) - T\,(y_n,y_n) - G_1\,(y_n,z_n)\,(z_n - y_n)] - \\ - [T\,(y_n,y_n) - T\,(y_n,z_n) - G_2\,(y_n,z_n)\,(z_n - y_n)]\,. \end{gathered} \qquad (14.39)$$

Позначивши задля зручності вирази із других та третіх квадратних дужок через K_1 і K_2 відповідно, після нескладних перетворень знайдемо

$$\begin{gathered} K_1 = \tfrac{1}{4}T_{11}\,(y_n,y_n)\,h\,(y_n)\left(\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}\right)(z_n - y_n)^3\,, \\ K_2 = -\tfrac{1}{4}T_{22}\,(y_n,y_n)\,h\,(y_n)\left(\tilde{T}_{11} - \tilde{T}_{22}\right)(z_n - y_n)^3\,, \end{gathered} \qquad (14.40)$$

розуміючи формальний запис Sw^3 як послідовну дію лінійних операторів $((S\,(w))\,(w))\,w$, де $\bar{T}_{11},\ \bar{T}_{22},\ \tilde{T}_{11},\ \tilde{T}_{22}$ – значення $T_{11}\,(y,z)$ і $T_{22}\,(y,z)$ в деяких проміжних точках $(\bar{y},\bar{z})$ і $(\tilde{y},\tilde{z})$, для яких $y_n \le$

$\tilde{y}, \tilde{z}, \bar{y}, \bar{z} \leq z_n$. Оцінки (14.37) і (14.38) очевидним способом випливають із співвідношень (14.39) і (14.40). Теорему доведено.

Теорему 14.5 можна вважати як один із прикладів до теореми 14.3 щодо конкретизації алгоритму (14.9), (14.10) з теоретичною кубічною збіжністю ($\gamma = 2$). З іншого боку, теорема 14.4 співпадає з теоремою 3 із [114], де досліджений той частковий випадок алгоритму (14.9), (14.10), у якому оператори α_1 та α_2 є нульовими операторами.

Доцільно описати алгоритм (14.9), (14.10) у застосуванні до рівнянь формально загальнішого за (14.3) вигляду

$$Lx = T\left(x, x\right), \tag{14.41}$$

з додатковою умовою

$$Sx = r \tag{14.42}$$

з такими самими припущеннями щодо операторів L, S, з якими ми мали справу в §3, тобто $L : D \to E_1$, $S : D \to E_2$, L, S – лінійні неперервні в області D оператори, причому, якщо L не є нульовим оператором, то він має лінійний неперервний обернений L^{-1}, D – обмежена замкнена множина у напівупорядкованому просторі E, E_1, E_2 – напівупорядковані простори і, крім того, E і E_1 – структурно-нормовані через архімедові лінеали N і N_1 простори з узагальненими нормами $\|\cdot\|$ і $\|\cdot\|_1$. Задля спрощень можна вважати E і E_1 – банаховими напівупорядкованими просторами, зберігаючи ті самі позначення для банахових норм відповідно. Нехай $T\left(y, z\right)$ – неперервний при $y, z \in D$ оператор, який набуває значень з E_1. Подамо аналоги умов 1) – 6) для рівняння вигляду (14.41) з умовою (14.42). Сформулюємо аналоги умов 1) – 7) для цього випадку.

1a) Співпадає з умовою 1) при $Sy = Sz = Sx = r$.

2a) Співпадає з умовою 2) при $Sy = Sz = r$.

3a) Якщо справджуються співвідношення (14.5), (14.6), то з нерівностей

$$\begin{aligned} &Lp \geq Q_1\left(y, z\right)p + Q_2\left(y', z'\right)q, \\ &Lq \geq Q_3\left(y', z'\right)p + Q_4\left(y, z\right)q, \\ &Sp = Sq = \theta,\ Sy = Sz = Sy' = Sz' = r \end{aligned}$$

при $y, z, y', z' \in D$, $p, q \in E$ випливають нерівності $p \geq \theta$, $q \geq \theta$, де θ – нульовий елемент в E.

4a) Задані $u, v \in D$, *для яких*

$$\begin{array}{l} Lu \leq T\left(u,v\right), \\ Lv \geq T\left(v,u\right), \quad Su = Sv = r. \end{array}$$

5a) При кожному $n = 0,\ 1,\ \ldots$ *система рівнянь*

$$\begin{array}{l} Ly_{n+1} = G_1\left(y_n,z_n\right)\left(y_{n+1}-y_n\right)- \\ -G_2\left(y_n,z_n\right)\left(z_{n+1}-z_n\right)+T\left(y_n,z_n\right), \\ Lz_{n+1} = \left(G_1\left(y_n,z_n\right)+\alpha_1\left(y_n,z_n\right)\right)\left(z_{n+1}-z_n\right)- \\ -\left(G_2\left(y_n,z_n\right)+\alpha_2\left(y_n,z_n\right)\right)\left(y_{n+1}-y_n\right)+T\left(z_n,y_n\right) \end{array} \tag{14.43}$$

з початковими наближеннями (14.10) та з умовою

$$Sy_{n+1} = Sz_{n+1} = r \tag{14.44}$$

має розв'язок щодо $y_{n+1}, z_{n+1} \in D$.

6a) Співпадає з умовою 6) при $Sy = Sz = Sx = r$.

7a) Існує неперервний щодо $y, z \in D$, *додатній лінійний щодо* w *обернений оператор*

$$\left(L - G_1\left(y,z\right) - G_2\left(y,z\right)\right)^{-1} w = g\left(y,z\right) w$$

такий, що оператор

$$H\left(y,z\right) w = \left(L - G_1\left(y,z\right) - G_2\left(y,z\right)\right)^{-1}\left(\beta_1\left(y,z\right)+\beta_2\left(y,z\right)\right)$$

задовольняє нерівність (14.24).

Задля прикладу сформулюємо для рівняння (14.40) з початковою умовою (14.41) аналог однієї з попередніх теорем.

Теорема 14.1a. *Нехай справджуються умови 1a) – 5a) і задача (14.41), (14.42) має розв'язок* $x^* \in D$. *Тоді мають місце співвідношення (14.11).*

Подібним способом можна отримати аналоги теорем 14.2 – 14.5 для задачі (14.41), (14.42) і алгоритму (14.43), (14.44), (14.10).

Приклад 14.1. Розглянемо крайову задачу: потрібно знайти розв'язок $w\left(t_1,t_2\right)$, який задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t_1 \partial t_2} = f\left(t_1,t_2,w,w\right) \tag{14.45}$$

в області $G = \{(t_1, t_2)|\, 0 \le t_1 \ge T_1,\ 0 \le t_2 \le T_2\}$, $T_1,\ T_2 > 0$ та умови

$$\begin{array}{l} w(t_1, 0) = \sigma(t_1) \quad (t_1 \in [0, T_1]), \\ w(0, t_2) = \tau(t_2) \quad (t_2 \in [0, T_2]), \\ \ \sigma(0) = \tau(0), \end{array} \tag{14.46}$$

де $\sigma(t_1)$ і $\tau(t_2)$ задані дійсні функції. Задачу (14.45), (14.46) очевидним способом можна звести (див., напр., [135]) до інтегрального рівняння

$$\begin{array}{l} w(t_1, t_2) = a(t_1, t_2) + \\ + \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_2} f(s_1, s_2, w(s_1, s_2), w(s_1, s_2))\, ds_1 ds_2, \end{array} \tag{14.47}$$

де $a(t_1, t_2) = \sigma(t_1) + \tau(t_2) - \sigma(t_1)$. Припустимо, що: а) задані невід'ємні неперервні функції $\alpha_{11}(t_1)$, $\alpha_{12}(t_2)$, $\beta_{11}(t_1)$, $\beta_{12}(t_2)$ такі, що

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}(t_1)\,\alpha_{12}(t_2)\,(z - y) \le f(t_1, t_2, z, x) - f(t_1, t_2, y, x), \\ f(t_1, t_2, x, z) - f(t_1, t_2, x, y) \le -\beta_{11}(t_1)\,\beta_{12}(t_2)\,(z - y) \end{array} \tag{14.48}$$

при $(t_1, t_2) \in G$, $y \le z$, $y, z, x \in [0, z_0 - y_0]$. Нехай при цьому або

$$\alpha_{11}(t_1) = \beta_{11}(t_1), \tag{14.49}$$

або

$$\alpha_{12}(t_2) = \beta_{12}(t_2), \tag{14.50}$$

де $y_0 = y_0(t_1, t_2)$, $z_0 = z_0(t_1, t_2)$ – неперервні функції, які задовольняють таку умову: б)

$$y_0(t_1, t_2) \le w(t_1, t_2) \le z_0(t_1, t_2),$$

$$y_0(t_1, t_2) \le a(t_1, t_2) + \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_2} f(s_1, s_2, y_0(s_1, s_2), z_0(s_1, s_2))\, ds_1 ds_2,$$
$$z_0(t_1, t_2) \ge a(t_1, t_2) + \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_2} f(s_1, s_2, z_0(s_1, s_2), y_0(s_1, s_2))\, ds_1 ds_2.$$

Нехай також справджуються припущення: в) $\alpha_{11}(t_1)\,\alpha_{12}(t_2) - \beta_{11}(t_1)\,\beta_{12}(t_2) \ge 0$; г) задані неперервні невід'ємні функції $\alpha_{21}(t)$,

$\alpha_{22}(t)$, $\beta_{21}(t)$, $\beta_{22}(t)$, для яких при $(t_1,t_2) \in G$, $y \le z$, $y,z,x \in [0, z_0 - y_0]$ маємо

$$f(t_1,t_2,z,x) - f(t_1,t_2,y,x) \le \beta_{21}(t_1)\,\beta_{22}(t_2)\,(z-y)\,,$$
$$-\alpha_{21}(t_1)\,\alpha_{22}(t_2)\,(z-y) \le f(t_1,t_2,x,z) - f(t_1,t_2,x,y)\,.$$

У цьому випадку послідовні наближення (14.9) можна обчислювати за допомогою формул

$$\begin{aligned}
&y_{n+1} = y_{n+1}(t_1,t_2) = a(t_1,t_2) + \\
&+\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \alpha_{11}(s_1)\,\alpha_{12}(s_2)\,(y_{n+1}(s_1,s_2) - y_n(s_1,s_2))\,ds_1ds_2 - \\
&-\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \beta_{11}(s_1)\,\beta_{12}(s_2)\,(z_{n+1}(s_1,s_2) - z_n(s_1,s_2))\,ds_1ds_2 + \\
&+\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f(s_1,s_2,y_n(s_1,s_2),z_n(s_1,s_2))\,ds_1ds_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z_{n+1} = z_{n+1}(t_1,t_2) = a(t_1,t_2) + \\
&+\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \alpha_{11}(s_1)\,\alpha_{12}(s_2)\,(z_{n+1}(s_1,s_2) - z_n(s_1,s_2))\,ds_1ds_2 - \\
&-\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \beta_{11}(s_1)\,\beta_{12}(s_2)\,(y_{n+1}(s_1,s_2) - y_n(s_1,s_2))\,ds_1ds_2 + \\
&+\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f(s_1,s_2,z_n(s_1,s_2),y_n(s_1,s_2))\,ds_1ds_2.
\end{aligned}$$

Послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ задовольняють співвідношення (14.11) в області G. Їх можна обчислити у явному вигляді за допомогою функції Бесселя нульового порядку (див. [135]). При цьому має місце оцінка

$$z_{n+1} - y_{n+1} \le M\,(1 + NT_1T_2)\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} (z_n(s_1,s_2) - y_n(s_1,s_2))\,ds_1ds_2,$$

де

$$\begin{aligned}
&M \ge \beta_{21}(t_1)\,\beta_{22}(t_2) - \beta_{11}(t_1)\,\beta_{12}(t_2) + \\
&+\alpha_{21}(t_1)\,\alpha_{22}(t_2) - \alpha_{11}(t_1)\,\alpha_{12}(t_2)\,, \\
&N \ge h(s_1,s_2)\cdot I_0\left(2\sqrt{\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2}\right), \\
&h(s_1,s_2) = \alpha_{11}(s_1)\,\alpha_{12}(s_2) + \beta_{11}(s_1)\,\beta_{12}(s_2)\,,
\end{aligned}$$

$I_0(t)$– модифікована функція Бесселя нульового порядку. Звідси отримуємо

$$\begin{aligned}&z_{n+1}(t_1,t_2)-y_{n+1}(t_1,t_2)\le\\&\le\tfrac{\left(T_1^nT_2^nM^{n+1}(1+NT_1T_2)\right)^{n+1}}{((n+1)!)^2}\left(z_0(t_1,t_2)-y_0(t_1,t_2)\right).\end{aligned}$$

Зауваження 14.1. *Єдиність розв'язку рівняння (14.3) і збіжність до нього ітераційного процесу (14.9), (14.10) можна гарантувати за виконання умов 1) – 5) та за правильної напівупорядкованості E, формально не вимагаючи виконання умов 6), 7), якщо припускати, що з нерівності $w\ge(G_1(y,z)+G_2(y,z))\,w$ випливає нерівність $w\ge\theta$, а також з приводу спорідненою з цим припущенням умови 3), що умови такого типу, тобто, умови теорем про операторні нерівності часто потребують, у свою чергу, спеціальних припущень, котрі гарантували б збіжність тих чи інших ітераційних процесів (див., напр. [57]).*

Зауваження 14.2. *Як уже зазначалося, в тому випадку, коли оператори $G_1(y,z)\,w$, $-G_2(y,z)\,w$ співпадають з похідними $T_1(y,z)\,w$, $T_2(y,z)\,w$ щодо y та щодо z відповідно, а оператори $\alpha_1(y,z)\,w$, $\alpha_2(y,z)\,w$ є нульовими операторами, алгоритм (14.9), (14.10) лише формально відрізняється від двостороннього алгоритму М. С. Курпеля (див. [57, §13]). За цієї ситуації алгоритм (14.9), (14.10) не може мати, взагалі кажучи, надквадратичної швидкості збіжності. В іншому випадку, коли оператор $T(y,z)$ не залежить від котрогось із аргументів y або z з ітераційних формул (14.9) випливають аналоги методу Чаплигіна із §9.*

У застосуванні до рівняння (14.3) ітераційні формули основного варіанту двостороннього методу Курпеля мають вигляд

$$\begin{aligned}&y_{n+1}=T_1(y_n,y_n)(y_{n+1}-y_n)+\\&T_2(y_n,y_n)(z_{n+1}-z_n)+T(y_n,z_n),\\&z_{n+1}=T_1(y_n,y_n)(z_{n+1}-z_n)+\\&T_2(y_n,y_n)(y_{n+1}-y_n)+T(z_n,y_n),\end{aligned}\tag{14.51}$$

де $T_1(y,z)\,w$ та $T_2(y,z)\,w$ є похідними від оператора $T(u,v)$ відповідно щодо u та щодо v, причому $T_1(y,z)\,w$ не спадає щодо y

і z, а $T_2(y,z)\,w$ не зростає щодо y і z. Ітераційні формули (14.51) можна отримати з формул (14.9), якщо прийняти

$$G_1(y,z)\,w = T_1(y,y)\,w, \quad G_2(y,z)\,w = -T_2(y,y)\,w \tag{14.52}$$

і вважати $\alpha_1(y,z)$, $\alpha_2(y,z)$ нульовими операторами. Інший варіант методу Курпеля, який для рівняння (14.3) можна описати за допомогою ітераційних формул

$$\begin{aligned} & y_{n+1} = T_1(z_n,z_n)(z_{n+1}-z_n) + \\ & +T_2(z_n,z_n)(y_{n+1}-y_n) + T(z_n,y_n), \\ & z_{n+1} = T_1(z_n,z_n)(y_{n+1}-y_n) + \\ & T_2(z_n,z_n)(z_{n+1}-z_n) + T(y_n,z_n), \end{aligned} \tag{14.53}$$

теж можна отримати з (14.9), прийнявши $G_1(y,z)\,w = T_2(z,z)\,w$, $G_2(y,z)\,w = -T_1(z,z)\,w$ і обмінявши ролями аргументи y, z в операторі $T(y,z)$ теж за припущення про те, що α_1, α_2– нуль-оператори.

РОЗДІЛ VI. ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕНІ ДВОСТОРОННІ МЕТОДИ

Реалізація двосторонніх методів чаплигінського і курпелівського типів на практиці наштовхується на труднощі, спричинені потребою відшукувати обернені оператори, які, як правило, можна знайти лише наближено, а також впливом похибок заокруглень. Ці фактори можуть призвести до втрати двостороннього характеру ітерацій та до втрати надлінійної швидкості збіжності процесу. Тому виникає потреба описати можливі межі збурень відповідних операторів у лінеаризованих доданках ітераційних процесів, досліджених у попередніх розділах. Для методів чаплигінського типу відповідний аналіз проведений у §11. Схожі мотиви призводять до потреби використати поняття часткової ліпшицієвості замість односторонньої ліпшицієвості для методів курпелівського типу. З цього погляду узагальнення методу Курпеля призводять до побудови і дослідження квазікурпелевих двосторонніх методів. Розглядаємо також двосторонні аналоги методу Піконе, дослідження яких проводиться за схемою, близькою до відповідної схеми із [57]. Наводимо також деякі узагальнення принципу мажорант Л.В.Канторовича у вигляді, який узагальнює основні результати із [98].

§15. Рівняння з частковою ліпшицієвістю

Для рівняння

$$x = Fx \tag{15.1}$$

у попередніх параграфах 9-12 використано у різних формулах односторонню ліпшицієвість. Як і раніше, припускатимемо , що існує оператор $T(y,z)$, для якого

$$T(x,x) = Fx. \tag{15.2}$$

Нехай рівняння (15.1) має вигляд

$$x = T(x,x). \tag{15.3}$$

Оператор $T(y,z) : E_0 \times E_0 \to E$ будемо вважати неперервним щодо $y,z \in E_0$, $E_0 = [a,b]$ – відрізок $(a \leq b)$ у напівупорядкованому просторі E. Основне припущення щодо оператора $T(y,z)$ сформулюємо у вигляді такої вимоги, яку назвемо умовою А.

Умова А. *Задані неперервні щодо $y,z \in E_0$, $w \in [\theta, b-a]$, неспадні за y та незростаючі за z оператори $A_1(y,z)\,w$, $A_2(y,z)\,w$, які щодо $w \in [\theta, b-a]$ є лінійними додатними і для яких при $y \leq z$, $x,y,z \in E_0$ будемо мати*

$$\begin{aligned} -A_1(z,y)(z-y) \leq T(z,x) - T(y,x), \\ T(x,z) - T(x,y) \leq A_2(z,y)(z-y). \end{aligned} \tag{15.4}$$

Називатимемо це припущення також частковою ліпшицієвістю оператора T.

Приймемо

$$y_0 = a, \quad z_0 = b \tag{15.5}$$

і розглянемо ітераційний процес, побудований за допомогою формул

$$\begin{gathered} y_{n+1} = -\left(A_1(z_n,y_n) + A_2(z_n,y_n)\right)(z_n - y_n) + T(y_n,z_n), \\ z_{n+1} = \left(A_1(z_n,y_n) + A_2(z_n,y_n)\right)(z_n - y_n) + T(z_n,y_n) \\ (n = 0,1,...). \end{gathered} \tag{15.6}$$

Теорема 15.1. *Нехай: а) справджується умова А; б) рівняння (15.3) має розв'язок $x^* \in E_0$; в) елементи y_1, z_1, обчислені за формулами (15.6) задовольняють співвідношення*

$$y_0 \leq y_1 \leq x^* \leq z_1 \leq z_0. \tag{15.7}$$

Тоді для послідовних наближень, побудованих за формулами (15.6), для кожного $n = 0,\ 1,\ \ldots$ справджується співвідношення

$$y_n \leq y_{n+1} \leq x^* \leq z_n \leq z_{n+1}. \tag{15.8}$$

Доведення. Використовуючи (15.6) для $n = 1$ та умову А і (15.7) знайдемо

$$\begin{aligned} & y_2 - y_1 = -\left(A_1(z_1,y_1) + A_2(z_1,y_1)\right)(z_1 - y_1) + T(y_1,z_1) + \\ & + \left(A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0)\right)(z_0 - y_0) - T(y_0,z_0) \geq -(A_1(z_1,y_1) + \\ & + A_2(z_1,y_1))(z_1 - y_1) + \left(A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0)\right)(z_0 - y_0) - \\ & - A_1(y_1,y_0)(y_1 - y_0) - A_2(z_0,z_1)(z_0 - z_1) \geq \\ & \geq A_1(z_0,y_0)(z_0 - z_1) + A_2(z_0,y_0)(y_1 - y_0) \geq \theta, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&z_1 - z_2 = (A_1(z_0, y_0) + A_2(z_0, y_0))(z_0 - y_0) + T(z_0, y_0) - \\
&- (A_1(z_1, y_1) + A_2(z_1, y_1))(z_1 - y_1) - T(z_1, y_1) \geq (A_1(z_0, y_0) + \\
&+ A_2(z_0, y_0))(z_0 - y_0) - (A_1(z_1, y_1) + A_2(z_1, y_1))(z_1 - y_1) - \\
&- A_1(z_0, z_1)(z_0 - z_1) - A_2(y_1, y_0)(y_1 - y_0) \geq \\
&\geq A_1(z_0, y_0)(y_1 - y_0) + A_2(z_0, y_0)(z_0 - z_1) \geq \theta.
\end{aligned}
$$

Отже, маємо нерівності $y_2 \geq y_1$, $z_2 \leq z_1$. Переконаємося, що $y_2 \leq x^* \leq z_2$. Справді, із (15.3) і (15.6) для $n = 1$ та з умови A, (15.7) і щойно отриманих нерівностей випливає

$$
\begin{aligned}
&x^* - y_2 = T(x^*, x^*) + (A_1(z_1, y_1) + A_2(z_1, y_1))(z_1 - y_1) - \\
&- T(y_1, z_1) \geq (A_1(z_1, y_1) + A_2(z_1, y_1))(z_1 - x^*) + (A_1(z_1, y_1) + \\
&+ A_2(z_1, y_1))(x^* - y_1) - A_1(x^*, y_1)(x^* - y_1) - A_2(z_1, x^*)(z_1 - x^*) \geq \\
&\geq A_1(z_1, y_1)(z_1 - x^*) + A_2(z_1, y_1)(x^* - y_1) \geq \theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&z_2 - x^* = (A_1(z_1, y_1) + A_2(z_1, y_1))(z_1 - y_1) + T(z_1, y_1) - \\
&- T(x^*, x^*) \geq (A_1(z_1, y_1) + A_2(z_1, y_1))(z_1 - x^*) + (A_1(z_1, y_1) + \\
&+ A_2(z_1, y_1))(x^* - y_1) - A_1(z_1, x^*)(z_1 - x^*) - A_2(x^*, y_1)(x^* - y_1) \geq \\
&\geq A_1(z_1, y_1)(x^* - y_1) + A_2(z_1, y_1)(z_1 - x^*) \geq \theta.
\end{aligned}
$$

Отже, з (15.7) випливають співвідношення $y_1 \leq y_2 \leq x^* \leq z_2 \leq z_1$, тобто, з (15.8) для $n = 0$ випливають нерівності (15.8) для $n = 1$. Це з покликанням на принцип індукції дозволяє вважати теорему доведеною.

В умовах наступної теореми існування розв'язку рівняння (15.3) не постулюється.

Теорема 15.2. *З часткової ліпшицієвості (тобто з умови A) та з нерівностей*

$$y_0 \leq y_1 \leq z_1 \leq z_0 \tag{15.9}$$

випливають нерівності

$$y_n \leq y_{n+1} \leq z_{n+1} \leq z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{15.10}$$

для послідовних наближень, побудованих за формулами (15.6).

Доведення. Доведення потребує тільки нерівність $y_2 \leq z_2$, бо нерівності $y_1 \leq y_2$, $z_2 \leq z_1$ підтверджені при доведенні теореми 15.1. Можна скористатися з умови A і припущення (15.9), щоб отримати

$$
\begin{aligned}
z_2 - y_2 = 2(A_1(z_1, y_1) + A_2(z_1, y_1))(z_1 - y_1) + T(z_1, y_1) - \\
- T(y_1, z_1) \geq (A_1(z_1, y_1) + A_2(z_1, y_1))(z_1 - y_1) \geq \theta.
\end{aligned}
$$

Тому можна вважати обгрунтованими нерівності (15.10), оскільки в них оправданий крок індукції від $n = 0$ до $n = 1$.

Правильна напівупорядкованість E призводить до висновку про існування границь $y^* \in E_0$ та $z^* \in E_0$ відповідно послідовностей $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$, кожна з яких монотонна і обмежена. Неперервність операторів T, A_1, A_2 дає підставу для висновку про те, що (y^*, z^*) є розв'язком системи

$$\begin{aligned} &y = -\left(A_1\left(z, y\right) + A_2\left(z, y\right)\right)\left(z - y\right) + T\left(y, z\right), \\ &z = \left(A_1\left(z, y\right) + A_2\left(z, y\right)\right)\left(z - y\right) + T\left(z, y\right). \end{aligned} \tag{15.11}$$

Переконаємося, що (y^*, z^*) є крайнім в E_0 розв'язком системи (15.11). Це означає, що потрібно довести нерівності

$$y^* \le y \le z^*, \quad y^* \le z \le z^* \tag{15.12}$$

для всякого такого розв'язку (y, z) системи (15.11), для якого $z, y \in E_0$. Задля цієї мети доведемо

$$y_0 \le y_1 \le y \le z_1 \le z_0, \quad y_0 \le y_1 \le z \le z_1 \le z_0, \tag{15.13}$$

зважаючи на те, що за припущенням $z, y \in E_0$ маємо

$$y_0 \le y \le z_0, \quad y_0 \le z \le z_0. \tag{15.14}$$

Отже, з (15.6) для $n = 0$, (15.3) та з (15.5), (15.14) і умови A випливають співвідношення

$$\begin{aligned} &y - y_1 = -\left(A_1\left(z, y\right) + A_2\left(z, y\right)\right)\left(z - y\right) + T\left(y, z\right) + \left(A_1\left(z_0, y_0\right) + \right. \\ &\left. + A_2\left(z_0, y_0\right)\right)\left(z_0 - y_0\right) - T\left(y_0, z_0\right) \ge -\left(A_1\left(z, y\right) + A_2\left(z, y\right)\right)\left(z - y\right) + \\ &+ \left(A_1\left(z_0, y_0\right) + A_2\left(z_0, y_0\right)\right)\left(z_0 - y_0\right) - A_1\left(y, y_0\right)\left(y - y_0\right) - A_2\left(z_0, z\right) \times \\ &\times (z_0 - z) = -A_1\left(z, y\right)\left(z - z_0\right) + A_1\left(z, y\right)\left(z_0 - y_0\right) + A_1(z_0, y_0) \times \\ &\times (z_0 - y) + A_1\left(z_0, y_0\right)\left(y - y_0\right) - A_2\left(z, y\right)\left(z - y_0\right) + A_2\left(z, y\right)\left(y - \right. \\ &\left. - y_0\right) + A_2\left(z_0, y_0\right)\left(z_0 - z\right) + A_2\left(z_0, y_0\right)\left(z - y_0\right) - A_1\left(y, y_0\right)\left(y - y_0\right) - \\ &- A_2\left(z_0, z\right)\left(z_0 - z\right) = \left(A_1\left(z_0, y_0\right) - A_1\left(y, y_0\right)\right)\left(y - y_0\right) + \left(A_1\left(z_0, y_0\right) - \right. \\ &\left. - A_1\left(z, y\right)\right)\left(z_0 - y\right) + \left(A_2\left(z_0, y_0\right) - A_2\left(z_0, z\right)\right)\left(z_0 - z\right) + \left(A_2\left(z_0, y_0\right) - \right. \\ &\left. - A_2\left(z, y\right)\right)\left(z - y_0\right) + A_1\left(z, y\right)\left(z_0 - z\right) + A_2\left(z, y\right)\left(y - y_0\right) \ge \theta, \end{aligned}$$

$$z - y_1 = (A_1(z,y) + A_2(z,y))(z-y) + T(z,y) + (A_1(z_0,y_0) +$$
$$+A_2(z_0,y_0))(z_0-y_0) - T(y_0,z_0) \geq (A_1(z,y) + A_2(z,y))(z-y) +$$
$$+(A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0))(z_0-y_0) - A_1(z,y_0)(z-y_0) -$$
$$-A_2(z_0,y)(z_0-y) = A_1(z,y)(z-z_0) + A_1(z,y)(z_0-y) +$$
$$+A_1(z_0,y_0)(z-y_0) + A_1(z_0,y_0)(z_0-z) + A_2(z,y)(z-y_0) +$$
$$+A_2(z,y)(y_0-y) + A_2(z_0,y_0)(y-y_0) - A_1(z,y_0)(z-y_0)$$
$$-A_2(z_0,y)(z_0-y) = (A_1(z_0,y_0) - A_1(z,y))(z_0-z) +$$
$$+(A_2(z_0,y_0) - A_2(z_0,y))(z_0-y) + (A_1(z_0,y_0) -$$
$$-A_1(z,y_0))(z-y_0) + (A_2(z_0,y_0) - A_2(z,y))(y-y_0) +$$
$$+A_1(z,y)(z_0-y) + A_2(z,y)(z-y_0) \geq \theta,$$

$$z_1 - y = (A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0))(z_0-y_0) + T(z_0,y_0) + (A_1(z,y) +$$
$$+A_2(z,y))(z-y) - T(y,z) \geq (A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0))(z_0-y_0) +$$
$$+(A_1(z,y) + A_2(z,y))(z-y) - A_1(z_0,y)(z_0-y) - A_2(z,y_0)(z-$$
$$-y_0) = A_1(z_0,y_0)(z_0-y_0) + A_1(z,y)(z-y) - A_1(z_0,y)(z_0-y) +$$
$$+A_2(z_0,y_0)(z_0-y_0) + A_2(z,y)(z-y) - A_2(z,y_0)(z-y_0) =$$
$$= A_1(z_0,y_0)(z_0-y) + A_1(z_0,y_0)(y-y_0) + A_1(z,y)(z-y_0) +$$
$$+A_1(z,y)(y_0-y) + A_2(z_0,y_0)(z_0-z) + A_2(z_0,y_0)(z-y_0) +$$
$$+A_2(z,y)(z-z_0) + A_2(z,y)(z_0-y) - A_1(z_0,y)(z_0-y) -$$
$$-A_2(z,y_0)(z-y_0) = (A_1(z_0,y_0) - A_1(z_0,y))(z_0-y) + (A_1(z_0,y_0) -$$
$$-A_1(z,y))(y-y_0) + (A_2(z_0,y_0) - A_2(z,y))(z_0-z) + (A_2(z_0,y_0) -$$
$$-A_2(z,y_0))(z-y_0) + A_1(z,y)(z-y_0) + A_2(z,y)(z_0-y) \geq \theta,$$

$$z_1 - z = (A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0))(z_0-y_0) + T(z_0,y_0) - (A_1(z,y) +$$
$$+A_2(z,y))(z-y) - T(y,z) \geq (A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0))(z_0-y_0) -$$
$$-(A_1(z,y) + A_2(z,y))(z-y) - A_1(z_0,z)(z_0-z) - A_2(y,y_0)(y-$$
$$-y_0) = A_1(z_0,y_0)(z_0-z) + A_1(z_0,y_0)(z-y_0) - A_1(z,y)(z-y_0) -$$
$$-A_1(z,y)(y_0-y) + A_2(z_0,y_0)(z_0-y) + A_2(z_0,y_0)(y-y_0) -$$
$$-A_2(z,y)(z-z_0) - A_2(z,y)(z_0-y) - A_1(z_0,z)(z_0-z) -$$
$$-A_2(y,y_0)(y-y_0) = (A_1(z_0,y_0) - A_1(z_0,z))(z_0-z) + (A_1(z_0,y_0) -$$
$$-A_1(z,y))(z-y_0) + (A_2(z_0,y_0) - A_2(z,y))(z-y_0) + (A_2(z_0,y_0) -$$
$$-A_2(z_0,z))(z_0-z) + A_1(z,y)(y-y_0) + A_2(z,y)(z_0-z) \geq \theta.$$

Це підтверджує нерівності (15.13). Крім того, міркування, які використані для доведення нерівностей $y_1 \leq y \leq z_1$, $y_1 \leq z \leq z_1$, фактично означають, що в нерівностях $y_n \leq y \leq z_n$, $y_n \leq z \leq z_n$ можна здійснити крок індукції від n до $n+1$. У поєднанні з нерівностями (15.10), які за використаних тут припущень мають місце завдяки теоремі 8.2, доходимо висновку, що

$$
\begin{aligned}
&y_n \le y_{n+1} \le y \le z_{n+1} \le z_n, \\
&y_n \le y_{n+1} \le z \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,.
\end{aligned}
\tag{15.15}
$$

Тому з огляду на нерівності (15.15), отримуємо співвідношення (15.12), тобто, (y^*, z^*) – крайній в E_0 розв'язок системи (15.11).

Постулюватимемо єдиність розв'язку системи (15.11) та існування розв'язку $x^* \in E_0$ рівняння (15.3). Зважаючи на те, що за таких обставин виходить, що $y^* = z^* = x^*$, бо (x^*, x^*) є розв'язком системи (15.11), якщо x^* – розв'язок рівняння (15.3), можемо зробити такий висновок з наведених міркувань.

Теорема 15.3. *Нехай E – правильно напівупорядкований простір і справджуються вимоги теореми 15.2, а також рівняння (15.3) має розв'язок $x^* \in E_0$, а система (15.11) має в $E_0 \times E_0$ єдиний розв'язок. Тоді існує єдиний в E_0 розв'язок x^* і до нього монотонно збігаються послідовності $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$. При цьому матимемо співвідношення (15.8).*

Умови цієї теореми, забезпечуючи збіжність і двосторонність ітерації (15.6) до розв'язку рівняння (15.3), не дають змоги отримати апріорну оцінку похибки процесу. Тому доцільно розглянути й інші умови, які забезпечують його збіжність. До найпростіших припущень для цієї мети належить ліпшицієвість оператора T. Наступне припущення, яке назвемо умовою Б, разом з умовою А, еквівалентне ліпшицієвості у традиційному розумінні.

Умова Б. *Задані лінійні неперервні додатні щодо $w \in [\theta, b-a]$ неперервні щодо $y, z \in E_0$ оператори $\gamma_1(y,z)\,w$, $\gamma_2(y,z)\,w$, для яких із співвідношень $y \le z$, $x, y, z \in E_0$ випливають нерівності*

$$
\begin{aligned}
&T(z,x) - T(y,x) \le \left(-A_1(z,y) + \gamma_1(z,y)\right)(z-y)\,, \\
&\left(A_2(z,y) - \gamma_2(z,y)\right)(z-y) \le T(x,z) - T(x,y)\,.
\end{aligned}
\tag{15.16}
$$

Теорема 15.4. *Нехай: 1) справджуються умови теореми 15.2; 2) E – напівупорядкований банахів простір; 3) при $y, z \in E_0$ справджується оцінка*

$$
\|H\| \le q < 1, \tag{15.17}
$$

де

$$H = H(y,z) = A_1(z,y) + A_2(z,y) + \gamma_1(z,y) + \gamma_2(z,y). \qquad (15.18)$$

Тоді ітераційний процес (15.5), (15.6) збігається до єдиного в E_0 *розв'язку* x^* *рівняння (15.3) не повільніше за геометричну прогресію із знаменником* q.

Доведення. Із (15.6), (15.8) за допомогою умови Б можна знайти

$$\begin{gathered} z_{n+1} - y_{n+1} = 2\left(A_1(z_n,y_n) + A_2(z_n,y_n)\right)(z_n - y_n) + T(z_n,y_n) - \\ -T(y_n,z_n) \le \left(A_1(z_n,y_n) + A_2(z_n,y_n) + \gamma_1(z_n,y_n) + \gamma_2(z_n,y_n)\right) \times \\ \times (z_n - y_n) = H(y_n,z_n)(z_n - y_n). \end{gathered}$$

Звідси та із (15.8) і (15.17) випливає

$$\|z_{n+1} - y_{n+1}\| \le q\|z_n - y_n\|.$$

Тому існує спільна границя x^* послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ і правдиві оцінки

$$\begin{gathered} \|z_{n+1} - x^*\| \le \|z_{n+1} - y_{n+1}\| \le q\|z_n - y_n\|, \\ \|x^* - y_{n+1}\| \le \|z_{n+1} - y_{n+1}\| \le q\|z_n - y_n\|. \end{gathered}$$

Задля ілюстрації наведеної теореми відмітимо ситуацію, коли

$$A_1(y,z) = -T_1(z), \quad A_2(y,z) = T_2(z),$$

де $T_1(z)$, $T_2(z)$ є похідними Фреше від оператора $T(y,z)$ щодо y та щодо z відповідно, а оператори $\gamma_1(z,y)$, $\gamma_2(z,y)$ є їх відповідними "збуреннями", що задовольняють умову Б. Якщо при цьому

$$\|T_2(y) - T_1(y)\| \le q_0, \quad \|\gamma_1(z,y) - \gamma_2(z,y)\| \le q_1 \quad (y,z \in E),$$

можна прийняти

$$q = q_0 + q_1.$$

Якщо $T(y,z)$ не спадає за y, не зростає за z, то за $A_1(z,y)$, $A_2(z,y)$ можна взяти нульові оператори, а ітераційні формули (15.6) замінити формулами

$$y_{n+1} = T(y_n,z_n), \quad z_{n+1} = T(z_n,y_n).$$

При неспадному щодо y операторі $T(y,z)$ співвідношення (15.4) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} &\theta \le T(z,x) - T(y,x)\,, \\ &T(x,z) - T(x,y) \le A_2(z,y)(z-y)\,, \end{aligned}$$

а ітераційні формули (15.6) можна замінити формулами

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -A_2(z_n,y_n)(z_n-y_n) + T(y_n,z_n)\,, \\ z_{n+1} &= A_2(z_n,y_n)(z_n-y_n) + T(z_n,y_n)\,. \end{aligned}$$

При незростаючому щодо z операторі $T(y,z)$ нерівності (15.4) з умови А можна подати як нерівності

$$\begin{aligned} &-A_1(z,y)(z-y) \le T(z,x) - T(y,x)\,, \\ &T(x,z) - T(x,y) \le \theta, \end{aligned}$$

а ітераційний процес (15.6) матиме вигляд

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -A_1(z_n,y_n)(z_n-y_n) + T(y_n,z_n)\,, \\ z_{n+1} &= A_1(z_n,y_n)(z_n-y_n) + T(z_n,y_n)\,. \end{aligned}$$

За ситуації, коли $T(y,z)$ не залежить від z, а також коли $T(y,z)$ не залежить від y, із результатів цього параграфу як часткові випадки отримуються результати з §10 для напівліпшицієвих операторів.

Зазначимо, що при обґрунтуванні алгоритму (15.5), (15.6) припущення про правдивість співвідношень (15.7) можна замінити іншими припущеннями, які назвемо умовою В.

Умова В. *Справджуються співвідношення*

$$\begin{aligned} &a \le T(a,b) - (A_1(b,a) + A_2(b,a))(b-a)\,, \\ &b \ge T(b,a) + (A_1(b,a) + A_2(b,a))(b-a) \end{aligned} \tag{15.19}$$

з операторами A_1, A_2, які фігурують в умові А.

Теорема 15.5. *Нехай $E_0 = [a,b]$ $(a \le b)$ і справджуються умови А та В. Тоді матимемо нерівності (15.9).*

Доведення. *Оскільки з (15.5), (15.6), (15.19) очевидним чином маємо $y_1 \ge y_0$, $z_1 \le z_0$, то доведення потребує тільки нерівність $z_1 \ge y_1$. Її отримуємо з умови А і щойно знайдених нерівностей, бо*

$$\begin{aligned} z_1 - y_1 = 2\,(A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0))(z_0-y_0) + T(z_0,y_0) - \\ -T(y_0,z_0) \ge (A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0))(z_0-y_0) \ge \theta. \end{aligned}$$

Відмітимо що, що коли до умов теореми (15.5) приєднати припущення про існування розв'язку $x^* \in E_0$ рівняння (15.3), то можна довести нерівності (15.8). Справді, подібні до попередніх виклади призводять до співвідношень

$$\begin{aligned}
&x^* - y_1 = T(x^*, x^*) + (A_1(z_0, y_0) + A_2(z_0, y_0))(z_0 - y_0) - \\
&-T(y_0, z_0) \geq (A_1(z_0, y_0) + A_2(z_0, y_0))(z_0 - y_0) - A_1(x^*, y_0) \times \\
&\times (x^* - y_0) - A_2(z_0, x^*)(z_0 - x^*) = (A_1(z_0, y_0) - \\
&-A_1(x^*, y_0))(x^* - y_0) + (A_2(z_0, y_0) - A_2(z_0, x^*))(z_0 - x^*) + \\
&+A_1(z_0, y_0)(z_0 - x^*) + A_2(z_0, y_0)(x^* - y_0) \geq \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z_1 - x^* = (A_1(z_0, y_0) + A_2(z_0, y_0))(z_0 - y_0) + T(z_0, y_0) - \\
&-T(x^*, x^*) \geq\geq (A_1(z_0, y_0) + A_2(z_0, y_0))(z_0 - y_0) - A_1(z_0, x^*) \times \\
&\times (z_0 - x^*) - A_2(x^*, y_0)(x^* - y_0) = (A_1(z_0, y_0) - \\
&-A_1(z_0, x^*))(z_0 - x^*) + (A_2(z_0, y_0) - A_2(x^*, y_0))(x^* - y_0) + \\
&+A_1(z_0, y_0)(x^* - y_0) + A_2(z_0, y_0)(z_0 - x^*) \geq \theta.
\end{aligned}$$

Отже, підтверджена нерівність $y_1 \leq z_1$ і цим доведено нерівності (15.7).

Приклад 15.1. Для лінійного рівняння

$$x = Ax + b,$$

яке можна подати у вигляді

$$x = A^+x - A^-x + b, \tag{15.20}$$

де $A^+ : E \to E$, $A^- : E \to E$, причому A^+, A^- – лінійні додатні оператори, E – напівупорядкований банахів простір, роль операторів A_1, A_2 можна приписати відповідно операторам A^+, A^- відповідно, тобто можна прийняти

$$A_1 = A^+, \; A_2 = A^-.$$

Тоді співвідношення (15.4) матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
&-A^-(z - y) = (-A^-z + A^+x + b) - (-A^-y + A^+x + b), \\
&(-A^-x + A^+z + b) - (-A^-x + A^+y + b) = A^+(z - y).
\end{aligned}$$

Ітераційні формули (15.6) співпадають з формулами

$$y_{n+1} = A^+ y_n - A^- z_n + b, \qquad z_{n+1} = A^+ z_n - A^- y_n + b. \tag{15.21}$$

За A^+ та A^- можна прийняти, зокрема, відповідно додатну та від'ємну частини оператора A (див., напр., [20]). В такому разі для збіжності процесу (15.6), який співпадає з процесом (15.21), достатньо, щоб як і для звичайного методу послідовних наближень $x_{n+1} = Ax_n + b$, справджувалася умова $\|A\| \le q < 1$.

§16. Квазікурпелеві двосторонні методи

Під такими методами будемо розуміти двосторонні ітераційні алгоритми, котрі поєднують ідеї двосторонніх аналогів методів Курпеля з §14 та двосторонніх методів із §15 з частково ліпшицієвими операторами. Як і при побудові двосторонніх квазічаплигінських методів у §11, доцільність поєднання цих ідей можна оправдати не лише намаганням розширити можливості застосування таких методів. Йдеться також про неможливість знайти точні розв'язки лінеаризованих рівнянь в реальних ітераційних процесах та про громіздкість розв'язків у випадку, коли є теоретична можливість їх знайти явно. Маються також на увазі похибки заокруглень практичних обчислювальних схем і т. п. Описані методи охоплюють з єдиного формального погляду двосторонні алгоритми для рівнянь з недиференційовними операторами як з лінійною, так і з надлінійною швидкістю збіжності. Отже, розглядатимемо загальний спосіб побудови двосторонніх послідовних наближень до розв'язку рівняння

$$x = Fx. \tag{16.1}$$

Як і раніше, будемо вважати, що це рівняння можна подати у вигляді

$$x = T\,(x, x) \tag{16.2}$$

за існування такого оператора $T\,(y, z)$, для якого

$$T\,(x, x) = Fx. \tag{16.3}$$

Розглядатимемо ситуацію, коли E_0 – опукла замкнена множина елементів із напівупорядкованого простору E. Задля зручності приймемо, що $E_0 = [a, b]$ – відрізок в E. Оператор $T(y, z) : E_0 \times E_0 \to E$ вважатимемо неперервним щодо y, z. Основні припущення оформимо у вигляді окремих умов.

Умова A. *Задані оператори* $G_i(y, z) w$, $\alpha_i(y, z) w$, $A_i(y, z) w$ $(i = 1,\ 2)$ *– неперервні щодо* $y, z \in E_0$*, додатні лінійні неперервні щодо* $w \in E$*, неспадні за* y*, незростаючі за* z*, для яких із співвідношень* $y \leq z$*,* $x, y, z \in E_0$ *випливають нерівності*

$$\begin{gathered}(G_1(y, z) + \alpha_1(y, z) - A_1(z, y))(z - y) \leq T(z, x) - T(y, x), \\ T(x, z) - T(x, y) \leq -(G_2(y, z) + \alpha_2(y, z) - A_2(z, y))(z - y).\end{gathered} \tag{16.4}$$

Умова A$_0$. *Так будемо називати припущення, яке отримується з умови A, якщо вимагати, щоб нерівності (16.4) справджувалися при всіх* $x, y, z \in E_0$*, а не лише для таких, що* $y \leq z$*.*

Умова Б. *Співвідношення* $y \leq z$*,* $y, z \in E_0$*,* $p, q \in E$*,*

$$\begin{aligned}&p \geq G_1(y, z) p + G_2(y, z) q, \\ &q \geq (G_1(y, z) + \alpha_1(y, z)) q + (G_2(y, z) + \alpha_2(y, z)) p\end{aligned}$$

спричинюють нерівності $p \geq \theta$*,* $q \geq \theta$*.*

Умова B. *При кожному* $n = 0,\ 1,\ \ldots$ *система рівнянь*

$$\begin{gathered}y_{n+1} = G_1(y_n, z_n)(y_{n+1} - y_n) - G_2(y_n, z_n)(z_{n+1} - z_n) - \\ -(A_1(z_n, y_n) + A_2(z_n, y_n))(z_n - y_n) + T(y_n, z_n), \\ z_{n+1} = (G_1(y_n, z_n) + \alpha_1(y_n, z_n))(z_{n+1} - z_n) - \\ -(G_2(y_n, z_n) + \alpha_2(y_n, z_n))(y_{n+1} - y_n) + \\ +(A_1(z_n, y_n) + A_2(z_n, y_n))(z_n - y_n) + T(z_n, y_n)\end{gathered} \tag{16.5}$$

має розв'язок (y_{n+1}, z_{n+1})*, де*

$$y_0 = a, \quad z_0 = b. \tag{16.6}$$

Теорема 16.1. *Нехай справджуються умови A) – B) і для елементів* y_0*,* z_0*,* y_1*,* z_1*, які задовольняють (16.5) при* $n = 0$ *та (16.6), мають місце співвідношення*

$$y_0 \leq y_1 \leq z_1 \leq z_0. \tag{16.7}$$

Тоді для послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *побудованих за допомогою формул (16.5), при* $n = 0,\ 1,\ \ldots$ *справджуються нерівності*

$$y_n \le y_{n+1} \le z_{n+1} \le z_n. \tag{16.8}$$

Доведення. Переконаємося, що нерівності (16.7) призводять до нерівностей (16.8) для $n = 1$. З (16.5) для $n = 0$ та для $n = 1$ випливає

$$y_2 - y_1 = G_1(y_1, z_1)(y_2 - y_1) + G_2(y_1, z_1)(z_1 - z_2) - G_1(y_0, z_0) \times$$

$$\times (y_1 - y_0) - G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) + (A_1(z_0, y_0) + A_2(z_0, y_0)) \times$$

$$\times (z_0 - y_0) - (A_1(z_1, y_1) + A_2(z_1, y_1))(z_1 - y_1) + T(y_1, z_1) - T(y_0, z_0) \ge$$

$$\ge G_1(y_1, z_1)(y_2 - y_1) + G_2(y_1, z_1)(z_1 - z_2) - G_1(y_0, z_0) \times$$

$$(y_1 - y_0) - G_2(y_0, z_0)(z_0 - z_1) + (A_1(z_0, y_0) + A_2(z_0, y_0))(z_0 - y_0) -$$

$$-(A_1(z_1, y_1) + A_2(z_1, y_1))(z_1 - y_1) + (G_1(y_0, y_1) + \alpha_1(y_0, y_1)) \times$$

$$\times (y_1 - y_0) - A_1(y_1, y_0)(y_1 - y_0) + (G_2(z_1, z_0) + \alpha_2(z_1, z_0))(z_0 - z_1) -$$

$$-A_2(z_0, z_1)(z_0 - z_1) \ge G_1(y_1, z_1)(y_2 - y_1) + G_2(y_1, z_1) \times$$

$$\times (z_1 - z_2) + A_1(z_0, y_0)(z_0 - z_1) + A_2(z_0, y_0)(y_1 - y_0) +$$

$$+(G_1(y_0, y_1) - G_1(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + (G_2(z_1, z_0) - G_2(y_0, z_0)) \times$$

$$\times (z_0 - z_1) + \alpha_1(y_0, y_1)(y_1 - y_0) + \alpha_2(z_1, z_0)(z_0 - z_1) \ge$$

$$\ge G_1(y_1, z_1)(y_2 - y_1) + G_2(y_1, z_1)(z_1 - z_2),$$

$$z_1 - z_2 = -(G_1(y_0, z_0) + \alpha_1(y_0, z_0))(z_0 - z_1) - (G_2(y_0, z_0) +$$

$$\alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + (G_1(y_1, z_1) + \alpha_1(y_1, z_1))(z_1 - z_2) +$$

$$+(G_2(y_1, z_1) + \alpha_2(y_1, z_1))(y_2 - y_1) - (A_1(z_1, y_1) + A_2(z_1, y_1)) \times$$

$$\times (z_1 - y_1) + (A_1(z_0, y_0) + A_2(z_0, y_0))(z_0 - y_0) + T(z_0, y_0) -$$

$$-T(z_1, y_1) \ge (G_1(y_1, z_1) + \alpha_1(y_1, z_1))(z_1 - z_2) + (G_2(y_1, z_1) +$$

$$\alpha_2(y_1, z_1))(y_2 - y_1) - (G_1(y_0, z_0) + \alpha_1(y_0, z_0))(z_0 - z_1) -$$

$$-(G_2(y_0, z_0) + \alpha_2(y_0, z_0))(y_1 - y_0) + (A_1(z_0, y_0) + A_2(z_0, y_0)) \times$$

$$\times (z_0 - y_0) - (A_1 (z_1, y_1) + A_2 (z_1, y_1)) (z_1 - y_1) +$$
$$(G_1 (z_1, z_0) + \alpha_1 (z_1, z_0)) (z_0 - z_1) - A_1 (z_0, z_1) (z_0 - z_1) +$$
$$+ (G_2 (y_0, y_1) + \alpha_2 (y_0, y_1)) (y_1 - y_0) - A_2 (y_1, y_0) (y_1 - y_0) \geq$$
$$\geq (G_1 (y_1, z_1) + \alpha_1 (y_1, z_1)) (z_1 - z_2) + (G_2 (y_1, z_1) +$$
$$+ \alpha_2 (y_1, z_1)) (y_2 - y_1) + (G_1 (z_1, z_0) - G_1 (y_0, z_0)) (z_0 - z_1) +$$
$$+ (G_2 (y_0, y_1) - G_2 (y_0, z_0)) (y_1 - y_0) + +(\alpha_1 (z_1, z_0) -$$
$$- \alpha_1 (y_0, z_0)) (z_0 - z_1) + (\alpha_2 (y_0, y_1) - \alpha_2 (y_0, z_0)) (y_1 - y_0) +$$
$$+ A_1 (z_0, y_0) (y_1 - y_0) + A_2 (z_0, y_0) (z_0 - z_1) \geq (G_1 (y_1, z_1) +$$
$$+ \alpha_1 (y_1, z_1)) (z_1 - z_2) + (G_2 (y_1, z_1) + \alpha_2 (y_1, z_1)) (y_2 - y_1) \, .$$

Це дає змогу покликатися на умову Б, щоб отримати нерівності

$$y_1 \leq y_2, \quad z_1 \geq z_2.$$

Подібним способом знаходимо

$$z_2 - y_2 = (G_1 (y_1, z_1) + G_2 (y_1, z_1)) (z_2 - y_2) - \alpha_1 (y_1, z_1) \times$$
$$\times (z_1 - z_2) - \alpha_2 (y_1, z_1) (y_2 - y_1) - (G_1 (y_1, z_1) + G_2 (y_1, z_1)) (z_1 - y_1) +$$
$$+ 2 (A_1 (z_1, y_1) + A_2 (z_1, y_1)) (z_1 - y_1) + T (z_1, y_1) - T (y_1, z_1) \geq$$
$$\geq (G_1 (y_1, z_1) + G_2 (y_1, z_1) + \alpha_1 (y_1, z_1) + \alpha_2 (y_1, z_1)) (z_2 - y_2) -$$
$$- \alpha_1 (y_1, z_1) (z_1 - y_2) - - \alpha_2 (y_1, z_1) (z_2 - y_1) + 2(A_1 (z_1, y_1) +$$
$$+ A_2 (z_1, y_1)) (z_1 - y_1) - (G_1 (y_1, z_1) + G_2 (y_1, z_1)) (z_1 - y_1) +$$
$$+ (G_1 (y_1, z_1) + \alpha_1 (y_1, z_1)) (z_1 - y_1) - A_1 (z_1, y_1) (z_1 - y_1) +$$
$$+ (G_2 (y_1, z_1) + \alpha_2 (y_1, z_1)) (z_1 - y_1) - A_2 (z_1, y_1) (z_1 - y_1) \geq$$
$$\geq (G_1 (y_1, z_1) + G_2 (y_1, z_1) + \alpha_1 (y_1, z_1) + \alpha_2 (y_1, z_1)) (z_2 - y_2) \, .$$

За умовою Б отримуємо: $y_2 \leq z_2$. Отже, завершене обгрунтування можливості кроку індукції в (16.6) від $n = 0$ до $n = 1$. Тому вважаємо теорему доведеною.

Умов теореми 16.1, взагалі кажучи, замало, щоб зробити висновок про існування розв'язку рівняння (16.3) та про збіжність послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$. Приєднання до умов цієї теореми додаткової вимоги щодо напівупорядкованого простору E про правильну напівупорядкованість спричинює існування границь y^* та z^* відповідно послідовностей $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$, бо обидві вони обмежені і монотонні, оскільки для них маємо співвідношення (16.8). При цьому $y^* \leq z^*$ і, крім того, пара (y^*, z^*) є розв'язком системи

$$\begin{aligned} y &= -\left(A_1(z,y) + A_2(z,y)\right)(z-y) + T(y,z)\,, \\ z &= \left(A_1(z,y) + A_2(z,y)\right)(z-y) + T(z,y)\,. \end{aligned} \tag{16.9}$$

Можна довести, що з існування розв'язку $x^* \in E_0$ рівняння (16.3) і з єдиності розв'язку системи (16.9) випливає збіжність ітераційного процесу (16.5), (16.6) до єдиного в E_0 розв'язку x^* рівняння (16.3), а також оцінки

$$y_n \leq y_{n+1} \leq x^* \leq z_{n+1} \leq z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \tag{16.10}$$

Для доведення цього використаємо таке допоміжне твердження.

Лема 16.1. *Нехай справджуються умови теореми 16.1, а простір E – правильно напівупорядкований. Тоді існує крайній в E_0 розв'язок (y^*, z^*) системи (16.9) і до його компонент y^*, z^* збігаються, відповідно не спадаючи і не зростаючи, послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, побудовані за допомогою формул (16.5). При цьому маємо співвідношення*

$$y_n \leq y_{n+1} \leq y^* \leq z^* \leq z_{n+1} \leq z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \tag{16.11}$$

Доведення. За означенням крайнього в E_0 розв'язку (y^*, z^*) потрібно підтвердити, що для всякого розв'язку (y, z) $\quad (y, z \in E_0)$ системи (16.9) правдиві співвідношення

$$y^* \leq y \leq z^*, \quad y^* \leq z \leq z^*. \tag{16.12}$$

Для цього досить переконатися, враховуючи нерівності (16.8), що при кожному $n = 0,\ 1,\ \ldots$ будемо мати

$$y_n \leq y \leq z_n, \quad y_n \leq z \leq z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \tag{16.13}$$

Це можна реалізувати за допомогою схеми міркувань, подібної до тої, що використана для доведення теореми 14.3. Оскільки із (16.6) випливає, що $y_0 \le y \le z_0$, $y_0 \le z \le z_0$, тобто, що (16.13) мають місце при $n=0$, то переконаємося, що можна в (16.13) зробити крок індукції від $n=0$ до $n=1$. Для цього знаходимо

$$y - y_1 = T(y,z) - (A_1(z,y) + A_2(z,y))(z-y) - G_1(y_0,z_0) \times$$

$$\times (y_1 - y_0) - G_2(y_0,z_0)(z_0 - z_1) + (A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0))(z_0 - y_0) -$$

$$-T(y_0,z_0) \ge (A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0))(z_0 - y_0) - (A_1(z,y) +$$

$$+A_2(z,y))(z-y) - G_1(y_0,z_0)(y_1 - y_0) - G_2(y_0,z_0)(z_0 - z_1) +$$

$$+ (G_1(y_0,y) + \alpha_1(y_0,y))(y - y_0) + (G_2(z,z_0) + \alpha_2(z,z_0)) \times$$

$$(z_0 - z) - A_1(y,y_0)(y - y_0) - A_2(z_0,z)(z_0 - z) =$$

$$= G_1(y_0,z_0)(y - y_1) + G_2(y_0,z_0)(z_1 - z) + (G_1(y_0,y) - G_1(y_0,z_0)) \times$$

$$\times (y - y_0) + (G_2(z,z_0) - G_2(y_0,z_0))(z_0 - z) + \alpha_1(y_0,y)(y - y_0) +$$

$$+\alpha_2(z,z_0)(z_0 - z) + (A_1(z_0,y_0) - A_1(y,y_0))(y - y_0) +$$

$$+ (A_1(y_0,z_0) - A_1(z,y))(z_0 - y) + (A_2(z_0,y_0) - A_2(z_0,z)) \times$$

$$\times (z_0 - z) + (A_2(z_0,y_0) - A_2(z,y))(z - y_0) + A_1(z,y)(z_0 - z) +$$

$$+A_2(z,y)(y - y_0) \ge G_1(y_0,z_0)(y - y_1) + G_2(y_0,z_0)(z_1 - z),$$

$$z_1 - y = -(G_1(y_0,z_0) + \alpha_1(y_0,z_0))(z_0 - z_1) - (G_2(y_0,z_0) +$$

$$+\alpha_2(y_0,z_0))(y_1 - y_0) + (A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0))(z_0 - y_0) +$$

$$+T(z_0,y_0) + (A_1(z,y) + A_2(z,y))(z-y) - T(y,z) \ge$$

$$\ge -(G_1(y_0,z_0) + \alpha_1(y_0,z_0))(z_0 - z_1) - (G_2(y_0,z_0) + \alpha_2(y_0,z_0)) \times$$

$$\times (y_1 - y_0) + (A_1(z_0,y_0) + A_2(z_0,y_0))(z_0 - y_0) + (A_1(z,y) + A_2(z,y)) \times$$

$$\times (z - y) + (G_1(y,z_0) + \alpha_1(y,z_0))(z_0 - y) + (G_2(y_0,z) +$$

$$+\alpha_2(y_0,z))(z - y_0) - A_1(z_0,y)(z_0 - y) - A_2(z,y_0)(z - y_0) =$$

$$= (G_1(y_0,z_0) + \alpha_1(y_0,z_0))(z_1 - y) + (G_2(y_0,z_0) + \alpha_2(y_0,z_0))(z - y_1) +$$

$$+ (G_1(y,z_0) + \alpha_1(y,z_0) - G_1(y_0,z_0) - \alpha_1(y_0,z_0)) \times$$

$$\times (z_0 - y) + (G_2 (y_0, z) + \alpha_2 (y_0, z) - G_2 (y_0, z_0) - \alpha_2 (y_0, z_0)) (z - y_0) +$$
$$+ (A_1 (z_0, y_0) - A_1 (z_0, y)) (z_0 - y) + (A_1 (z_0, y_0) - A_1 (z, y)) (y - y_0) +$$
$$(A_2 (z_0, y_0) - A_2 (z, y)) (z_0 - z) + (A_2 (z_0, y_0) - A_2 (z, y_0)) (z - y_0) +$$
$$+A_1 (z, y) (z - y_0) + A_2(z, y) (z_0 - y) \geq (G_1 (y_0, z_0) + \alpha_1 (y_0, z_0)) \times$$
$$\times (z_1 - y) + (G_2 (y_0, z_0) + \alpha_2 (y_0, z_0)) (z - y_1) ,$$
$$z - y_1 = T (z, y) - G_1 (y_0, z_0) (y_1 - y_0) - G_2 (y_0, z_0) (z_0 - z_1) -$$
$$-T (y_0, z_0) + (A_1 (z, y) + A_2 (z, y)) (z - y) + (A_1 (z_0, y_0) +$$
$$+A_2 (z_0, y_0)) (z_0 - y_0) \geq G_1 (y_0, z_0) (z - y_1) + G_2 (y_0, z_0) (z_1 - y) -$$
$$-G_1 (y_0, z_0) (z - y_0) - G_2 (y_0, z_0) (z_0 - y) + (G_1 (y_0, z) +$$
$$+\alpha_1 (y_0, z)) (z - y_0) + (G_2 (y, z_0) + \alpha_2 (y, z_0)) (z_0 - y) + (A_1 (z, y) +$$
$$+A_2 (z, y)) (z - y) + (A_1 (z_0, y_0) + A_2 (z_0, y_0)) (z_0 - y_0) -$$
$$-A_1 (z, y_0) (z - y_0) - A_2 (z_0, y) (z_0 - y) = G_1 (y_0, z_0) (z - y_1) +$$
$$+G_2 (y_0, z_0) (z_1 - y) + (G_1 (y_0, z) - G_1 (y_0, z_0)) (z - y_0) +$$
$$(G_2 (y, z_0) - G_2 (y_0, z_0)) (z_0 - y) + \alpha_1 (y_0, z) (z - y_0) +$$
$$+\alpha_2 (y, z_0) (z_0 - y) + (A_1 (z_0, y_0) - A_1 (z, y)) (z_0 - z) +$$
$$+ (A_1 (z_0, y_0) - A_1 (z, y_0)) (z - y_0) + (A_2 (z_0, y_0) - A_2 (z_0, y)) (z_0 - y) +$$
$$+ (A_2 (z_0, y_0) - A_2 (z, y)) (y - y_0) + A_1 (z, y) (z_0 - y) +$$
$$+A_2 (z, y) (z - y_0) \geq G_1 (y_0, z_0) (z - y_1) + G_2 (y_0, z_0) (z_1 - y) ,$$
$$z_1 - z = - (G_1 (y_0, z_0) + \alpha_1 (y_0, z_0)) (z_0 - z_1) - (G_2 (y_0, z_0) +$$
$$+\alpha_2 (y_0, z_0)) (y_1 - y_0) + (A_1 (z_0, y_0) + A_2 (z_0, y_0)) (z_0 - y_0) -$$
$$- (A_1 (z, y) + A_2 (z, y)) (z - y) + T (z_0, y_0) - T (z, y) \geq$$
$$\geq (G_1 (y_0, z_0) + \alpha_1 (y_0, z_0)) (z_1 - z) + (G_2 (y_0, z_0) + \alpha_2 (y_0, z_0)) \times$$
$$\times (y - y_1) - (G_1 (y_0, z_0) + \alpha_1 (y_0, z_0)) (z_0 - z) - (G_2 (y_0, z_0) +$$
$$+\alpha_2 (y_0, z_0)) (y - y_0) + (G_1 (z, z_0) + \alpha_1 (z, z_0)) (z_0 - z) +$$
$$+ (G_2 (y_0, y) + \alpha_2 (y_0, y)) (y - y_0) + \ + (A_1 (z_0, y_0) + A_2 (z_0, y_0)) \times$$

$$(z_0-y_0)-(A_1(z,y)+A_2(z,y))(z-y)-A_1(z_0,z)(z_0-z)-$$
$$-A_2(y,y_0)(y-y_0)=(G_1(y_0,z_0)+\alpha_1(y_0,z_0))(z_1-z)+$$
$$+(G_2(y_0,z_0)+\alpha_2(y_0,z_0))(y-y_1)+(G_1(z,z_0)-G_1(y_0,z_0))\times$$
$$\times(z_0-z)+(G_2(y_0,y)-G_2(y_0,z_0))(y-y_0)+(\alpha_1(z,z_0)-$$
$$-\alpha_1(y_0,z_0))(z_0-z)+(\alpha_2(y_0,y)-\alpha_2(y_0,z_0))(y-y_0)+$$
$$+(A_1(z_0,y_0)-A_1(z_0,z))(z_0-z)+(A_1(z_0,y_0)-A_1(z,y))\times$$
$$\times(z-y)+(A_2(z_0,y_0)-A_2(z_0,z))(z_0-z)+(A_2(z_0,y_0)-$$
$$-A_2(z,y))(z-y_0)+A_1(z,y)(y-y_0)+A_2(z,y)(z_0-z)\geq$$
$$\geq(G_1(y_0,z_0)+\alpha_1(y_0,z_0))(z_1-z)+(G_2(y_0,z_0)+\alpha_2(y_0,z_0))(y-y_1).$$

Отже, можна застосувати умову Б. Тому матимемо $y_0\leq y_1\leq y\leq z_1\leq z_0$, $y_0\leq y_1\leq z\leq z_1\leq z_0$. Це дає змогу вважати доведеними нерівності

$$\begin{gathered} y_n\leq y_{n+1}\leq y\leq z_{n+1}\leq z_n, \\ y_n\leq y_{n+1}\leq z\leq z_{n+1}\leq z_n \\ (n=0,1,...), \end{gathered} \tag{16.14}$$

частковими випадками яких є потрібні нерівності (16.8). Цим лему доведено.

Теорема 16.2. *Нехай: 1) справджуються умови А – В; 2) для елементів y_0, y_1, z_0, z_1 справджуються співвідношення (16.7); 3) рівняння (16.3) має розв'язок в E_0; 4) система (16.9) має єдиний розв'язок в $E_0\times E_0$; 5) E – правильно напівупорядкований простір. Тоді послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ збігаються до єдиного в E_0 розв'язку x^* рівняння (16.3) і мають місце співвідношення*

$$y_n\leq y_{n+1}\leq x^*\leq z_{n+1}\leq z_n\quad(n=0,\ 1,\ \ldots). \tag{16.15}$$

Доведення. За лемою 16.1 із нерівностей (16.14) та з правильної напівупорядкованості E випливає існування границі $y^*\in E_0$ послідовності $\{y_n\}$ та границі $z^*\in E_0$ послідовності $\{z_n\}$. Крім того, очевидно, що $y^*\leq z^*$. Завдяки неперервності операторів у правій частині рівностей (16.5) ясно, що (y^*,z^*) – розв'язок системи

(16.9). Оскільки розв'язок $x^* \in E_0$ рівняння (16.3) існує, то система (16.9) має розв'язок (x^*, x^*). З єдиності цього розв'язку випливає, що $y^* = z^* = x^*$. Оскільки завдяки теоремі 16.1 очевидними в цій ситуації є нерівності (16.15), то теорему доведено.

Теорема 16.3. *Нехай виконані умови А – В, правдиві співвідношення (16.7), і рівняння (16.3) має розв'язок $x^* \in E_0$. Тоді мають місце співвідношення (16.15) для цього розв'язку x^* і послідовних наближень, отриманих за допомогою алгоритму (16.5), (16.6).*

Доведення. Потребують підтвердження тільки нерівності

$$y_1 \le x^* \le z_1 \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,, \tag{16.16}$$

бо нерівності $y_1 \le y_2$, $z_2 \le z_1$ обгрунтовані за тих самих умов при доведенні теореми 16.1. Знаходимо

$$x^* - y_1 = T\,(x^*, x^*) - G_1\,(y_0, z_0)\,(y_1 - y_0) - G_2\,(y_0, z_0)\,(z_0 - z_1) +$$

$$+\,(A_1\,(z_0, y_0) + A_2\,(z_0, y_0))\,(z_0 - y_0) - T\,(y_0, z_0) \ge (A_1\,(z_0, y_0) +$$

$$+A_2\,(z_0, y_0))\,(z_0 - y_0) - A_1\,(x^*, y_0)\,(x^* - y_0) - A_2\,(z_0, x^*)\,(z_0 - x^*) -$$

$$-G_1\,(y_0, z_0)\,(y_1 - y_0) - G_2\,(y_0, z_0)\,(z_0 - z_1) + (G_1\,(y_0, x^*) +$$

$$+\alpha_1\,(y_0, x^*))\,(x^* - y_0) + (G_2\,(x^*, z_0) + \alpha_2\,(x^*, z_0))\,(z_0 - x^*) =$$

$$= (G_1\,(y_0, x^*) - G_1\,(y_0, z_0))\,(x^* - y_0) + (G_2\,(x^*, z_0) - G_2\,(y_0, z_0)) \times$$

$$\times\,(z_0 - x^*) + +G_1\,(y_0, z_0)\,(x^* - y_1) + G_2\,(y_0, z_0)\,(z_1 - x^*) +$$

$$+\alpha_1\,(y_0, x^*)\,(x^* - y_0) + \alpha_2\,(x^*, z_0)\,(z_0 - x^*) + (A_1\,(z_0, y_0) -$$

$$-A_1\,(x^*, y_0))\,(x^* - y_0) + (A_2\,(y_0, z_0) + A_2\,(z_0, x^*))\,(z_0 - x^*) +$$

$$+A_1\,(z_0, y_0)\,(z_0 - x^*) + A_2\,(z_0, y_0)\,(x^* - y_0) \ge$$

$$\ge G_1\,(y_0, z_0)\,(x^* - y_1) + G_2\,(y_0, z_0)\,(z_1 - x^*)\,,$$

$$z_1 - x^* = -\,(G_1\,(y_0, z_0) + \alpha_1\,(y_0, z_0))\,(z_0 - z_1) -$$

$$-\,(G_2\,(y_0, z_0) + \alpha_2\,(y_0, z_0))\,(y_1 - y_0) + T\,(z_0, y_0) - T\,(x^*, x^*) +$$

$$+\,(A_1\,(z_0, y_0) + A_2\,(z_0, y_0))\,(z_0 - y_0) \ge -\,(G_1\,(y_0, z_0) + \alpha_1\,(y_0, z_0)) \times$$

$$\times (z_0 - z_1) - (G_2 (y_0, z_0) + \alpha_2 (y_0, z_0)) (y_1 - y_0) + (A_1 (z_0, y_0) +$$
$$+A_2 (z_0, y_0)) (z_0 - y_0) - A_1 (z_0, x^*) (z_0 - x^*) - A_2 (x^*, y_0) (x^* - y_0) +$$
$$+ (G_1 (x^*, z_0) + \alpha_1 (x^*, z_0)) (z_0 - x^*) + (G_2 (y_0, x^*) + \alpha_2 (y_0, x^*)) \times$$
$$(x^* - y_0) = (G_1 (y_0, z_0) + \alpha_1 (y_0, z_0)) (z_1 - x^*) + (G_2 (y_0, z_0) +$$
$$+\alpha_2 (y_0, z_0)) (x^* - y_1) + (G_1 (x^*, z_0) - G_1 (y_0, z_0)) (z_0 - x^*) +$$
$$+ (G_2 (y_0, x^*) - G_2 (y_0, z_0)) (x^* - y_0) + (\alpha_1 (x^*, z_0) - \alpha_1 (y_0, z_0)) \times$$
$$\times (z_0 - x^*) + (\alpha_2 (y_0, x^*) - \alpha_2 (y_0, z_0)) (x^* - y_0) + (A_1 (z_0, y_0) -$$
$$-A_1 (z_0, x^*)) (z_0 - x^*) + (A_2 (z_0, y_0) - A_2 (x^*, y_0)) (x^* - y_0) +$$
$$+A_1 (z_0, y_0) (x^* - y_0) + A_2 (z_0, y_0) (z_0 - x^*) \geq (G_1 (y_0, z_0) +$$
$$+\alpha_1 (y_0, z_0)) (z_1 - x^*) + (G_2 (y_0, z_0) + \alpha_2 (y_0, z_0)) (x^* - y_1) .$$

Це означає, що можна застосувати умову Б і одержати нерівності (16.16). Отже, обґрунтовані співвідношення (16.7). Цим підтверджено, що можна скористатися з теореми 16.1, щоб вважати теорему доведеною.

Зупинимося на ситуації, коли E_0 не конче співпадає з відрізком $[a, b]$. Позначимо

$$\begin{aligned} A (x, y) = A_1 (y, x) + A_2 (y, x) + G_1 (x, y) + G_2 (x, y) +& \\ +\alpha_1 (x, y) + \alpha_2 (x, y) .& \end{aligned} \tag{16.17}$$

Теорема 16.4. *Нехай: 1) E_0 є опуклою замкненою множиною в E; 2) справджуються умови A_0, Б, В; 3) задані елементи $a, b \in E_0$, для яких*

$$\begin{aligned} &a \leq - (A_1 (b, a) + A_2 (b, a)) (b - a) + T (a, b) , \\ &b \geq (A_1 (b, a) + A_2 (b, a)) (b - a) + T (b, a) , \end{aligned} \tag{16.18}$$

4) з нерівності $w \geq A (x, y) w$ випливає, що $w \geq \theta$. Тоді для послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, побудованих за допомогою ітераційного процесу (16.5), (16.6), справджуються співвідношення (16.8).

Доведення. Зауважимо насамперед, що умовами теореми не вимагається виконання нерівності

$$a \leq b. \tag{16.19}$$

Переконаємося, що з умов теореми ця нерівність випливає. Для цього з (16.18), використовуючи умови A_0 та Б, отримуємо

$$\begin{gathered}b-a \geq 2\left(A_1(b,a)+A_2(b,a)\right)(b-a)+T(b,a)-T(a,b) \geq \\ \geq 2\left(A_1(b,a)+A_2(b,a)\right)(b-a)+\left(G_1(a,b)+\alpha_1(a,b)-A_1(b,a)\right)\times \\ \times(b-a)+\left(G_2(a,b)+\alpha_2(a,b)-A_2(b,a)\right)(b-a)= \\ =\left(A_1(b,a)+A_2(b,a)+G_1(a,b)+G_2(a,b)+\alpha_1(a,b)+\alpha_2(a,b)\right)\times \\ \times(b-a)=A(a,b)(b-a).\end{gathered}$$

Наведений виклад і умова 4) дають підставу для висновку про те, що нерівності (16.19) мають місце. Скориставшись з цього та із співвідношень (16.6), (16.18) (16.5) маємо

$$\begin{aligned}&y_1-y_0 \geq G_1(y_0,z_0)(y_1-y_0)+G_2(y_0,z_0)(z_0-z_1), \\ &z_0-z_1 \geq \left(G_1(y_0,z_0)+\alpha_1(y_0,z_0)\right)(z_0-z_1)+ \\ &+\left(G_2(y_0,z_0)+\alpha_2(y_0,z_0)\right)(y_1-y_0).\end{aligned}$$

Умова Б означає, що звідси одержуємо висновок про обгрунтованість нерівностей $y_0 \leq y_1$, $z_0 \geq z_1$. Якщо довести нерівність $y_1 \leq z_1$, то це означатиме, що виконані нерівності (16.7), оскільки умову Б можна розглянути як послаблену у порівнянні з умовою 3) §14. Знаходимо

$$\begin{aligned}&z_1-y_1=2\left(A_1(z_0,y_0)+A_2(z_0,y_0)\right)(z_0-y_0)-\left(G_1(y_0,z_0)+\right. \\ &\left.+\alpha_1(y_0,z_0)\right)(z_0-z_1)-G_1(y_0,z_0)(y_1-y_0)-\left(G_2(y_0,z_0)+\right. \\ &\left.+\alpha_2(y_0,z_0)\right)(y_1-y_0)+T(z_0,y_0)-T(y_0,z_0)-G_2(y_0,z_0)\times \\ &\times(z_1-z_0) \geq \left(A_1(z_0,y_0)+A_2(z_0,y_0)\right)(z_0-y_0)+\left(G_1(y_0,z_0)+\right. \\ &\left.+\alpha_1(y_0,z_0)\right)(z_1-y_1)+\left(G_2(y_0,z_0)+\alpha_2(y_0,z_0)\right)(z_1-y_1)- \\ &-\alpha_1(y_0,z_0)(z_0-y_1)-\alpha_2(y_0,z_0)(z_1-y_0)+\left(G_1(y_0,z_0)+\right. \\ &\left.+G_2(y_0,z_0)\right)(z_0-y_0)+\left(\alpha_2(y_0,z_0)+\alpha_2(y_0,z_0)\right)(z_0-y_0) \geq \\ &\geq \left(G_1(y_0,z_0)+\alpha_1(y_0,z_0)+G_2(y_0,z_0)+\alpha_2(y_0,z_0)\right)(z_1-y_1).\end{aligned}$$

Звідси потрібна нерівність $y_1 \leq z_1$ одержується за допомогою умови Б й тому доведення теореми завершене.

Збіжність процесу (16.5), (16.6) можна гарантувати, якщо до умов А – В приєднати таке припущення.

Умова Г. *Задані неперервні щодо $y, z \in E_0$ додатні лінійні неперервні щодо $w \in E$ оператори $\beta_1(y,z)\,w$, $\beta_2(y,z)\,w$, для яких* *разом з операторами* $G_1(y,z)\,w,\ G_2(y,z)\,w,\ A_1(y,z)\,w,\ A_2(y,z)\,w$ *з умови А із співвідношень* $x,y,z\in E_0,\ y\le z$ *випливають нерівності*

$$T(z,x)-T(y,x)\le\left(G_1(y,z)+\beta_1(y,z)-A_1(z,y)\right)(z-y)\,,$$
$$-\left(G_2(y,z)+\beta_2(y,z)-A_2(z,y)\right)(z-y)\le T(x,z)-T(x,y)\,.$$

Зазначимо, що оператори $\beta_1(y,z)\,w,\ \beta_2(y,z)\,w$ не мусять бути монотонними щодо y та щодо z.

З умови Г та з формул (16.5) можна отримати

$$\begin{gathered}z_{n+1}-y_{n+1}\le\left(G_1(y_n,z_n)+G_2(y_n,z_n)\right)(z_{n+1}-y_{n+1})+\\+\left(A_1(z_n,y_n)+A_2(z_n,y_n)+\beta_1(y_n,z_n)+\beta_2(y_n,z_n)\right)\times\\\times(z_n-y_n)-\alpha_1(y_n,z_n)(z_n-z_{n+1})-\alpha_2(y_n,z_n)\times\\\times(y_{n+1}-y_n)\le\left(G_1(y_n,z_n)+G_2(y_n,z_n)\right)(z_{n+1}-y_{n+1})+\\+(A_1(z_n,y_n)+A_2(z_n,y_n)+\beta_1(y_n,z_n)+\\\beta_2(y_n,z_n))(z_n-y_n)\,,\end{gathered}\tag{16.20}$$

маючи на увазі співвідношення (16.8).

Будемо вважати, що існує лінійний щодо w неперервний обернений оператор
$$G(y,z)\,w=\left(I-G_1(y,z)-G_2(y,z)\right)^{-1}w.$$

Позначимо

$$H=H(y,z)=G(y,z)\left(A_1(z,y)+A_2(z,y)+\beta_1(y,z)+\beta_2(y,z)\right).\tag{16.21}$$

Теорема 16.5. *Нехай справджуються умови А – Г і при* $y,z\in E_0$ *правдива оцінка*
$$\|H\|=\|H(y,z)\|\le q,\tag{16.22}$$

E*– напівупорядкований банахів простір з нормою* $\|\cdot\|$*. Якщо* $q<1$*, то послідовності* $\{y_n\}$*,* $\{z_n\}$ *збігаються до єдиного розв'язку* $x^*\in E_0$ *рівняння (16.3) монотонно не спадаючи і монотонно не зростаючи відповідно. Ця збіжність не повільніша за збіжність геометричної прогресії із знаменником* q*, і мають місце оцінки*

$$\max\left\{\|z_{n+1}-x^*\|,\|x^*-y_{n+1}\|\right\}\le\|z_{n+1}-y_{n+1}\|\le q\,\|z_n-y_n\|\,.\tag{16.23}$$

Доведення випливає з оцінок (16.20) і (16.21).

Зауваження 16.1. *Подібним способом можна дослідити й інші алгоритми, які формально дещо відрізняються від алгоритму (16.5), (16.6). Наприклад, за тих самих припущень можна довести аналоги теорем 16.1 – 16.5, якщо формули (16.5) замінити формулами*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= G_1(y_n, z_n)(y_{n+1} - y_n) - G_2(y_n, z_n)(z_{n+1} - z_n) - \\ &\quad - (A_1(z_n, y_n) + A_2(z_n, y_n))(z_n - y_n) + T(y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= G_1(y_n, z_n)(z_{n+1} - z_n) - G_2(y_n, z_n)(y_{n+1} - y_n) + \\ &\quad + (A_1(z_n, y_n) + A_2(z_n, y_n))(z_n - y_n) + T(z_n, y_n). \end{aligned} \tag{16.24}$$

Якщо A_1, A_2 є нульовими операторами, а G_1 і $-G_2$ є відповідними похідними Фреше від оператора T, то з (16.5) одержуємо алгоритми, близькі до алгоритмів М. С. Курпеля з [46, 49, 57].

Зауваження 16.2. *Припустимо, що для оператора H, означеного формулою (16.21), замість оцінки (16.22) маємо докладнішу оцінку*

$$\|H(y, z)\| \le q_0 \|z - y\|^{\gamma}. \tag{16.25}$$

При нульових операторах A_1 та A_2 така ситуація трапилася в §14. Якщо в (16.25) можна взяти $\gamma = 1$, то матимемо квадратичну швидкість збіжності, яка забезпечується, наприклад, при існуванні перших і других похідних від $T(x, y)$ і за спеціальної структури операторів A_1 та A_2 (зокрема, при нульових операторах A_1 та A_2).

Зауваження 16.3. *Ітераційні формули (16.24) можна замінити формулами*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= G_1(y_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) - G_2(y_n, y_n)(z_{n+1} - z_n) - \\ &\quad - (A_1(z_n, y_n) + A_2(z_n, y_n))(z_n - y_n) + T(y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= G_1(y_n, y_n)(z_{n+1} - z_n) - G_2(y_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) + \\ &\quad + (A_1(z_n, y_n) + A_2(z_n, y_n))(z_n - y_n) + T(z_n, y_n). \end{aligned} \tag{16.26}$$

Обгрунтування ітераційного процесу (16.26), (16.6) потребує замінити припущення А – В та Г таким способом, щоб замість неспадання щодо y і незростання щодо z операторів $G_i(y, z)\, w$, $\alpha_i(y, z)\, w$ $(i = 1,\ 2)$ постулювати їх неспадання і щодо y і щодо z. При нульових A_1, A_2 і співпаданні G_1 і $-G_2$ з відповідними *похідними можна отримати якраз ті алгоритми, які дослідив М.С.Курпель в [44, 46] (див. також [49, 57]), для яких характерна оцінка вигляду (16.25) саме з $\gamma = 1$.*

Зауваження 16.4. *Результати попередніх §§7–15 можна отримати як часткові випадки з отриманих у цьому параграфі результатів. Розглянутий тут підхід до побудови двосторонніх наближень до розв'язків рівнянь можна розглядати як спосіб відокремлення таких доданків, щоб лінеаризована щодо y_{n+1} та z_{n+1} система була зручнішою для їх явного обчислення. Зазначимо також, що у наведену схему вписуються також проекційно-ітеративні аналоги методу Чаплигіна і методів Курпеля, досліджених М.С.Курпелем і І.М.Майбородою [50] (див. також [49, 57]).*

§17 Двосторонні аналоги методу Піконе

Метод послідовної апроксимації розв'язків нелінійних інтегральних рівнянь, запропонований М.Піконе [128; 129], в абстрактному вигляді проаналізував М.Квапиш [122]. Суть цього методу у застосуванні до рівняння

$$x = Fx \tag{17.1}$$

опишемо, записавши рівняння (17.1) у вигляді

$$x = B(x)x + Ax. \tag{17.2}$$

Припускаємо, що $B(x)y$ як лінійний щодо y та нелінійний щодо x оператор Ax є неперервним при $x, y \in E$, де E – банахів простір. Послідовність $\{x_n\}$ означуємо за допомогою формули

$$x_{n+1} = B(x_n)x_{n+1} + Ax_n \quad (n = 0, 1, ...) \tag{17.3}$$

вважаючи, що x_{n+1} при знайденому x_n можна з рівняння (17.3) знайти.

Двосторонні модифікації методу Піконе побудовані і досліджені в [53] (див. також [57, стор. 103-112]).

Простір E вважатимемо напівупорядкованим і припускатимемо, що

$$A_1(x,x)+B_1(x,x)x \le Fx \le A_2(x,x)+B_2(x,x)x \quad (x \in E) \qquad (17.4)$$

Нехай оператори $A_1(y,z)$, $A_2(y,z)$ є неперервними щодо y і z, не спадають за y, не зростають за z, а оператори $B_1(y,z)\,w$, $B_2(y,z)\,w$ є неперервними щодо y,z,w, неспадними щодо y, незростаючими щодо z і як лінійні щодо w є додатніми операторами при $y,z \in E$. Нехай $\theta-$ нульовий елемент в E і задані елементи u_0, v_0 які задовольняють співвідношення $\theta \le u_0 \le v_0$. Якщо u_n, v_n знайдені, то визначатимемо u_{n+1}, v_{n+1} як розв'язок системи

$$\begin{aligned} &u_{n+1} = A_1(u_n,v_n) + B_1(u_n,v_n)u_{n+1}, \\ &v_{n+1} = A_2(v_n,u_n) + B_2(v_n,u_n)v_{n+1} \quad (n=0,1,...). \end{aligned} \qquad (17.5)$$

Припускаємо, що оператори $A_1(y,z)$, $A_2(y,z)$, $B_1(y,z)\,w$, $B_2(y,z)\,w$ мають ту властивість , що при $y \le z$, $y,z \in [u_0,v_0] = \{x\,|u_0 \le x \le v_0, x \in E\}$ маємо

$$B_1(y,z)x \le B_2(z,y)x, \quad A_1(y,z) \le A_2(z,y) \quad (x \in [u_0,v_0]) \qquad (17.6)$$

Теорема 17.1. *Нехай: 1) елементи $u_0, v_0 \in E$, для яких $\theta \le u_0 \le v_0$, задовольняють співвідношення*

$$\begin{aligned} &u_0 \le A_1(u_0,v_0) + B_1(u_0,v_0)\,u_0, \\ &v_0 \ge A_2(v_0,u_0) + B_2(v_0,u_0)\,v_0 \quad ; \end{aligned} \qquad (17.7)$$

2) при $y,z \in [u_0,v_0]$ оператори $I-B_1(y,z)$, $I-B_2(y,z)$ мають обернені (I – тотожний оператор). Тоді для всякого розв'язку $x^* \in [u_0,v_0]$ рівняння (17.2) справджуються співвідношення

$$u_n \le u_{n+1} \le x^* \le v_{n+1} \le v_n \quad (n=0,1,...) \qquad (17.8)$$

де (u_n,v_n) визначаються як розв'язки системи (17.5).

Доведення. З умови 2) випливає, що послідовності $\{u_n\},\{v_n\}$, побудовані за формулами (17.5), означені. Із співвідношення (17.5), (17.7) завдяки властивостям операторів $A_i(y,z)$, $B_i(y,z)\,w \quad (i=1,2)$ отримуємо

$$\begin{aligned} &u_1 - u_0 \ge B_1(u_0,v_0)(u_1-u_0), \\ &v_1 - v_0 \ge B_2(v_0,u_0)(v_1-v_0). \end{aligned}$$

Звідси випливають співвідношення $u_0 \le u_1$, $v_0 \ge v_1$. Зважаючи на (17.6), знаходимо також

$$\begin{aligned} &v_1 - u_1 = B_2(v_0,u_0)v_0 - B_1(u_0,v_0)u_0 + A_2(v_0,u_0) - \\ &-A_1(u_0,v_0) \ge [B_2(v_0,u_0) - B_1(u_0,v_0)]v_0 + \\ &+B_1(u_0,v_0)(v_0-u_0) + A_2(v_0,u_0) - A_1(u_0,v_0) \ge \theta \end{aligned}$$

Отже,

$$u_0 \le u_1 \le v_1 \le v_0 \quad . \tag{17.9}$$

Крім того,

$$\begin{aligned} x^* - u_1 &= A_1(x^*,x^*) + B_1(x^*,x^*)\,x^* - A_1(u_0,v_0) + B_1(u_0,v_0)\,u_0 \ge \theta\,, \\ v_1 - x^* &= A_2(v_0,u_0) + B_2(v_0,u_0)\,v_0 - A_2(x^*,x^*) + B_2(x^*,x^*)\,x^* \ge \theta\,. \end{aligned}$$

Співставляючи це з (17.9), маємо

$$u_0 \le u_1 \le x^* \le v_1 \le v_0 \quad . \tag{17.10}$$

Переконаємось у правильності співідношень

$$\begin{aligned} &u_1 \le A_1(u_1,v_1) + B_1(u_1,v_1)\,u_1\,, \\ &v_1 \ge A_2(v_1,u_1) + B_2(v_1,u_1)\,v_1. \end{aligned}$$

Отримуємо

$$\begin{aligned} &u_1 \le A_1(u_1,v_1) + B_1(u_1,v_1)u_1 \\ &v_1 \ge A_2(v_1,u_1) + B_2(v_1,u_1)v_1 \end{aligned}$$

Таким чином, елементи u_1, v_1 задовольняють ті самі вимоги, які задовольняють елементи u_0, v_0 в умовах теореми. Тому з огляду на принцип індукції маємо підставу вважати теорему доведеною.

Теорема 17.2. *Нехай справджуються умови теореми 17.1 і простір E є банаховим правильно напівупорядкованим. Тоді існує крайній в $[u_0, v_0]$ розв'язок (u^*, v^*) системи рівнянь*

$$\begin{aligned} u &= A_1(u,v) + B_1(u,v)\,u\,, \\ v &= A_2(v,u) + B_2(v,u)\,v \end{aligned} \tag{17.11}$$

і послідовності $\{u_n\}, \{v_n\}$, побудовані за формулами (17.5), збігаються до u^*, v^* відповідно монотонно не спадаючи і монотонно *не зростаючи. При цьому для всякого розв'язку* $x^* \in [u_0, v_0]$ *рівняння (17.2) мають місце оцінки* $u^* \leq x^* \leq v^*$.

Доведення. Оскільки міркування, використані при доведенні теореми 17.1, дають підставу для співвідношень

$$u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n,$$

то в правильно напівупорядкованому просторі E послідовності $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ мають границі $u^*, v^* \in [u_0, v_0]$ відповідно, причому

$$u_n \leq u_{n+1} \leq u^* \leq v^* \leq v_{n+1} \leq v_n \quad (n = 0, 1, ...)\,.$$

Оскільки за допомогою принципу індукції можна переконатися, що для всякого розв'язку (y, z) $(y, z \in [u_0, v_0])$ системи (17.11) матимемо $u^* \leq y \leq v^*$, $u^* \leq z \leq v^*$, то розв'язок (u^*, v^*) є крайнім в E розв'язком системи (17.11). Можна вважати теорему цим доведеною.

Якщо розв'язок системи (17.11) є єдиний в $[u_0, v_0]$, то він є її крайнім розв'язком в $[u_0, v_0]$. Якщо при цьому $u^* = v^*$, то $x^* = u^* = v^*$ є єдиним на $[u_0, v_0]$ розв'язком рівняння (17.2). Теорема 17.2 гарантує монотонну збіжність до цього розв'язку послідовностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ відповідно зверху і знизу.

Нехай співвідношення (17.4) є рівностями і оператори $A_1\,(y, z)$, $B_1\,(y, z)\,w$ співпадають з операторами $A_2\,(y, z)\,w$, $B_2\,(y, z)\,w$ відповідно, тобто, маємо рівняння

$$x = T(x, x), \tag{17.12}$$

де

$$\begin{aligned} T(y, z) = A_1(y, z) + B_1(y, z)y = A_2(y, z) + \\ + B_2(y, z)y = A(y, z) + B(y, z)y \end{aligned} \tag{17.13}$$

У цьому випадку з теореми 17.2 отримується результат, близький до основного результату із [53] (див. також [57, стор 104] теорема 15.1]), який сформулюємо в такому вигляді.

Теорема 17.3. *Нехай: 1) елементи* $u_0, v_0 \in E$ *задовольняють співвідношення* $\theta \leq u_0 \leq v_0$,

$$\begin{aligned} u_0 \leq A\,(u_0, v_0) + B\,(u_0, v_0)\,u_0, \\ v_0 \geq A\,(v_0, u_0) + B\,(v_0, u_0)\,v_0; \end{aligned} \tag{17.14}$$

2) оператор $I - B(y,z)$ *при* $y,z \in [u_0,v_0]$ *має обернений; 3) простір* E *є правильно напівупорядкованим банаховим простором. Тоді послідовності* $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, *утворені за допомогою формул*

$$\begin{aligned} &u_{n+1} = A(u_n,v_n) + B(u_n,v_n)u_{n+1}, \\ &v_{n+1} = A(v_n,u_n) + B(v_n,u_n)v_{n+1} \quad (n = 0,1,...), \end{aligned} \tag{17.15}$$

задовольняють співвідношення

$$u_n \le u_{n+1} \le u^* \le x^* \le v^* \le v_{n+1} \le v_n \quad (n = 0,1,...) \tag{17.16}$$

для всякого розв'язку $x^* \in [u_0,v_0]$ *рівняння (17.12), де* (u^*,v^*) *– крайній в* E *розв'язок системи рівнянь*

$$\begin{aligned} u &= A(u,v) + B(u,v)u, \\ v &= A(v,u) + B(v,u)v. \end{aligned} \tag{17.17}$$

Якщо розв'язок $x^* \in [u_0,v_0]$ *рівняння (17.12) існує і, крім того, система (17.17) може мати тільки один розв'язок* (y^*,z^*) $(y^*,z^* \in [u_0,v_0])$, *причому* $y^* = z^*$, *то* $x^* = y^* = z^*$ *є єдиним на* $[u_0,v_0]$ *розв'язком рівняння (17.12) і до нього збігаються монотонно послідовності* $\{u_n\}, \{v_n\}$*відповідно знизу і зверху.*

Доведення. Потребує обгрунтування тільки той факт, що $u^* = v^* = x^*$, оскільки справджуються умови теореми 17.2. Рівності $u^* = v^* = x^*$ випливають очевидним чином з того, що існування розв'язку $x^* \in [u_0,v_0]$ рівняння (17.12) означає, що розв'язком системи (17.17) є пара (x^*,x^*). Оскільки крайній розв'язок (u^*,v^*) системи (17.17) існує і постулюємо єдиність розв'язку цієї системи, то з цього випливають потрібні рівності. Теорему доведено.

Наведемо деякі умови збіжності ітераційного процесу (17.15), які близькі до встановлених в [53] (див. також [57, стор.105,106]. Вважатимемо, що в E означене поняття збіжності і щодо цієї збіжності E є повним напівупорядкованим простором.

Теорема 17.4. *Нехай: 1) задані такі лінійні неперервні оператори* L_A, L_B, H, *що при* $y \le z,\ y,z \in [u_0,v_0]$ *маємо*

$$\begin{aligned} &A(z,y) - A(y,z) \le L_A(z-y), \\ &(B(z,y) - B(y,z))\,w \le L_B(z-y) \quad (w \in [u_0,v_0]), \\ &B(z,y) \le H; \end{aligned}$$

2) існує обернений $(I-H)^{-1}$ оператор, який є лінійним неперервним додатнім оператором, справджуються співвідношення (17.14) і існує обернений оператор $(I-B(y,z))^{-1}$ при $y,z \in [u_0,v_0]$; 3) збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda^n \delta,$$

при всякому $\delta \geq \theta$, де $\Lambda = (I-H)^{-1}(L_A+L_B)$. Тоді рівняння (17.12) має на відрізку $[u_0,v_0]$ єдиний розв'язок x^*, до якого монотонно збігаються відповідно знизу і зверху послідовності $\{u_n\},\{v_n\}$, утворені за допомогою алгоритму (17.15), і має місце оцінка

$$v_{n+1}-u_{n+1} \leq \Lambda^{n-\nu+1}(v_\nu-u_\nu) \ (\nu \leq n; \ \nu,n=0,1,...). \qquad (17.18)$$

Доведення. За допомогою формул (17.15) і умови 1) теореми можна отримати

$$\begin{gathered} v_{n+1}-u_{n+1} = A(v_n,u_n) - A(u_n,v_n) + B(v_n,u_n)v_{n+1} - \\ -B(u_n,v_n)u_{n+1} \leq (L_A+L_B)(v_n-u_n) + H(v_{n+1}-u_{n+1}). \end{gathered}$$

Маючи на увазі твердження теореми 17.1 і умови 2) і 3) теореми, звідси доходимо висновку про обгрунтованість монотонної збіжності послідовностей $\{u_n\},\{v_n\}$, побудованих за формулами (17.15), до спільної границі $x^* \in [u_0,v_0]$, яка є розв'язком рівняння (17.12), і маємо підставу для оцінки (17.18). Тому теорему можна вважати доведеною. Доведена теорема охоплює відповідний результат із [53] (див. [57], стор.105, 106, теорема 15.2). Саму згадану теорему із [57] одержимо з теореми 17.4, якщо припустити, що E – напівупорядкований простір, котрий є структурно нормованим за допомогою K - лінеалу N з нормою $\|\cdot\|$, причому E є повним простором. Умову 1) теореми 17.4 можна тоді замінити умовою

$$\begin{gathered} \|A(y,z)-A(z,y)\| \leq L_A\|z-y\|, \\ \|(B(y,z)-B(z,y))w\| \leq L_B\|z-y\|, \\ \|B(y,z)\| \leq H, \end{gathered}$$

де $w \geq \theta$, $y,z \in [u_0,v_0]$. Якщо при цьому E є банаховим напівупорядкованим простором, то в ролі операторів L_A, L_B, H

матимемо дійсні числа і замість оператора Λ в оцінці (17.18) матимемо дійсне число Λ.

Приклад 17.1. Вважатимемо, що оператор $T(y,z)$ має вигляд

$$T(y,z) = A(y) + B(y)\,y, \tag{17.19}$$

де неперервні щодо y оператори $A(y), B(y)\,w$ є ізотонними щодо $y \in [u_0, v_0]$, причому оператор $B(y)\,w$ при $w \geq \theta$ $(w \in E)$ є лінійним неперервним щодо w. В цьому випадку система (17.14) розпадається на пару незалежних одна від одної нерівностей

$$u_0 \leq A(u_0) + B(u_0)\,u_0\,,\; v_0 \geq A(v_0) + B(v_0)\,v_0\,.$$

Послідовності $\{u_n\}, \{v_n\}$ означаються незалежно одна від одної за допомогою ітераційного процесу

$$u_{n+1} = A(u_n) + B(u_n)\,u_{n+1}, \tag{17.20}$$

$$v_{n+1} = A(v_n) + B(v_n)\,v_{n+1}. \tag{17.21}$$

Можна розглядати монотонні ітераційні процеси (17.20) і (17.21) як об'єднаний двосторонній алгоритм в рамках, у яких досліджені ітераційні процеси (17.5) та (17.15), скориставшись для цього з теореми 17.1-17.4.

Приклад 17.2. Якщо оператор $A(y,z)$ має вигляд

$$T(y,z) = A(z) + B(z)\,y, \tag{17.22}$$

де неперервні за z оператори $A(z), B(z)\,w$ є антитонними за z, причому оператор $B(z)\,w$ щодо $w \geq \theta$ $(w \in E)$ як лінійний неперервний щодо w є додатнім оператором, то ітераційні формули (17.15) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= A(v_n) + B(v_n)\,v_{n+1}, \\ v_{n+1} &= A(u_n) + B(u_n)\,u_{n+1} \end{aligned}$$

за припущення, що $u_0, v_0 \in E$ $(\theta \leq u_0 \leq v_0)$ задовольняють співвідношення

$$u_0 \leq A(v_0) + B(v_0)\,u_0\,,\; v_0 \geq A(u_0) + B(u_0)\,v_0\,.$$

Приклад 17.3. Якщо замість (17.22) маємо

$$T\left(y,z\right)=A\left(z\right)+B\left(y\right)z,$$

і антитонними за z є оператор $A\left(z\right)$, а оператор $B\left(y\right)w$ є ізотонним щодо y і спадним за w, тобто додатнім щодо w є лінійний неперервний щодо w оператор - $B\left(y\right)w$, то ітераційні формули (17.15) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= A\left(v_n\right)+B\left(u_n\right)v_{n+1}, \\ v_{n+1} &= A\left(u_n\right)+B\left(v_n\right)u_{n+1}, \end{aligned}$$

а співвідношення (17.14) зводяться до нерівностей

$$u_0\le A\left(v_0\right)+B\left(u_0\right)v_0\ ,\ v_0\ge A\left(u_0\right)+B\left(v_0\right)u_0\,.$$

Конкретизацію алгоритму (17.15) можна знайти в [57, стор. 109-108].

§18 Узагальнення принципу мажорант Л.В.Канторовича

Понад півстоліття тому Л.В.Канторовичем [29] запропонований спосіб обгрунтування існування розв'язку нелінійного операторного рівняння

$$x=T(x) \tag{18.1}$$

мажоруванням оператора T за допомогою іншого оператора A, що діє в деякому допоміжному напівупорядкованому просторі і є монотонним, взагалі кажучи, нелінійним оператором.

У [98] цей спосіб, який називаємо принципом мажорант Л.В.Канторовича, модифікований так, що за мажоранту можна взяти немонотонний опратор. Наведеним в [98] результатам можна надати, як встановлено далі, трохи загальнішого вигляду. При цьому як часткові випадки отримуються ізотонні мажоранти Л.В.Канторовича, а також результати із [98] з немонотонними мажорантами. Наведений далі виклад побудований за схемою роботи [98] і охоплює результати із [98].

Будемо вважати, що $T(x)\,:\,E\,\rightarrow\,E$, E є (B_K) – простором, нормованим за допомогою K-простору G [29] (див. також [20]). Отже, якщо $x \in E$, то $\|x\| \in G$. Позначимо нульові елементи в E і G відповідно через θ_E і θ.

Припустимо, що задані оператори $A_1(y,z), A_2(y,z) : D \times D \to D$ $(D \subseteq G)$, які є неперервними щодо y і z.

Теорема 18.1. *Нехай на відрізку* $D = [\theta; v] = \{x \mid \theta \le x \le v, v \in G, v \ge \theta\}$ *справджуються умови:*

1) *мають місце нерівності*

$$\begin{aligned} &\theta \le A_1(\theta, v), \\ &v \ge A_2(v, \theta); \end{aligned} \tag{18.2}$$

2) *якщо* $y, z \in [\theta, v]$, *то*

$$A_1(y,z) \le A_2(y,z), \tag{18.3}$$

причому оператори $A_1(y,z), A_2(y,z)$ *є ізотонними щодо* y *і антитонними щодо* z*;*

3) *мають місце нерівності*

$$\|T(\theta_E)\| \le A_1(\theta, v), \ \|T(\theta_E)\| \le v - A_2(v, \theta); \tag{18.4}$$

4) *якщо* $\|x\| \le y \le z \le v$, $\|\Delta x\| \le \Delta y$, $\|\Delta x\| \le \Delta z$, ($y + \Delta y$, $z - \Delta z \in [\theta, v]$, $y, z \in [\theta, v]$, $x, \Delta x \in E$*), то*

$$\begin{aligned} &\|T(x+\Delta x) - T(x)\| \le A_1(y+\Delta y, z-\Delta z) - A_1(y,z), \\ &\|T(x+\Delta x) - T(x)\| \le A_2(z,y) - A_2(z-\Delta z, y+\Delta y). \end{aligned} \tag{18.5}$$

Тоді існує розвязок $x^* \in E$ *рівняння (18.1), до якого збігаються послідовні наближення*

$$x_0 = \theta_E, \ x_{n+1} = T(x_n) \ (n = 0, 1, ...). \tag{18.6}$$

При цьому мають місце оцінки

$$\|x^*\| \le \varphi^*, \tag{18.7}$$

$$\begin{aligned} &\|x^* - x_n\| \le \varphi^* - \varphi_n, \\ &\|x^* - x_n\| \le \psi_n - \psi^*, \end{aligned} \tag{18.8}$$

де (φ^*, ψ^*) *–крайній на відрізку* $[\theta, v]$ *розвязок системи рівнянь*

$$\begin{aligned} y &= A_1(y, z), \\ z &= A_2(z, y), \end{aligned} \tag{18.9}$$

а послідовності $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$ *означені за допомогою формул*

$$\begin{gathered} \varphi_0 = \theta, \quad \psi_0 = v, \\ \varphi_{n+1} = A_1(\varphi_n, \psi_n), \psi_{n+1} = A_2(\psi_n, \varphi_n) \quad (n = 0, 1, ...). \end{gathered} \tag{18.10}$$

Доведення. За лемою 6.1 із [57, стор.22] крайній на $[\theta, v]$ розвязок (φ^*, ψ^*) системи рівнянь (18.9) існує і до його компонент φ^*, ψ^* монотонно збігаються відповідно послідовності $\{\varphi_n\}$ та $\{\psi_n\}$, побудовані за формулами (18.10). Співвідношення (18.3) і (18.4) є підставою для нерівності $\|x_1\| \leq \varphi_1$. Із (18.5) випливає також, що $\|x_1 - x_0\| \leq \varphi_1 - \varphi_0$, $\|x_1 - x_0\| \leq \psi_0 - \psi_1$. Припустимо, що при якомусь $n > 1$ і $k \leq n$ маємо

$$\|x_n\| \leq \varphi_n, \tag{18.11}$$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_k\| &\leq \varphi_n - \varphi_k, \\ \|x_n - x_k\| &\leq \psi_k - \psi_n. \end{aligned} \tag{18.12}$$

Для $1 \leq k \leq n+1$, використовуючи умову 4) теореми, знаходимо

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1} - x_k\| = \|T(x_n) - T(x_{k-1})\| = \|T(x_{k-1} + (x_n - x_{k-1})) - \\ &- T(x_{k-1})\| \leq A_1(\varphi_{k-1} + (\varphi_n - \varphi_{k-1}), \psi_{k-1} - (\psi_{k-1} - \psi_n)) - \\ &- A_1(\varphi_{k-1} - \psi_{k-1}) = A_1(\varphi_n, \psi_n) - A_1(\varphi_{k-1}, \psi_{k-1}) = \varphi_{n+1} - \varphi_k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1} - x_k\| = \|T(x_n) - T(x_{k-1})\| = \|T(x_{k-1} + (x_n - x_{k-1})) - \\ &- T(x_{k-1})\| \leq A_2(\psi_{k-1}, \varphi_{k-1}) - A_2(\psi_{k-1} - (\psi_{k-1} - \psi_n), \varphi_{k-1} + \\ &+ (\varphi_n - \varphi_{k-1})) = A_2(\psi_{k-1}, \varphi_{k-1}) - A_2(\psi_n, \varphi_n) = \psi_k - \psi_{n+1}. \end{aligned}$$

Отже, обгрунтований перехід від n до $n+1$ в (18.12). Схожим способом можна переконатися в можливості переходу в (18.12) від k до $k+1$. Отже, для всіх n та $k \leq n$ справджуються співвідношення (18.12). При цьому на підставі доведеного для $k = 0$ маємо

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|x_{n+1} - x_1\| + \|x_1 - x_0\| = \\ &= \varphi_{n+1} - \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_{n+1} - \varphi_0, \\ &\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|x_{n+1} - x_1\| + \|x_1 - x_0\| = \\ &= -\psi_1 + \psi_{n+1} + \psi_0 - \psi_1 = \psi_0 - \psi_{n+1}, \end{aligned}$$

звідки, зокрема, отримуємо

$$\|x_{n+1}\| \leq \varphi_{n+1},$$

тобто, обгрунтовано можливість переходу від n до $n+1$ в (18.11). Отже, співвідношення (18.11), (18.12) справджуються завдяки принципові індукції при всіх $n = 0, 1, ...$ і $k \leq n$. При цьому, наприклад, з першої з нерівностей (18.12) випливає фундаментальність послідовності $\{x_n\}$. Тому завдяки повноті простору E послідовність $\{x_n\}$ збігається в E. Неважко переконатися, що ця границя є розвязком рівняння (18.1), бо за допомогою умови 4) одержуємо, наприклад,

$$\|T(x^*) - x_{n+1}\| = \|T(x^*) - T(x_n)\| = \|T(x_n + (x^* - x_n)) - T(x_n)\| \leq$$
$$\leq A_1(\varphi_n + (\varphi^* - \varphi_n), \psi_n - (\psi_n - \psi^*)) - A_1(\varphi_n, \psi_n) = \varphi^* - \varphi_{n+1}.$$

Звідси через граничний прехід при $n \to \infty$, знаходимо, що $x^* = T(x^*)$. Переходячи до границі при $n \to \infty$ у співвідношеннях (18.11), (18.12), отримаємо співвідношення (18.8), (18.9), що завершує доведення теореми.

Зауваження 18.1. *Замість відрізка $[\theta, v]$ в умовах теореми 18.1 можна розглядати відрізок $[u, v]$ $(\theta \leq u \leq v,\ u, v \in G)$. В цьому випадку замість першої з нерівностей (18.4) будемо мати нерівність*

$$\|T(\theta_E)\| \leq A_1(u, v) - u, \tag{18.13}$$

замінюючи всюди у попередньому викладі нульовий елемент θ елементом u. У цьому випадку за нульове наближення в (18.6) можна прийняти будь-який елемент $x_0 \in E$, для якого

$$\|x_0\| \leq u, \tag{18.14}$$

і потрібно вимагати, щоб замість нерівностей (18.4) справджувалися нерівності

$$\|T(x_0) - x_0\| \leq A_1(u, v) - u,\ \|T(x_0) - x_0\| \leq v - A_2(v, u). \tag{18.15}$$

Зауваження 18.2. *Якщо оператор $A_1(y,z)$ не залежить від другого аргументу, то другі з нерівностей (18.4) і (18.5) можна зігнорувати, бо без них можна обійтися при доведенні теореми. В цьому випадку з теореми 18.1 випливає результат, який співпадає з відповідним результатом із [29, розділ XII, теорема 2.22] Л.В.Канторовича.*

Зауваження 18.3. *З оцінок (18.8) можна отримати оцінку*

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{1}{2}(\psi_n - \varphi_n),$$

яка випливає після додавання нерівностей (18.8) із врахуванням того, що для крайнього розвязку (φ^*, ψ^*) системи (18.10) маємо $\varphi^* \le \psi^*$.

Наведемо відмінний від теореми 18.1 результат про оцінку розв'язку x^* рівняння (18.1) і збіжність до цього розв'язку послідовних наближень x_n.

Теорема 18.2. *Нехай справджується умова 2) теореми 18.1, а замість умов 1), 3) і 4) мають місце умови:*

1) *елементи u, v $(\theta_E \le u \le v)$ задвольняють нерівності*

$$u \le A_1(u,v), \quad v \ge A_2(v,u)$$

2) *для деякого елементу $\overline{x} \in E$, для якого маємо*

$$\|\overline{x}\| \ge v, \tag{18.16}$$

справджуються нерівності

$$\|T(\overline{x}) - \overline{x}\| \le A_1(u,v) - u, \ \|T(\overline{x}) - \overline{x}\| \le v - A_2(v,u);$$

3) *якщо $u \le y \le z \le v$, $\|x\| \ge z$, $\|\Delta x\| \le \Delta y$, $\|\Delta x\| \le \Delta z$, $y + \Delta y, z - \Delta z \in [u,v]$, то справджуються нерівності (18.5).*

Тоді існує розвязок $x^* \in E$ рівняння (18.1), до якого збігаються послідовні наближення x_n, побудовані за допомогою формул

$$x_0 = \overline{x}, \quad x_{n+1} = T(x_n)(n = 0, 1, ...),$$

і справджуються оцінки (18.8) та оцінка

$$\|x^*\| \geq \psi^*,$$

де φ^* ψ^* *– компоненти крайнього розвязку* (φ^*, ψ^*) *на відрізку* $[u, v]$ *системи рівнянь (18.9),* φ_n, ψ_n *– послідовні наближення, утворені за формулами (18.10), у яких приймаємо* $\varphi_0 = u$ *замість* $\varphi_0 = \theta$*.*

Доведення. Нерівність (18.16) означає, що $\|x_1\| \geq \psi_1$. Як і при доведенні теореми 18.1, можна переконатися, що справджуються нерівності $\|x_n\| \geq \psi_n$ та (18.12). Для цього, як і раніше, використовуємо принцип індукції. Схожим способом із (18.12) з використанням індукції можна обгрунтувати, що

$$\|x_0\| - \|x_{n+1}\| \leq \|x_{n+1} - x_0\| \leq \psi_0 - \psi_{n+1} = v - \psi_{n+1}$$

Висновки про обґрунтованість тверджень теореми 18.2 можна зробити за допомогою міркувань, схожих до тих, якими завершене доведення теореми 18.1 і вважати, що це є підставою для завершення доведення.

Як і раніше, вважатимемо оператори $A_1(y, z)$, $A_2(y, z)$ неперервними щодо y і z, а також, що

$$A_1(y, z) \leq \|T(x)\| \leq A_2(z, y) \tag{18.17}$$

при $\theta \leq y \leq \|x\| \leq z \leq v$, і, крім того, маємо

$$\|T(x) - x\| \leq z - A_2(z, y) \tag{18.18}$$

Теорема 18.3. *Нехай для неперервних операторів* $A_1(y, z)$*,* $A_2(y, z)$ *при* $\theta \leq y \leq \|x\| \leq z \leq v$ *справджуються нерівності (18.17), (18.18). Тоді рівняння (18.1) має розвязок* $x^* \in E$*, до якого збігається послідовність* $\{x_n\}$*, утворена за допомогою формул (18.6) з довільним* $x_0 \in E$*, для якого* $\|x_0\| \in [\theta, v]$*, і мають місце оцінки*

$$\varphi^* \leq \|x^*\| \leq \psi^*, \tag{18.19}$$

$$\|x^* - x_n\| \leq \psi_n - \psi^*, \tag{18.20}$$

де, як і раніше, (φ^*, ψ^*) *– крайній на* $[u, v]$ *розвязок ситеми (18.10).*

Доведення. Оскільки очевидно, що $\varphi_1 \leq \|x_1\| \leq \psi_1$, то припустивши, що

$$\varphi_n \leq \|x_n\| \leq \psi_n, \tag{18.21}$$

знаходимо

$$\varphi_{n+1} = A_1(\varphi_n, \psi_n) \leq \|T(x_n)\| = \|x_{n+1}\| \leq A_2(\psi_n, \varphi_n) = \psi_{n+1}.$$

Спираючись на принцип індукції, доходимо висновку, що оцінки (18.21) мають місце при $n = 0, 1, ...$ З огляду на (18.17), (18.18) маємо також

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|T(x_0), x_0\| \leq v - A_2(v, \theta) = \psi_0 - \psi_1.$$

Якщо припустити, що

$$\|x_n - x_k\| \leq \psi_k - \psi_n \quad (k < n), \tag{18.22}$$

то за допомогою (18.10), (18.17), (18.18) і (18.21), (18.22) знайдемо

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1} - x_k\| \leq \|T(x_n), x_n\| + \|x_n - x_k\| \\ &\leq \psi_n - A_2(\psi_n, \varphi_n) + \psi_k - \psi_n = \psi_k - \psi_{n+1}, \end{aligned}$$

а також

$$\begin{aligned} &\|x_{n+1} - x_{k+1}\| \leq \|T(x_k), x_k\| + \|x_{n+1} - x_k\| \\ &\quad \leq \psi_k - \psi_{n+1} + \psi_{k+1} - \psi_k = \psi_{k+1} - \psi_{n+1}. \end{aligned}$$

Цим на основі принципу індукції можна завершити доведення співвідношень (18.22) бо перехід від k до $k+1$ і від n до $n+1$ обгрунтовано. Із (18.22) випливає, що послідовність x_n має границю $x^* \in E$, оскільки збігається послідовність ψ_n. При цьому із (18.21) і (18.22) випливають оцінки (18.19) і (18.20). Із (18.20) випливає, крім того, що x^* є розвязком рівняння (18.1). Теорему доведено.

Для практичного використання зручним може виявитися таке твердження, доведення якого неістотніми подробицями відрізняється від доведення теореми 18.3.

Теорема 18.4. *Нехай оператор $A_2(y, z)$ не залежить від z, тобто, $A_2(y, z) = A(y)$, причому оператор $A(y)$ є неперервним при $y \in [\theta, v]$ і нехай справджуються припущення: 1) $\theta \leq A(\theta)$, $v \geq A(v)$; 2) якщо $\|x\| \leq z \leq v$, то $\|T(x)\| \leq A(z)$, $\|T(x) - x\| \leq z - A(z)$. Тоді* *рівняння (18.1) має розвязок $x^* \in E$, до якого збігаються послідовні наближення (18.6) з довільним початковим наближенням $x_0 \in E$, яке задовольняє співвідношення $\|x_0\| \in [\theta, v]$. При цьому*

$$\|x^*\| \leq \psi^*, \quad \|x_n - x^*\| \leq \psi_n - \psi^*,$$

де ψ^* – верхній розвязок рівняння $\psi = A(\psi)$ і $\psi_{n+1} = A(\psi_n)$, $\psi_0 = v$.

Не вдаючись до подробиць обгрунтування наведеної теореми, виокремимо також наступне твердження.

Теорема 18.5. *Нехай оператор T є цілком неперервним. Нехай на відрізку $[\theta, v]$ означений такий неперервний оператор $A(y, z)$, що не спадає за y, не зростає за z і з нерівності $y \leq z$ $(y, z \in [\theta, v])$ випливає, що $A(y, z) \leq A(z, y)$. Припустимо, що*

$$v \geq A(v, \theta)$$

і із співвідношення $\|x\| \in [\theta, v]$, випливає нерівність

$$\|T(x)\| \leq A(\|x\|, \|x\|).$$

Тоді існує розвязок $x^* \in E$ рівняння (18.1), для якого маємо $x^* \in [\theta, v]$.

Доведення. Нехай $x \in E$ і $\|x\| \in [\theta, v]$. Переконаємося, що $\|T(x)\| \in [\theta, v]$. Справді:

$$\|T(x)\| \leq A(\|x\|, \|x\|) \leq A(v, \theta) \leq v.$$

Тому застосовний принцип Шаудера про нерухому точку, що й доводить теорему.

Зауваження 18.4. *В умовах теорем 18.1-18.4 замість неперервності операторів $A_1(y, z)$, $A_2(y, z)$ достатньо вимагати, щоб справджувалося припущення: якщо $y_n \leq y_{n+1}$, $z_n \geq z_{n+1}$, $y_n \to y^*$, $z_n \to z^*$, то $A_1(y_n, z_n) \to A_1(y^*, z^*)$, $A_2(z_n, y_n) \to A_2(z^*, y^*)$.*

РОЗДІЛ VII. ДВОСТОРОННІ ОПЕРАТОРНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Йдеться про клас тверджень, які формально можна описати таким чином. Якщо у напівупорядкованому просторі E рівняння $Fx = \theta$ (θ – нульовий елемент в E) має розв'язок $x^* \in E_1$ ($E_1 \subseteq E$), то за певних обставин з існування елемента $u \in E_1$, для якого $Fu \geq \theta$, випливає нерівність $u \geq \theta$ або нерівність $u \leq \theta$. Теореми про операторні, зокрема про інтегральні та про диференціальні нерівності, мають важливі застосування у різних галузях теорії наближених методів, серед яких – двосторонні монотонні ітераційні методи, асимптотичні методи, якісна теорія рівнянь і т. п. Прикладами операторних нерівностей є загальновідомі і часто використовувані у теорії стійкості інтегральні нерівності Гронуолла (яку також називають нерівністю Гронуолла- Беллмана), Біхарі, Вендроффа та їх численні узагальнення (див., напр., [13, 21, 57, 92, 123–127, 133, 135]). У цьому розділі розвинемо основні результати із [57] про двосторонні операторні нерівності, а також наведемо результати, опубліковані в [100, 103]

§19. Двосторонні операторні нерівності з монотонними і гетеротонними операторами

Розглянемо спочатку приклади теорем про операторні нерівності для лінійного рівняння

$$x = Ax + b \tag{19.1}$$

з лінійним неперервним оператором $A : E \to E$, де E – напівупорядкований банахів простір.

Теорема 19.1. *Нехай спектральний радіус $\rho(A)$ оператора A менший за одиницю і A є додатнім оператором. Тоді з нерівності $u \leq Au + b \quad (u \in E)$ випливає оцінка $x^* \leq u$, а з нерівності $v \geq Av + b \quad (v \in E)$ випливає оцінка $v \geq x^*$ для единого розв'язку $x^* \in E$ рівняння (19.1).*

Доведення базується на двох основних зауваженнях. Першим з них є те, що послідовності $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$, утворені за допомогою формул

$$y_0 = u, \quad y_{n+1} = Ay_n + b$$

та

$$z_0 = v, \quad z_{n+1} = Az_n + b,$$

є монотонними. Другим є той факт, що нерівність $\rho(A) < 1$ забезпечує збіжність послідовностей $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ до єдиного в E розв'язку x^* рівняння (19.1). З цих двох фактів, як можна переконатися, випливає правдивість твердження теореми.

Із способу доведення теореми 19.1 видно, що для обгрунтування теорем про операторні нерівності можна використовувати ітераційні методи, якщо вдається гарантувати збіжність і монотонність відповідних послідовностей. Це спостереження дає підставу, наприклад, для такого твердження.

Теорема 19.2. *Нехай задана множина E_1 елементів із частково упорядкованого простору E і заданий оператор $F : E_1 \to E_1$, причому: 1) оператор F – ізотонний; 2) заданий елемент $u \in E_1$ $(v \in E_1)$, що задовольняє нерівність $u \leq Fu$ $(v \geq Fv)$; 3) послідовність $\{y_n\}$ (послідовність $\{z_n\}$), утворена за допомогою формул*

$$y_0 = u, \;\; y_{n+1} = Fy_n \quad (z_0 = v, \;\; z_{n+1} = Fz_n)\,,$$

збігається до розв'язку $x \in E_1$ рівняння

$$x = Fx.$$

Тоді для цього розв'язку має місце оцінка

$$u \leq x \quad (v \geq x)\,.$$

Якщо крім того, існує верхній в E_1 розв'язок z^* (нижній в E_1 розв'язок y^*) цього рівняння, то справджується нерівність

$$u \leq z^* \quad (v \geq y^*)\,.$$

Замість рівняння $x = Fx$ можна розглядати рівняння $Lx = Tx$. За припущення, що L є лінійним оператором, для якого існує обернений оператор $L^{-1} : E_1 \to E_1$ і L^{-1} є лінійним неперервним додатнім оператором, рівняння $Lx = Tx$ можна записати у вигляді $x = Fx$, де $F = L^{-1}T$. Якщо T – ізотонний оператор, то $F = L^{-1}T$ теж є ізотонним оператором. Тому нерівність $Lu \leq Tu \quad (Lv \geq Tv)$ призводить до оцінки $u \leq x \quad (v \geq x)$ завдяки теоремі 19.2.

Для антитонного оператора F ситуація ускладнюється, бо нерівність $u \leq Fu \quad (v \geq Fv)$ навіть для лінійного рівняння $x = Fx$, тобто, у випадку, коли $Fx = -Ax+b$ з лінійним неперервним додатнім оператором A, який має менший за одиницю спектральний радіус $\rho(A)$, може не призводити ні до нерівності $u \leq x \quad (v \geq x)$, ані до нерівності $u \geq x \quad (v \leq x)$ для розв'язку x рівняння $x = -Ax + b$. Однак, можна довести таке твердження.

Теорема 19.3. *Нехай $A : E \to E$ є лінійним додатнім неперервним оператором з меншим за одиницю спектральнtм радіgсом $\rho(A)$. Тоді нерівності*

$$u \leq -Av + b, \quad v \geq -Au + b \quad (u, v \in E)$$

призводять до оцінок

$$u \leq x \leq v$$

для розв'язку x рівняння

$$x = -Ax + b.$$

Доведення теореми спирається на ті самі принципи, з якими ми мали справу при доведенні теореми 19.1.

Обидві наведені ситуації для монотонного оператора – ізотонного і антитонного – вписуються у загальну схему для рівнянь з немонотонним оператором F, який має властивість гетеротонності. Як відомо, оператор $F : E_1 \to E_1$ називають гетеротонним, якщо маємо такий оператор $T(y,z) : E_1 \times E_1 \to E_1$, що не спадає за y, не зростає за z і для якого

$$T(x,x) = Fx \quad (x \in E_1). \tag{19.2}$$

Зазначимо, що гетеротонним деколи називають також $T(y,z)$.

Розглянемо рівняння

$$x = T(x,x) \tag{19.3}$$

з оператором $T(y,z) : E_1 \times E_1 \to E_1$, де E_1 – множина елементів із напівупорядкованого простору E, і сформулюємо таку теорему про двосторонні операторні нерівності для рівняння з гетеротонним оператором.

Теорема 19.4. *Нехай: 1) оператор $T(x,x)$ є гетеротонним тобто, з нерівностей $u \le y$, $v \ge z \quad (u,v,y,z \in R_1)$ випливає, що $T(u,v) \le T(y,z)$; 2) задані елементи $u, v \in E_1$, для яких*

$$u \le T(u,v), \quad v \ge T(v,u); \tag{19.4}$$

3) послідовності $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$, утворені за допомогою ітераційного процесу

$$y_{n+1} = T(y_n, z_n), \quad z_{n+1} = T(z_n, y_n) \tag{19.5}$$

з початковими наближеннями

$$y_0 = u, \quad z_0 = v. \tag{19.6}$$

збігаються до єдиного в E_1 розв'язку x^* рівняння (19.3). Тоді мають місце оцінки

$$u \le x^* \le v. \tag{19.7}$$

Доведення очевидним способом можна звести до доведення нерівностей

$$y_n \le y_{n+1}, \quad z_n \ge z_{n+1} \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{19.8}$$

які для $n = 0$ отримуються із співвідношень (19.4) – (19.6), а для $n > 1$ підтверджуються за допомогою принципу індукції, бо з умов теореми і припущення про виконання нерівностей $y_{n-1} \le y_n$, $z_{n-1} \ge z_n$ випливають співвідношення

$$y_{n+1} = T(y_n, z_n) \ge T(y_{n-1}, z_{n-1}) = y_n,$$
$$z_{n+1} = T(z_n, y_n) \le T(z_{n-1}, y_{n-1}) = z_n.$$

Тому постульована в умовах теореми однозначна розв'язність рівняння (19.3) та збіжність послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ дають підставу вважати теорему доведеною.

Подібним способом можна довести трохи загальнішу теорему, умови якої не вимагають єдиності розв'язку рівняння (19.3).

Запишемо рівняння (19.3) у вигляді

$$x = Fx, \tag{19.9}$$

вважаючи заданими оператори $T_i\,(y,z) : E_1 \times E_1 \to E_1 \quad (i = 1,\ 2)$, для яких при $x \in E_1$ маємо

$$T_1\,(x,x) = T_2\,(x,x) = Fx. \tag{19.10}$$

Теорема 19.5. *Нехай: 1) з нерівностей $y \le u$, $z \ge v$ $(y,z,u,v \in E_1)$ випливають нерівності*

$$T_i\,(y,z) \le T_i\,(u,v) \quad (i = 1,\ 2)\,; \tag{19.11}$$

2) задані елементи $(u, v \in E_1)$, для яких

$$u \le T_1\,(u,v)\,, \quad v \ge T_2\,(v,u)\,; \tag{19.12}$$

3) послідовності $\{y_n\}$ і $\{z_n\}$, утворені за допомогою формул

$$y_{n+1} = T_1\,(y_n,z_n)\,, \ \ z_{n+1} = T_2\,(z_n,y_n) \tag{19.13}$$

з початковими наближеннями (19.6), збігаються до компонент y^* і z^* крайнього в E_0 розв'язку (y^*,z^*) системи

$$y = T_1\,(y,z)\,, \ \ z = T_2\,(z,y)\,. \tag{19.14}$$

Тоді для всякого розв'язку $x^* \in E_1$ рівняння (19.9) мають місце оцінки (19.7).

Доведення. Співвідношення (19.8) підтверджуються такими самими міркуваннями як і при доведенні теореми 19.4. При цьому очевидно, що

$$y_n \le y_{n+0} \le y^* \le z^* \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \tag{19.15}$$

Оскільки із (19.10) випливає, що (x^*,x^*) є розв'язком системи (19.14), якщо x^* є розв'язком рівняння (19.9), то, маючи на увазі означення крайнього розв'язку, з (19.15) отримуємо

$$y_n \le y_{n+1} \le y^* \le x^* \le z^* \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,. \tag{19.16}$$

Звідси випливають, зокрема, нерівності (19.7), які потрібно було довести.

Якщо F є ізотонним оператором, то з теореми 19.5 можна отримати теорему 19.2. У випадку антитонного оператора F з теореми 19.5 випливає таке твердження.

Теорема 19.6. *Нехай: 1) оператор F є антитонним, тобто, з нерівності $y \leq z \quad (y, z \in E_1)$ випливає, що $Fy \geq Fz$; 2) задані елементи $u, v \in E_1$, для яких*

$$u \leq Fv, \;\; v \geq Fu; \tag{19.17}$$

3) послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, побудовані за допомогою формул

$$y_{n+1} = Fz_n, \;\; z_{n+1} = Fy_n$$

з початковими наближеннями (19.6), збігаються до крайнього в E_1 розв'язку (y^*, z^*) системи

$$y = Fz, \;\; z = Fy. \tag{19.18}$$

Тоді для всякого розв'язку $x^* \in E_1$ рівняння (19.9) правдиві оцінки (19.7).

Виконання умови 3) теореми 19.5 можна гарантувати, якщо, зокрема, справджується припущєння:

3а) *система (19.14) має єдиний в $E_1 \times E_1$ розв'язок (y^*, z^*), причому $y^* = z^*$ і збігаються в E_1 послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, утворені за допомогою ітераційного процесу (19.13), (19.6).*

Забезпечити виконання умови 3а) можна, зокрема, припускаючи, що T_1, T_2 є ліпшицієвими операторами. Задля прикладу конкретизуємо сказане для випадку, коли: 3б) E є банаховим напівупорядкованим простором, множина E_1 є відрізком в E або співпадає з усім простором E, а оператори $T_1 (y, z)$, $T_2 (y, z)$ є ліпшицієвими в E_1, тобто, при $y, z, u, v \in E_1$ маємо

$$\begin{aligned} \|T_1 (y, z) - T_1 (u, v)\| \leq \alpha_1 \|y - u\| + \alpha_2 \|z - v\| , \\ \|T_2 (y, z) - T_2 (u, v)\| \leq \beta_1 \|y - u\| + \beta_2 \|z - v\| , \end{aligned} \tag{19.19}$$

причому

$$\max \{\alpha_1, \alpha_2\} + \max \{\beta_1, \beta_2\} \leq q < 1. \tag{19.20}$$

За цієї ситуації з теореми 19.5 отримується таке твердження.

Теорема 19.7. *Нехай справджуються умови 1) і 2) теореми 19.6, а умова 3) цієї теореми замінена умовою 3б). Тоді для єдиного розв'язку $x^* \in E_1$ рівняння (19.9) мають місце оцінки (19.7).*

За ситуації, коли

$$T_1(y,z) = T_2(y,z) = T(y,z) = F_1 y + F_2 z \tag{19.21}$$

формулюємо аналог теореми 19.7 для рівняння

$$x = F_1 x + F_2 x. \tag{19.22}$$

Теорема 19.8. *Нехай: 1) оператор F_1 – ізотонний, оператор F_2 – антитонний; 2) елементи $u, v \in E_1$ задовольняють нерівності*

$$u \leq F_1 u + F_2 v, \quad v \geq F_1 v + F_2 u; \tag{19.23}$$

3) із співвідношень $y, z \in E_1$, де E_1 – відрізок в E або співпадає з E, E - напівупорядкований банахів простір, випливають нерівності

$$\|F_1 y - F_1 z\| \leq \alpha \|y - z\|, \quad \|F_2 y - F_2 z\| \leq \beta \|y - z\|, \tag{19.24}$$

причому

$$\alpha + \beta \leq q < 1. \tag{19.25}$$

Тоді для єдиного в E_1 розв'язку $x^* \in E_9$ рівняння (19.22) справджуються оцінки (19.7).

Для доведення досить зазначити, що йдеться про частковий випадок теореми 19.7.

У тому випадку, коли рівняння (19.9) є лінійним рівнянням вигляду

$$x = A_1 x - A_2 x + b \tag{19.26}$$

з додатніми лінійними операторами $A_1, A_2 : E \to E$, $b \in E$, замість припущення (19.25) можна скористатися іншою умовою.

Теорема 19.9. *Нехай: 1) A_1, A_2 є лінійними додатніми операторами у напівупорядкованому банаховому просторі E; 2) задані елементи $u, v \in E$, для яких*

$$u \leq A_1 u - A_2 v + b, \quad v \geq A_1 v - A_2 u + b; \tag{19.27}$$

3) для спектрального радіуса $\rho(A)$ оператора $|A| = A_1 + A_2$ правдива оцінка

$$\rho(|A|) < 1. \tag{19.28}$$

Тоді для єдиного розв'язку $x^* \in E_1$ рівняння (19.26) мають місце оцінки (19.7).

Доведення потребує лише тих міркувань, котрими можна підтвердити виконання умови 3) із теореми 19.4. Оскільки за умовою $\rho(|A|) < 1$, то можна упевнитися, що також і $\rho(A) < 1$, де $A = A_2 - A_1$. Це випливає з нерівностей $-(A_1 + A_2) \leq A_1 - A_2 \leq A_1 + A_2$, де нерівність вигляду $A \leq B$ означає, що $B - A$ є додатнім оператором. Зазначимо, що послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ за виконання умов теореми обчислюються за формулами

$$y_{n+1} = A_2 y_n - A_2 z_n + b, \;\; z_{n+1} = A_1 z_n - A_2 y_n + b. \tag{19.29}$$

При цьому можна переконатися спочатку, що збігаються послідовності $\{y_{n+1} + z_{n+1}\}$ та $\{z_n - y_n\}$, бо із (19.29) випливають рівності

$$\begin{aligned} y_{n+1} + z_{n+1} &= (A_1 - A_2)(y_n + z_n) + 2b, \\ z_{n+1} - y_{n+1} &= (A_1 + A_3)(z_n - y_n). \end{aligned}$$

Це дає підставу вважати збіжними послідовності $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ і, завдяки цьому, вважати доведеною теорему.

Приклад 19.1. У просторі $C(E, [\alpha, \beta])$ неперервних на сегменті $[\alpha, \beta]$ $(-\infty < \alpha < \beta < \infty)$ функцій із значеннями із напівупорядкованого банахового простору E розглянемо інтегральне рівняння Вольтерра

$$x(t) = f(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} k(t, s, x(s))\, ds \tag{19.30}$$

за припущення, що оператор $k(t, s, x)$ є таким, що оператор

$$\int\limits_{\alpha}^{t} k(t, s, x(s))\, ds + f(t) = K(t, x)$$

означений для $t \in [\alpha,\beta]$, $x \in E$ і набуває значення з E. Будемо припускати, що задані оператори $F_i(t,s,y,z) : [\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta]\times E\times E \to E$ $(i = 1,\ 2)$, для яких із співвідношень $y \le u$, $z \ge v$, $x,y,z,u,v \in E$, $t,s \in [\alpha,\beta]$ випливають співвідношення

$$\begin{aligned}
&F_i(t,s,y,z) \le F_i(t,s,u,v) \quad (i = 1,\ 2),\\
&F_1(t,s,y,z) \le F_2(t,s,y,z),\\
&F_1(t,s,x,x) = F_2(t,s,x,x) = k(t,s,x).
\end{aligned}$$

Нехай оператори

$$T_i(t,y,z) = f(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} F_i(t,s,y(s),z(s))\,ds \quad (i = 1,\ 2) \tag{19.31}$$

задовольняють умови теореми 19.5. Якщо на $[\alpha,\beta]$ система

$$\begin{aligned}
y(t) &= f(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} F_1(t,s,y(s),z(s))\,ds,\\
z(t) &= f(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} F_2(t,s,z(s),y(s))\,ds
\end{aligned} \tag{19.32}$$

має єдиний розв'язок $(y^*(t), z^*(t)) \in C(E,[\alpha,\beta]) \times C(E,[a,b])$ і при цьому $y^*(t) = z^*(t)$, то можна переконатися, що за припущення про виконання нерівностей

$$\begin{aligned}
u(t) &\le f(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} F_1(t,s,u(s),v(s))\,ds,\\
v(t) &\le f(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} F_2(t,s,v(s),u(s))\,ds,
\end{aligned} \tag{19.33}$$

де $u(t), v(t) \in C(E,[\alpha,\beta])$, збігаються послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, утворені за допомогою ітераційного процесу

$$\begin{aligned}
&y_0(t) = u(t), \quad z_0(t) = v(t),\\
&y_{n+1}(t) = f(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} F_1(t,s,y_n(s),z_n(s))\,ds,\\
&z_{n+1}(t) = f(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} F_2(t,s,z_n(s),y_n(s))\,ds, \quad (t \in [\alpha,\beta]).
\end{aligned}$$

При цьому $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t) = \lim\limits_{n\to\infty} z_n(t) = x^*(t)$ є єдиним в $C(E,[\alpha,\beta])$ розв'язком рівняння (19.30). Отже, за цих припущень справджуються умови теореми 19.5 й тому на $[\alpha,\beta]$ мають місце оцінки (19.7), які для цього прикладу набувають вигляду

$$u(t) \le x^*(t) \le v(t) \quad (t \in [\alpha,\beta]). \tag{19.34}$$

Приклад 19.2. Наведемо твердження, що узагальнює відому лему Біхарі. Нехай c – дійсне число, $\beta_0(t)$ – неперервна при $t \in [\alpha,\beta]$ функція $(-\infty < \alpha<\beta < \infty)$, $\varphi(y,z) > 0$ є неперервною функцією при $y,z \in (\lambda_0,\lambda_1)$, $c \in (\lambda_0,\lambda_1)$, $\varphi(y,z)$ не спадає щодо y, не зростає щодо z, неперервні при $t \in [\alpha,\beta]$ функції $u(t), v(t)$ задовольняють на $[\alpha,\beta]$ нерівності

$$u(t) \le c + \int_\alpha^t \beta_0(s)\varphi(u(s),v(s))\,ds,$$
$$v(t) \ge c + \int_\alpha^t \beta_0(s)\varphi(v(s),u(s))\,ds.$$

Вважатимемо, що система

$$\begin{aligned} y(t) &= c + \int_\alpha^t \beta_0(s)\varphi(y(s),z(s))\,ds,\\ z(t) &= c + \int_\alpha^t \beta_0(s)\varphi(z(s),y(s))\,ds \end{aligned} \tag{19.35}$$

має єдиний неперервний при $t \in [\alpha,\beta]$ розв'язок $(y(t), z(t))$. Нехай $G(c) + \int_\alpha^t \beta_0(s)\,ds$ належить області існування (при $t \in [\alpha,\beta]$) функції $G^{-1}(x)$, оберненої до функції $G(x)$, яка є первісною функцією $G(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\lambda}{\varphi(\lambda,\lambda)}$. Тоді мають місце оцінки (19.34) для єдиного неперервного при $t \in [\alpha,\beta]$ розв'язку рівняння

$$x(t) = c + \int_\alpha^t \beta_0(s)\varphi(x(s),x(s))\,ds, \tag{19.36}$$

які у цьому випадку мають вигляд

$$u\left(t\right) \le G^{-1}\left(G\left(c\right) + \int\limits_{\alpha}^{t} \beta_0\left(s\right) ds\right) \le v\left(t\right). \qquad (19.37)$$

Для доведення зазначимо, що єдиний неперервний розв'язок

$$x\left(t\right) = G^{-1}\left(G\left(c\right) + \int\limits_{\alpha}^{t} \beta_0\left(s\right) ds\right)$$

рівняння (19.36) можна знайти як розв'язок задачі

$$x'\left(t\right) = \beta_0\left(t\right) \varphi\left(x\left(t\right), x\left(t\right)\right), \quad x\left(\alpha\right) = c.$$

Тому можна застосувати теорему 19.3 або посилатися на приклад 19.1.

Приклад 19.3. Розглянемо лінійне інтегральне рівняння вольтерівського типу

$$x\left(t\right) = f\left(t\right) + \int\limits_{\alpha}^{t} K\left(t,s\right) x\left(s\right) ds \qquad (19.38)$$

у просторі $L_2\left(\alpha,\beta\right)$ інтегровних з квадратом на $\left(\alpha,\beta\right)$ функцій. Додатну і від'ємну частини функції $K\left(t,s\right)$ позначатимемо відповідно $K^+\left(t,s\right)$ та $K^-\left(t,s\right)$, тобто

$$\begin{gathered} K^+\left(t,s\right) = \sup\left\{K\left(t,s\right), 0\right\}, \\ K^-\left(t,s\right) = K^+(t,s) - K\left(t,s\right). \end{gathered}$$

Якщо функції $u\left(t\right), v\left(t\right) \in L_2\left(\alpha,\beta\right)$ майже всюди при $t \in \left(\alpha,\beta\right)$ задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} u\left(t\right) &\le f\left(t\right) + \int_{\alpha}^{t} K^+\left(t,s\right) u\left(s\right) ds - \int_{\alpha}^{t} K^-\left(t,s\right) v\left(s\right) ds, \\ v\left(t\right) &\ge f\left(t\right) + \int_{\alpha}^{t} K^+\left(t,s\right) v\left(s\right) ds - \int_{\alpha}^{t} K^-\left(t,s\right) u\left(s\right) ds, \end{aligned}$$

то майже всюди на (α,β) мають місце оцінки (19.34), для єдиного розв'язку $x^*(t) \in L_2(\alpha,\beta)$ рівняння (19.38).

Справді. Інтегровність з квадратом функцій $K\,(t,s)$, $f\,(t)$ забезпечує однозначну розв'язність системи

$$y\,(t) = f\,(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} K^+\,(t,s)\,y\,(s)\,ds - \int\limits_{\alpha}^{t} K^-\,(t,s)\,z\,(s)\,ds,$$
$$z\,(t) = f\,(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} K^+\,(t,s)\,z\,(s)\,ds - \int\limits_{\alpha}^{t} K^-\,(t,s)\,y\,(s)\,ds,$$

та однозначну розв'язність рівняння (19.38), а також монотонну збіжність до розв'язку $x^*\,(t)$ рівняння (19.38) послідовностей $\{y_n\,(t)\}$ та $\{z_n\,(t)\}$, побудованих за формулами

$$y_{n+1}\,(t) = f\,(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} K^+\,(t,s)\,y_n\,(s)\,ds - \int\limits_{\alpha}^{t} K^-\,(t,s)\,z_n\,(s)\,ds,$$
$$z_{n+1}\,(t) = f\,(t) + \int\limits_{\alpha}^{t} K^+\,(t,s)\,z_n\,(s)\,ds - \int\limits_{\alpha}^{t} K^-\,(t,s)\,y_n\,(s)\,ds,$$
$$y_0(t) = u(t), \quad z_0(t) = v(t).$$

Це дає підставу завершити доведення покликанням на теорему 19.4.

Для конструювання теорем про двосторонні операторні нерівності можна використати односторонню ліпшицієвість та часткову ліпшицієвість.

Теорема 19.10. *Нехай: 1) з нерівності $y \le z$ $(y,z \in E_1)$, де E_1 – деяка підмножина із напівупорядкованого простору E випливає нерівність*

$$Fz - Fy \le A_2\,(z-y)$$

з таким додатнім лінійним неперервним оператором A_2, що оператор

$$T_2\,(y,z) = -A_2\,(z-y) + Fz$$

діє з $E_1 \times E_1$ в E_1; 2) задані елементи $u,v \in E_1$, які задовольняють нерівності

$$u \le -A_2\,(v-u) + Fv,$$
$$v \ge A_2\,(v-u) + Fu;$$

3) послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, побудовані за допомогою формул

$$y_0 = u, \;\; z_0 = v, \tag{19.39}$$

$$y_{n+1} = -A_2\,(z_n - y_n) + Fz_n, \\ z_{n+1} = A_2\,(z_n - y_n) + Fy_n, \qquad (19.40)$$

збігаються відповідно до компонент y^*, z^* *єдиного в* $E_1 \times E_1$ *розв'язку* (y^*, z^*) *системи*

$$y = -A_2\,(z - y) + Fz, \\ z = A_2\,(z - y) + Fy \qquad (19.41)$$

і цей розв'язок має вигляд $y^* = z^*$. *Тоді для єдиного в* E_1 *розв'язку* x^* *рівняння (19.9) справджуються оцінки (19.7).*

Теорема 19.11. *Нехай: 1) з нерівності* $y \le z \quad (y, z \in E_1)$ *випливає нерівність*

$$-A_1\,(z - y) \le Fz - Fy$$

з додатнім лінійним неперервним оператором A_1, *який має ту властивість, що оператор*

$$T_1\,(y, z) = -A_1\,(z - y) + Fy$$

діє з $E_1 \times E_1$ *в* E_1; *2) елементи* $u, v \in E_1$ *задовольняють нерівності*

$$u \le -A_1\,(v - u) + Fu, \\ v \ge A_1\,(v - u) + Fv;$$

3) послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *отримані за допомогою формул (19.39) та формул*

$$y_{n+1} = -A_1\,(z_n - y_n) + Fy_n, \\ z_{n+1} = A_1\,(z_n - y_n) + Fz_n,$$

збігаються відповідно до компонент y^*, z^* *єдиного в* $E_1 \times E_1$ *розв'язку* (y^*, z^*) *системи*

$$y = -A_1\,(z - y) + Fy, \\ z = A_1\,(z - y) + Fz,$$

причому $y^* = z^*$. *Тоді для єдиного в* E_1 *розв'язку* x^* *рівняння (19.9) мають місце оцінки (19.7).*

Обидві наведені теореми випливають з наступної теореми як її наслідки.

Теорема 19.12. *Нехай: 1) співвідношення $y \leq z$, $x, y, z \in E_1$ призводять до нерівностей*

$$-A_1 (z - y) \leq T(z, x) - T(y, x),$$
$$T(x, z) - T(x, y) \leq A_2 (z - y)$$

з такими неперервними додатними лінійними операторами A_1, A_2, що оператор $T(y, z) - (A_1 + A_2)$ діє з $E_1 \times E_1$ в E_1; 2) елементи $u, v \in E_1$ задовольняють нерівності

$$u \leq -(A_1 + A_2)(v - u) + T(u, v),$$
$$v \geq (A_1 + A_2)(v - u) + T(v, u);$$

3) послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, отримані за допомогою ітераційного процесу

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -(A_1 + A_2)(z_n - y_n) + T(y_n, z_n), \\ z_{n+1} &= (A_1 + A_2)(z_n - y_n) + T(z_n, y_n) \end{aligned} \tag{19.42}$$

з початковими наближеннями (19.39), збігаються до компонент y^*, z^* єдиного в $E_1 \times E_1$ розв'язку (y^*, z^*) системи

$$y = -(A_1 + A_2)(z - y) + T(y, z),$$
$$z = (A_1 + A_2)(z - y) + T(z, y)$$

і при цьому $y^* = z^*$. Тоді для єдиного в E_1 розв'язку x^* рівняння (19.3) мають місце оцінки (19.7).

Доведення. Оскільки з умов 1), 2) та із співвідношень (19.39), (19.42) випливають нерівності $y_0 \leq y_1$, $z_0 \geq z_1$, то за допомогою (19.42) і умов 1), 2) можна отримати

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= (A_1 + A_2)(z_0 - y_0 - z_1 + y_1) + T(y_1, z_1) - T(y_0, z_0) \geq \\ &\geq A_1 (z_0 - z_1) + A_2 (y_1 - y_0) \geq \theta, \\ z_2 - z_1 &= (A_1 + A_2)(z_0 - y_0 - z_1 + y_1) + T(z_0, y_0) - T(z_1, y_1) \geq \\ &\geq A_1 (y_0 - y_1) + A_2 (z_1 - z_0) \geq \theta, \end{aligned}$$

де θ – нульовий елемент в E. Це дає підставу вважати, що завдяки індукції підтверджуються співвідношення

$$y_n \leq y_{n+1}, \quad z_n \geq z_{n+1} \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Покликання на умову 3) завершує доведення.

Приклад 19.4. Наведемо формулювання леми Гронуолла, а також її доведення, яке належить Е. Тітчмаршу (див. [90]) і лежить в основі часто вживаних іншими авторами міркувань для доведення багатьох конкретних теорем про інтегральні нерівності (див., напр., [13, 65, 92]).

Лема Гронуолла. *Нехай* $u(t)$, $\beta(t)$ *є невід'ємними неперервними на сегменті* $[t_0, t_1]$ *функціями і при* $t \in [t_0, t_1]$ *маємо*

$$u(t) \le c + \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, u(s)\, ds, \tag{19.43}$$

де c *– невід'ємне дійсне число. Тоді при* $t \in [t_0, t_1]$ *має місце оцінка*

$$u(t) \le c \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, ds\right). \tag{19.44}$$

Доведення Е. Тітчмарша (див. [92, стор. 37 та стор. 60]) грунтується на тому, що при $c > 0$ матимемо $u(t) \le H(t)$ і $0 < c \le H(t)$, де через $H(t)$ позначено праву частину нерівності (19.43). Отже,

$$\beta(t)\, H(t) \ge \beta(t)\, u(t) = H'(t).$$

Тому, зважаючи на очевидну нерівність $H(t) > 0$, будемо мати

$$\frac{H'(t)}{H(t)} \le \beta(t),$$

причому $H(t_0) = c$. Завдяки цьому отримуємо

$$\int\limits_{H(t_0)}^{H(t)} \frac{dH}{H} \le \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, ds, \text{ або } H(t) \le c \cdot \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, ds\right).$$

Звідси, враховуючи нерівність $u(t) \le H(t)$, матимемо нерівність (19.44) для $c > 0$. При $c = 0$ твердження леми випливає з доведеного твердження для $c > 0$ за допомогою граничного переходу при $c \to 0$.

Якщо зауважити, що $h(t)$ є розв'язком диференціального рівняння $h'(t) = \beta(t)\, h(t)$ з початковою умовою $h(t_0) = c$, де через $h(t)$ позначена права частина нерівності (19.43), то можна узагальнити попередню лему. Одне з таких узагальнень опубліковане М. Харламовим в Українському математичному журналі 1955 року (див. бібліографію в [92]), у якому йдеться про нерівність вигляду

$$u(t) \le a(t) + \alpha(t) \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, u(s)\, ds$$

замість нерівності (19.43) і оцінку

$$u(t) \le a(t) + \alpha(t) \int\limits_{t_0}^{t} a(s)\, \beta(s) \exp\left(\int\limits_{s}^{t} \alpha(\xi)\, \beta(\xi)\, d\xi \right) ds$$

замість (19.44).

Приклад 19.4. Якщо в умовах теореми 19.5 система (19.14) має вигляд

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)\, \psi_1(s)\, y(s)\, ds - \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)\, \psi_2(s)\, z(s)\, ds, \\ z(t) &= f(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)\, \psi_1(s)\, z(s)\, ds - \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)\, \psi_2(s)\, y(s)\, ds, \end{aligned} \tag{19.45}$$

або вигляд

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)\, \psi_1(s)\, y(s)\, ds - \int_{t_0}^{t} \varphi_2(t)\, \psi_1(s)\, z(s)\, ds, \\ z(t) &= f(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)\, \psi_1(s)\, z(s)\, ds - \int_{t_0}^{t} \varphi_2(t)\, \psi_1(s)\, y(s)\, ds \end{aligned} \tag{19.46}$$

при $\varphi_i(t) \ge 0$, $\psi_i(t) \ge 0 \quad (i = 1,\ 2)$, то оцінки (19.7) матимуть вигляд

$$u(t) \le f(t) + \varphi(t) \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\psi(s) \exp\left(\int\limits_{s}^{t} \varphi(\xi)\psi(\xi) d\xi \right) ds \le v(t). \tag{19.47}$$

При цьому

$$\varphi(t) = \varphi_1(t), \quad \psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$$

у тому випадку, коли йдеться про систему (19.45) і нерівності

$$u(t) \le f(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)\,\psi_1(s)\,u(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)\,\psi_2(s)\,v(s)\,ds,$$
$$v(t) \ge f(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)\,\psi_1(s)\,v(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)\,\psi_2(s)\,u(s)\,ds.$$

Якщо ж йдеться про систему (19.46) і нерівності

$$u(t) \le f(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)\,\psi_1(s)\,u(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} \varphi_2(t)\,\psi_1(s)\,v(s)\,ds,$$
$$v(t) \ge f(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_1(t)\,\psi_1(s)\,v(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} \varphi_2(t)\,\psi_1(s)\,u(s)\,ds,$$

то в (19.47) потрібно взяти $\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, $\psi(t) = \psi_1(t)$. Отриманий результат узагальнює лему Гронуолла і співпадає з нею в тому варіанті, у якому вона відома як лема Гронуолла-Беллмана при $\varphi_2(t) = 0$, $\psi_2(t) = 0$, $f(t) = c = const$.

§20. Двосторонні операторні нерівності з гетеротонно оцінюваними операторами

Умови вигляду (19.2) та (19.10), використані для конструювання тверджень про двосторонні операторні нерівності у попередньому параграфі, можна послабити таким чином. Будемо розглядати рівняння вигляду

$$x = Fx \tag{20.1}$$

за припущення, що задані оператори $T_i(y,z) : E_1 \times E_1 \to E_1$ $(i = 1,\ 2)$, для яких

$$T_1(x,x) \le Fx \le T_2(x,x) \quad (x \in E_1). \tag{20.2}$$

Вважатимемо $F : E_1 \to E_1$, $E_1 \subseteq E$, E – напівупорядкований простір.

Теорема 20.1. *Нехай: 1) з нерівностей* $y \le u$, $z \ge v$ $(y, z, u, v \in E_1)$ *випливають нерівності*

$$T_i\,(y,z) \le T_i\,(u,v) \quad (i = 1,\ 2)\,; \tag{20.3}$$

2) елементи $u, v \in E_1$ *задовольняють нерівності*

$$u \le T_1\,(u,v)\,, \quad v \ge T_2\,(v,u)\,; \tag{20.4}$$

3) послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *утворені за допомогою формул*

$$\begin{aligned}&y_0 = u, \quad z_0 = v,\\ &y_{n+1} = T_1\,(y_n, z_n)\,, \quad z_{n+1} = T_2\,(z_n, y_n) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,,\end{aligned} \tag{20.5}$$

мають відповідно границі $y^*, z^* \in E_1$, *причому* (y^*, z^*) *є крайнім в* E_1 *розв'язком системи*

$$y = T_1\,(y,z)\,, \quad z = T_2\,(z,y)\,. \tag{20.6}$$

Крім того, нехай послідовності $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$, *отримані за формулами*

$$\varphi_0 = \psi_0 = x^*, \tag{20.7}$$

$$\varphi_{n+1} = T_1\,(\varphi_n, \psi_n)\,, \quad \psi_{n+1} = T_2\,(\psi_n, \varphi_n) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,, \tag{20.8}$$

де x^* *– який-небудь розв'язок в* E_1 *рівняння (20.1), збігаються до компонент* $\varphi, \psi \in E_1$ *відповідно розв'язку* (φ, ψ) *системи (20.6). Тоді для цього розв'язку* x^* *рівняння (20.1) справджуються оцінки*

$$u \le x^* \le v. \tag{20.9}$$

Доведення. Як і при доведенні теорем 19.4 та 19.5, можна отримати нерівності

$$y_n \le y_{n+1} \le y^* \le z^* \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,, \tag{20.10}$$

які випливають з умов 1)–3). Тому залишається довести нерівності

$$\varphi \le x^* \le \psi. \tag{20.11}$$

Для їх обґрунтування потрібно переконатися у правдивості нерівностей

$$\varphi_n \leq x^* \leq \psi_n \tag{20.12}$$

для $n = 0,\ 1,\ \ldots$. Допускаючи, що вони справджуються для якогось $n \geq 1$, знаходимо

$$\varphi_{n+1} = T_1\left(\varphi_n, \psi_n\right) \leq T_1\left(x^*, x^*\right) \leq Fx^* = x^* \leq \\ \leq T_2\left(x^*, x^*\right) \leq T_2\left(\psi_n, \varphi_n\right) = \psi_{n+1}.$$

Маючи на увазі умови теореми і принцип індукції, можна вважати підтвердженими нерівності (20.12) і, отже, нерівності (20.11). Тому обгрунтованим є висновок про правдивість нерівностей $y^* \leq x^* \leq z^*$, які разом з нерівностями (20.10) дають підставу вважати теорему доведеною.

Теореми 19.4 та 19.5 є частковими випадками теореми 20.1. Як часткові випадки цієї теореми отримуються й інші твердження. Наведемо формулювання деяких з них.

Наслідок 20.1. *Нехай в умовах теореми 20.1 оператори $T_i\left(y, z\right)$ $(i = 1,\ 2)$ не залежать від z, тобто нехай задані оператори $T_1, T_2 : E_1 \to E_1$, для яких*

$$T_1 x \leq Fx \leq T_2 x \quad \left(x \in E_1\right), \tag{20.13}$$

причому: 1) якщо $y \leq z$ $(y, z \in E_1)$, то $T_i y \leq T_i z$ $(i = 1,\ 2)$; 2) елементи $u, v \in E_1$ задовольняють нерівності

$$u \leq T_1 u, \;\; v \geq T_2 v;$$

3) для послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, утворених за допомогою формул

$$y_{n+1} = T_1 y_n, \;\; z_{n+1} = T_2 z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)$$

існують границі y^*, z^* відповідно і y^* є нижнім розв'язком рівняння $y = T_1 y$, а z^* є верхнім розв'язком рівняння $z = T_2 z$. Припускаємо, крім того, що послідовність $\{\varphi_n\}$, утворена за формулами

$$\varphi_0 = x^*, \;\; \varphi_{n+1} = T_1 \varphi_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

збігається до якого-небудь розв'язку $\varphi \in E_1$ рівняння $\varphi = T_1\varphi$, а послідовність $\{\psi_n\}$, побудована за формулами

$$\psi_0 = x^*,\ \psi_{n+1} = T_2\psi_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

збігається до якого-небудь розв'язку $\psi \in E_1$ рівняння $\psi = T_1\psi$, де x^* – який-небудь розв'язок рівняння (20.1). Тоді мають місце оцінки (20.9).

Зауваження 20.1. *Наведений наслідок насправді містить два окремі твердження, котрі отримуються з нього, якщо замість нерівностей (20.13) розглянути окремо ліву з них $T_1x \le Fx$ і окремо – праву нерівність $Fx \le T_2x$. Не вдаючись до подробиць щодо формулювань кожного з окремих тверджень, які отримуються в кожному із зазначених випадків, зауважимо, що нерівності (20.9) теж розпадуться на дві окремі нерівності $u \le x^*$ та $v \ge x^*$ відповідно.*

Наслідок 20.2. *Припустимо, що оператори $T_i(y,z) \quad (i = 1,\ 2)$ не залежать від y і для них справджуються нерівності (20.13), причому: 1) з нерівностей $y \le z \quad (y,z \in E_1)$ випливає, що $T_iy \ge T_iz \quad (i = 1,\ 2)$; 2) елементи $u, v \in E_1$ задовольняють нерівності*

$$u \le T_1v, \quad v \ge T_2u;$$

3) якщо $y_0 = u$, $z_0 = v$, $y_{n+1} = T_1z_n$, $z_{n+1} = T_2y_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)$, то існують границі $y^*, z^* \in E_1$ послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ відповідно і (y^*, z^*) є крайнім в E_1 розв'язком системи

$$y = T_1z, \quad z = T_2y. \tag{20.14}$$

Нехай, крім того, послідовності $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$, отримані за формулами

$$\varphi_0 = \psi_0 = x^*, \quad \varphi_{n+1} = T_1\varphi_n, \quad \psi_{n+1} = T_2\psi_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

де x^* – який-небудь розв'язок в E_1 рівняння (20.1), збігаються відповідно до границь $\varphi, \psi \in E_1$ і (φ, ψ) є розв'язком системи (20.14). Тоді справджуються оцінки (20.9).

Наслідок 20.3. *Нехай оператор $T_1(y,z)$ не залежить від z, а оператор $T_2(y,z)$ не залежить від y, тобто, $T_1(y,z) =$*

$T_1 y$, $T_2(y,z) = T_2 z$. Вважаючи, що правдиві нерівності (20.13), припускаємо, що: 1) з нерівності $y \le z \quad (y, z \in E_1)$ випливає $T_1 y \le T_1 z$, $T_2 y \ge T_2 z$; 2) елементи $u, v \in E_1$ задовольняють нерівності

$$u \le T_1 u, \quad v \ge T_2 v;$$

3) якщо

$$\begin{aligned} &y_0 = u, \;\; z_0 = v, \\ &y_{n+1} = T_1 y_n, \;\; z_{n+1} = T_2 y_n \;\; (n = 0,\, 1,\, \ldots), \end{aligned}$$

то існують границі $y^*, z^* \in E_1$ послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ відповідно і пара (y^*, z^*) є крайнім в E_1 розв'язком системи

$$y = T_1 y, \;\; z = T_2 y.$$

Крім того, припустимо, що розв'язком цієї системи є пара (φ, ψ), де $\varphi, \psi \in E_1$ і φ, ψ є границями відповідно послідовностей $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$, утворених за формулами

$$\varphi_0 = \psi_0 = x^*, \;\; \varphi_{n+1} = T_1 \varphi_n, \;\; \psi_{n+1} = T_2 \varphi_n \;\; (n = 0,\, 1,\, \ldots)$$

для якого-небудь розв'язку x^* рівняння (20.1). Тоді для цього розв'язку виконуються оцінки (20.9).

Наслідок 20.4. *Нехай оператор $T_1(y,z)$ не залежить від y, оператор $T_2(y,z)$ не залежить від z, тобто, $T_1(y,z) = T_1 z$, $T_2(y,z) = T_2 y$ і правдиві нерівності (20.13). Нехай: 1) з нерівності $y \le z \quad (y, z \in E_1)$ випливає $T_1 y \ge T_1 z$, $T_2 y \le T_2 z$; 2) елементи $u, v \in E_1$ задовольняють нерівності*

$$u \le T_1 v, \quad v \ge T_2 v;$$

3) якщо

$$\begin{aligned} &y_0 = u, \;\; z_0 = v, \\ &y_{n+1} = T_1 z_n, \;\; z_{n+1} = T_2 z_n \;\; (n = 0,\, 1,\, \ldots), \end{aligned}$$

то існують границі $y^*, z^* \in E_1$ послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ відповідно і пара (y^*, z^*) є крайнім в E_1 розв'язком системи

$$y = T_1 z, \;\; z = T_2 z.$$

Якщо розв'язком цієї системи є пара (φ, ψ), *де* $\varphi, \psi \in E_1$ *є границями відповідно послідовностей* $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$, *утворених за формулами*

$$\varphi_0 = \psi_0 = x^*, \;\; \varphi_{n+1} = T_1\psi_n, \;\; \psi_{n+1} = T_2\psi_n \;\;\; (n = 0,\ 1,\ \ldots)$$

з яким-небудь розв'язком $x^* \in E_1$ *рівняння (20.1), то для цього розв'язку мають місце оцінки (20.9).*

Наслідки 20.1–20.4 отримуються очевидним способом з теореми 20.1. Зауважимо, що подібним способом можна отримати й інші наслідки з цієї теореми, якщо, наприклад, розглянути ситуацію, за якої один з операторів $T_1(y,z)$, $T_2(y,z)$ не залежить від першого або від другого з аргументів.

Умову 1) теореми 20.1 можна замінити припущенням про часткову ліпшицієвість операторів $T_1(y,z)$, $T_2(y,z)$ замість вимоги про їх ізотонність щодо y та антитонність щодо z. Вимогу щодо часткової ліпшицієвості $T_1(y,z)$, $T_2(y,z)$ назвемо умовою А.

Умова А. *Задані неперервні щодо* $y, z \in E_1$ *неспадні за* y, *незростаючі за* z *оператори* $A_i(y,z)\,w$, $B_i(y,z)\,w \quad (i = 1,\ 2)$, *які як оператори щодо* $w \in E$ *є лінійними неперервними додатніми і для яких при* $y \le z$, $x, y, z \in E_1$ *будемо мати*

$$\begin{aligned} &-A_i(z,y)(z-y) \le T_i(z,x) - T_i(y,x)\,, \\ &T_i(x,z) - T_i(x,y) \le B_i(z,y)(z-y) \quad (i = 1,\ 2)\,. \end{aligned} \tag{20.15}$$

Теорема 20.2. *Нехай: 1) справджується співвідношення (20.2) та умова А,* E_1 *співпадає з* E*; 2) елементи* $u, v \in E$ *задовольняють нерівності*

$$\begin{aligned} u &\le -\left(A_1(v,u) + B_1(v,u)\right)(v-u) + T_1(u,v)\,, \\ v &\ge \quad \left(A_2(v,u) + B_2(v,u)\right)(v-u) + T_2(v,u)\,, \end{aligned} \tag{20.16}$$

3) якщо $y_0 = u$, $z_0 = v$,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -\left(A_1(z_n,y_n) + B_1(z_n,y_n)\right)(z_n-y_n) + T_1(y_n,z_n)\,, \\ z_{n+1} &= \quad \left(A_2(z_n,y_n) + B_2(z_n,y_n)\right)(z_n-y_n) + T_2(z_n,y_n)\,, \end{aligned} \tag{20.17}$$

то послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *збігаються відповідно до* $y^*, z^* \in E_1$, *де* (y^*, z^*) *– крайній в* E *розв'язок системи рівнянь*

$$\begin{aligned} y &= -\left(A_1(z,y) + B_1(z,y)\right)(z-y) + T_1(y,z)\,, \\ z &= \quad \left(A_2(z,y) + B_2(z,y)\right)(z-y) + T_2(z,y)\,, \end{aligned} \tag{20.18}$$

4) якщо $x^* \in E$ – розв'язок рівняння (20.1), $\varphi_0 = \psi_0 = x^*$,

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= -\left(A_1\left(\psi_n, \varphi_n\right) + B_1\left(\psi_n, \varphi_n\right)\right)\left(\psi_n - \varphi_n\right) + T_1\left(\varphi_n, \psi_n\right), \\ \psi_{n+1} &= \quad \left(A_2\left(\psi_n, \varphi_n\right) + B_2\left(\psi_n, \varphi_n\right)\right)\left(\psi_n - \varphi_n\right) + T_2\left(\psi_n, \varphi_n\right), \end{aligned} \tag{20.19}$$

то послідовності $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ збігаються відповідно до компонент $\varphi^*, \psi^* \in E_1$ розв'язку (φ^*, ψ^*) системи (20.18). Тоді мають місце оцінки (20.9).

Доведення. Оскільки з (20.16), (20.17) отримуємо $y_0 \le y_1$, $z_0 \ge z_1$, то, припустивши, що $y_{n-1} \le y_n$, $z_{n-1} \ge z_n$, знайдемо

$$\begin{gathered} y_{n+1} - y_n = -\left(A_1\left(z_n, y_n\right) + B_1\left(z_n, y_n\right)\right)\left(z_n - y_n\right) + T_1\left(y_n, z_n\right) + \\ + \left(A_1\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right) + B_1\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\right)\left(z_{n-1} - y_{n-1}\right) - \\ - T_1\left(y_{n-1}, z_{n-1}\right) \ge -\left(A_1\left(z_n, y_n\right) + B_1\left(z_n, y_n\right)\right)\left(z_n - y_n\right) + \\ + \left(A_1\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right) + B_1\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\right)\left(z_{n-1} - y_{n-1}\right) - \\ - A_1\left(y_n, y_{n-1}\right)\left(y_n - y_{n-1}\right) - B_1\left(z_{n-1}, z_n\right)\left(z_{n-1} - z_n\right) \ge \\ \ge A_1\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(y_n - y_{n-1}\right) + B_1\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(z_{n-1} - z_n\right) \ge \theta, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} z_n - z_{n+1} = \left(A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right) + B_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\right)\left(z_{n-1} - y_{n-1}\right) + \\ + T_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right) - \left(A_2\left(z_n, y_n\right) + B_2\left(z_n, y_n\right)\right)\left(z_n - y_n\right) - \\ - T_2\left(z_n, y_n\right) \ge \left(A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right) + B_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\right)\left(z_{n-1} - y_{n-1}\right) - \\ - \left(A_2\left(z_n, y_n\right) + B_2\left(z_n, y_n\right)\right)\left(z_n - y_n\right) - \\ - A_2\left(z_{n-1}, z_n\right)\left(z_{n-1} - z_n\right) - B_2\left(y_n, y_{n-1}\right)\left(y_n - y_{n-1}\right) \ge \\ \ge A_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(y_n - y_{n-1}\right) + B_2\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right)\left(z_{n-1} - z_n\right) \ge \theta, \end{gathered}$$

де θ – нульовий елемент в E. Отже, згідно з принципом індукції справджуються співвідношення $y_n \le y_{n+1}$, $z_n \ge z_{n+1}$ для $n = 0,\ 1,\ \ldots$. Монотонність послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ у поєднанні з постульованою умовою 3) та їх збіжністю до компонент крайнього в розв'язку (y^*, z^*) дає підставу для виконання нерівностей

$$u \le y^* \le z^* \le v. \tag{20.20}$$

Доведемо нерівності

$$y^* \le x^* \le z^*. \tag{20.21}$$

Для цього переконаємося у монотонності послідовностей $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ та у виконанні нерівностей

$$\varphi_n \le x^* \le \psi_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{20.22}$$

Для $n = 0$ з умови 4) одержимо

$$\begin{gathered}
\varphi_1 = -\left(A_1\left(\psi_0,\varphi_0\right) + B_1\left(\psi_0,\varphi_0\right)\right)\left(\psi_0 - \varphi_0\right) + T_1\left(\varphi_0,\psi_0\right) = \\
= -\left(A_1\left(x^*,x^*\right) + B_1\left(x^*,x^*\right)\right)\left(x^* - x^*\right) + T_1\left(x^*,x^*\right) = Fx^* = x^* \leq \\
\leq \left(A_2\left(x^*,x^*\right) + B_2\left(x^*,x^*\right)\right)\left(x^* - x^*\right) + T_2\left(x^*,x^*\right) = \\
= \left(A_2\left(\psi_0,\varphi_0\right) + B_2\left(\psi_0,\varphi_0\right)\right)\left(\psi_0 - \varphi_0\right) + T_2\left(\psi_0,\varphi_0\right) = \psi_1.
\end{gathered}$$

Припускаючи, що

$$\varphi_n \leq \varphi_{n-1} \leq x^* \leq \psi_{n-1} \leq \psi_n,$$

доведемо нерівності

$$\varphi_{n+1} \leq \varphi_n \leq x^* \leq \psi_n \leq \psi_{n+1}. \tag{20.23}$$

Для цього знаходимо

$$\begin{gathered}
\varphi_n - \varphi_{n+1} = -\left(A_1\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right) + B_1\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right)\right)\left(\psi_{n-1} - \varphi_{n-1}\right) + \\
+ T_1\left(\varphi_{n-1},\psi_{n-1}\right) + \left(A_1\left(\psi_n,\varphi_n\right) + B_1\left(\psi_n,\varphi_n\right)\right)\left(\psi_n - \varphi_n\right) - \\
- T_1\left(\varphi_n,\psi_n\right) \geq -\left(A_1\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right) + B_1\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right)\right)\left(\psi_{n-1} - \varphi_{n-1}\right) + \\
+ \left(A_1\left(\psi_n,\varphi_n\right) + B_1\left(\psi_n,\varphi_n\right)\right)\left(\psi_n - \varphi_n\right) - \\
- A_1\left(\varphi_{n-1},\varphi_n\right)\left(\varphi_{n-1} - \varphi_n\right) - B_1\left(\psi_n,\psi_{n-1}\right)\left(\psi_n - \psi_{n-1}\right) \geq \\
\geq A_1\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right)\left(\psi_n - \psi_{n-1}\right) + B_1\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right)\left(\varphi_{n-1} - \varphi_n\right) \geq \theta,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\psi_{n+1} - \psi_n = \left(A_2\left(\psi_n,\varphi_n\right) + B_2\left(\psi_n,\varphi_n\right)\right)\left(\psi_n - \varphi_n\right) + T_2\left(\psi_n,\varphi_n\right) - \\
- \left(A_2\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right) + B_2\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right)\right)\left(\psi_{n-1} - \varphi_{n-1}\right) - \\
- T_2\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right) \geq \left(A_2\left(\psi_n,\varphi_n\right) + B_2\left(\psi_n,\varphi_n\right)\right)\left(\psi_n - \varphi_n\right) - \\
- \left(A_2\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right) + B_2\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right)\right)\left(\psi_{n-1} - \varphi_{n-1}\right) - \\
- A_2\left(\psi_n,\psi_{n-1}\right)\left(\psi_{n-1} - \psi_n\right) - B_2\left(\varphi_{n-1},\varphi_n\right)\left(\varphi_n - \varphi_{n-1}\right) \geq \\
\geq A_2\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right)\left(\varphi_n - \varphi_{n-1}\right) + B_2\left(\psi_{n-1},\varphi_{n-1}\right)\left(\psi_{n-1} - \psi_n\right) \geq \theta.
\end{gathered}$$

Отже, обгрунтовано нерівності (20.23) для $n = 0,\ 1,\ \ldots$, зокрема, обгрунтовані нерівності (20.22). Цим підтверджено виконання нерівностей (20.21), бо умовою 4) постульована збіжність послідовностей $\{\varphi_n\}$ і $\{\psi_n\}$ до компонент розв'язку (φ^*, ψ^*) системи (20.18). Підсумовуючи сказане, отримуємо підставу вважати теорему доведеною.

Застосуємо цю теорему для конструювання деяких наслідків, які можна розглядати і як аналоги наслідків 20.1–20.4 з теореми 20.1.

Наслідок 20.5. *Нехай оператори* $T_1(y,z)$, $T_2(y,z)$ *не залежать від* z, *тобто* $T_1(y,z) = T_1 y$, $T_2(y,z) = T_2 y$, *і справджуються нерівності (20.13). Нехай також: 1) при* $y \le z$, $y,z \in E$ *маємо*

$$-A_i(z,y)(z-y) \le T_i z - T_i y \quad (i = 1,\ 2)$$

з тими ж операторами $A_1(z,y)$, $A_2(z,y)$, *які фігурують в умові А; 2) елементи* $u, v \in E$ *задовольняють нерівності*

$$\begin{aligned} u &\le -A_1(v,u)(v-u) + T_1 u, \\ v &\ge \quad A_2(v,u)(v-u) + T_2 v; \end{aligned}$$

3) якщо $y_0 = u$, $z_0 = v$,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -A_1(z_n,y_n)(z_n-y_n) + T_1 y_n, \\ z_{n+1} &= \quad A_2(z_n,y_n)(z_n-y_n) + T_2 z_n, \end{aligned}$$

то послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *збігаються відповідно до компонент* y^*, z^* *крайнього в* E *розв'язку* (y^*, z^*) *системи рівнянь*

$$\begin{aligned} y &= -A_1(z,y)(z-y) + T_1 y, \\ z &= \quad A_2(z,y)(z-y) + T_2 z; \end{aligned} \tag{20.24}$$

4) якщо $x^* \in E$ *– розв'язок рівняння (20.1) і* $\varphi_0 = \psi_0 = x^*$,

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= -A_1(\psi_n,\varphi_n)(\psi_n-\varphi_n) + T_1 \varphi_n, \\ \psi_{n+1} &= \quad A_2(\psi_n,\varphi_n)(\psi_n-\varphi_n) + T_2 \psi_n, \end{aligned}$$

то послідовності $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ *збігаються відповідно до компонент* $\varphi^*, \psi^* \in E$ *розв'язку* (φ^*, ψ^*) *системи (20.24). Тоді справджуються оцінки (20.9).*

Наслідок 20.6. *Нехай оператори* $T_1(y,z)$, $T_2(y,z)$ *не залежать від* y, *тобто* $T_1(y,z) = T_1 z$, $T_2(y,z) = T_2 z$, *і справджуються нерівності (20.13), і, крім того: 1) при* $y \le z$, $y,z \in E$ *маємо*

$$B_i(z,y)(z-y) \ge T_i z - T_i y \quad (i = 1,\ 2)$$

з тими самими операторами $B_1(z,y)$, $B_2(z,y)$, *з якими ми мали справу в умові А; 2) елементи* $u, v \in E$ *задовольняють нерівності*

$$\begin{aligned} u &\le -B_1(v,u)(v-u) + T_1 v, \\ v &\ge \quad B_2(v,u)(v-u) + T_2 u; \end{aligned}$$

3) якщо $y_0 = u,\ z_0 = v,$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -B_1(z_n, y_n)(z_n - y_n) + T_1 z_n, \\ z_{n+1} &= \quad B_2(z_n, y_n)(z_n - y_n) + T_2 y_n, \end{aligned}$$

то послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *збігаються відповідно до компонент* y^*, z^* *крайнього в* E *розв'язку* (y^*, z^*) *системи рівнянь*

$$\begin{aligned} y &= -B_1(z, y)(z - y) + T_1 z, \\ z &= \quad B_2(z, y)(z - y) + T_2 y; \end{aligned} \tag{20.25}$$

4) якщо $x^* \in E$ *– розв'язок рівняння (20.1) і* $\varphi_0 = \psi_0 = x^*$,

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= -B_1(\psi_n, \varphi_n)(\psi_n - \varphi_n) + T_1 \psi_n, \\ \psi_{n+1} &= \quad B_2(\psi_n, \varphi_n)(\psi_n - \varphi_n) + T_2 \varphi_n, \end{aligned}$$

то послідовності $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ *збігаються відповідно до компонент* $\varphi^*, \psi^* \in E$ *розв'язку* (φ^*, ψ^*) *системи (20.25). Тоді мають місце оцінки (20.9).*

Наслідок 20.7. *Нехай оператор* $T_1(y, z)$ *не залежить від* z, *а оператор* $T_2(y, z)$ *не залежить від* y, *тобто* $T_1(y, z) = T_1 y$, $T_2(y, z) = T_2 z$, *і справджуються нерівності (20.13) та умови: 1) якщо* $y \le z,\ y, z \in E$, *то*

$$\begin{aligned} -A_1(z, y)(z - y) &\le T_1 z - T_1 y, \\ B_2(z, y)(z - y) &\ge T_2 z - T_2 y, \end{aligned}$$

з тими самими операторами $A_1(z, y)$, $B_2(z, y)$, *про які йдеться в умові А; 2) для елементів* $u, v \in E$ *виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} u &\le -A_1(v, u)(v - u) + T_1 u, \\ v &\ge \quad B_2(v, u)(v - u) + T_2 u; \end{aligned}$$

3) якщо $y_0 = u,\ z_0 = v,$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -A_1(z_n, y_n)(z_n - y_n) + T_1 y_n, \\ z_{n+1} &= \quad B_2(z_n, y_n)(z_n - y_n) + T_2 y_n, \end{aligned}$$

то послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *мають відповідно границі* $y^*, z^* \in E$ *і* (y^*, z^*) *є крайнім в* E *розв'язком системи*

$$\begin{aligned} y &= -A_1(z, y)(z - y) + T_1 y, \\ z &= \quad B_2(z, y)(z - y) + T_2 y; \end{aligned} \tag{20.26}$$

4) якщо $x^* \in E$ – розв'язок рівняння (20.1) і $\varphi_0 = \psi_0 = x^*$,

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= -A_1(\psi_n, \varphi_n)(\psi_n - \varphi_n) + T_1\varphi_n, \\ \psi_{n+1} &= \quad B_2(\psi_n, \varphi_n)(\psi_n - \varphi_n) + T_2\varphi_n, \end{aligned}$$

то послідовності $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ збігаються відповідно до $\varphi^*, \psi^* \in E$ і (φ^*, ψ^*) є розв'язком системи (20.26). Тоді справджуються оцінки (20.9).

Наслідок 20.8. *Нехай оператор $T_1(y,z)$ не залежить від y, а $T_2(y,z)$ не залежить від z, тобто $T_1(y,z) = T_1 z$, $T_2(y,z) = T_2 y$, а також виконані нерівності (20.13) та умови: 1) якщо $y \le z$, $y, z \in E$, то*

$$\begin{aligned} -A_2(z,y)(z-y) &\le T_2 z - T_2 y, \\ B_1(z,y)(z-y) &\ge T_1 z - T_1 y, \end{aligned}$$

з тими самими операторами $A_2(z,y)$, $B_1(z,y)$ із умови А; 2) для елементів $u, v \in E$ справджуються нерівності

$$\begin{aligned} u &\le -B_1(v,u)(v-u) + T_1 v, \\ v &\ge \quad A_2(v,u)(v-u) + T_2 v; \end{aligned}$$

3) якщо $y_0 = u$, $z_0 = v$,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= -B_1(z_n, y_n)(z_n - y_n) + T_1 z_n, \\ z_{n+1} &= \quad A_2(z_n, y_n)(z_n - y_n) + T_2 z_n, \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots) \end{aligned}$$

то існують границі $y^*, z^* \in E$ послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ відповідно і (y^*, z^*) є крайнім в E розв'язком системи

$$\begin{aligned} y &= -B_1(z,y)(z-y) + T_1 z, \\ z &= \quad A_2(z,y)(z-y) + T_2 z; \end{aligned} \tag{20.27}$$

4) якщо $x^* \in E$ – який-небудь розв'язок рівняння (20.1) і $\varphi_0 = \psi_0 = x^*$,

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= -B_1(\psi_n, \varphi_n)(\psi_n - \varphi_n) + T_1\psi_n, \\ \psi_{n+1} &= \quad A_2(\psi_n, \varphi_n)(\psi_n - \varphi_n) + T_2\psi_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots), \end{aligned}$$

то послідовності $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ збігаються відповідно до компонент $\varphi^*, \psi^* \in E$ розв'язку (φ^*, ψ^*) системи (20.27). Тоді для x^* справджуються оцінки (20.9).

Доведення цих наслідків зводиться до виписування умов теореми 20.2 для відповідних конкретних прикладів, якими є наведені наслідки.

Лінійність операторів $T_1(y,z)$, $T_2(y,z)$ дає підставу для твердження, яке оформимо у вигляді окремої теореми.

Теорема 20.3. *Нехай: 1) задані лінійні додатні оператори $A_i, B_i : E \to E \quad (i = 1,\ 2)$ у напівупорядкованому банаховому просторі E, для яких*

$$A_1x - A_2x + b_1 \le Fx \le B_1x - B_2x + b_2 \quad (b_1, b_2 \in E)\,; \tag{20.28}$$

2) елементи $u, v \in E$ задовольняють нерівності

$$u \le A_1u - A_2v + b_1, \;\; v \ge B_1v - B_2u + b_2; \tag{20.29}$$

3) спектральний радіус $\rho(Q)$ оператора

$$Q = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ B_1 & -B_2 \end{pmatrix} \tag{20.30}$$

менший за одиницю. Тоді для всякого розв'язку $x^* \in E$ рівняння (20.1) мають місце оцінки (20.9).

Доведення. Оскільки з нерівності $\rho(Q) < 1$ випливає збіжність послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ та послідовностей $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$, побудованих відповідно за допомогою формул

$$y_{n+1} = A_1y_n - A_2z_n + b_1, \;\; z_{n+1} = B_1z_n - B_2y_n + b_2$$

з початковими наближеннями $y_0 = u$, $z_0 = v$ та за допомогою формул

$$\varphi_{n+1} = A_1\varphi_n - A_2\psi_n + b_1, \;\; \psi_{n+1} = B_1\psi_n - B_2\varphi_n + b_2$$

з початковими наближеннями $\varphi_0 = \psi_0 = x^*$ для розв'язку $x^* \in E$ рівняння (20.1), і при цьому правдиві співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = y^* \le z^* = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n,$$

то теорема випливає з теореми 20.1.

З теореми 20.3 випливає теорема 19.9, якщо співвідношення (20.28) мають вигляд

$$A_1x - A_2x + b_1 = Fx = B_1x - B_2x + b_2$$

і при цьому $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$, $b_1 = b_2$.

§21. Оцінки розв'язків рівнянь з підлінійними операторами

Йдеться про клас операторних рівнянь, який включає, наприклад, інтегральні рівняння вигляду

$$x(t) = b(t) + \int\limits_D K_1(t,s)\, x^\gamma(s)\, ds \quad (\gamma \le 1), \tag{21.1}$$

та вигляду

$$x(t) = b(t) + \int\limits_D K_1(t,s)\, x^\gamma(s)\, ds + \int\limits_D K_1(t,s)\, x(s)\, ds \quad (\gamma < 1)\,. \tag{21.2}$$

Як одне, так і друге з цих рівнянь є прикладами рівняння

$$x = Fx \tag{21.3}$$

у банаховому просторі E із, взагалі кажучи, нелінійним оператором $F : E \to E$, для якого

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|Fx\|}{\|x\|} = \alpha. \tag{21.4}$$

Для рівняння (21.1) за обмеженості функцій $b(t)$, $K_1(t,s)$, очевидно, будемо мати

$$\alpha = 0. \tag{21.5}$$

Для рівняння (21.2) число α можна пов'язувати з величиною норми оператора

$$K_1 x = \int\limits_D K_1(t,s)\, x(s)\, ds. \tag{21.6}$$

Умову (21.5), тобто, умову

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\|Fx\|}{\|x\|} = 0$$

використав В. М. Дубровський [23] (див. також [28, 29, 20, 40]) при розгляді інтегральних рівнянь вигляду (21.1). У застосуванні до інтегральних рівнянь та до крайових задач умова (21.5) використовувалася й іншими дослідниками, зокрема, В. Н. Марченко (див. бібліографію в [56]) та Г. Аде (див. [56]) і Х. А. Стюарт [132]. В [56] автор застосував до таких рівнянь монотонний метод послідовних наближень, замінивши умову (21.5) загальнішим припущенням, частковим випадком якого є умова (21.4) з $\alpha < 1$ (див. також [57]). Для випадку монотонного оператора F ця слабкіша за умову (21.4) умова має такий вигляд.

Умова А. *Існує таке число* $M > 0$, *що з нерівності* $\|x\| \geq M$ *випливає нерівність*

$$\|Fx\| \leq \|x\| \quad (x \in E)\,. \tag{21.7}$$

Якщо в (21.4) маємо, що $0 \leq \alpha \leq 1$, то умова (21.4) є частковим випадком умови А. Істотним є те, що ані умова А, ані умова (21.4) не виключає з розгляду ситуацію, коли (21.3) є лінійним рівнянням вигляду

$$x = Ax + b,$$

для якого

$$\|A\| \leq 1.$$

Виклад вестимемо, дотримуючись в основному [56] (див. також [57]).

Насамперед доведемо одне допоміжне твердження.

Лема 21.1. *Нехай* E *– нормована структура з монотонною нормою (див., напр., [20, 29]). Тоді із співвідношень*

$$y \leq x \leq z \quad (x, y, z \in E) \tag{21.8}$$

випливає оцінка

$$\|x\| \leq \|y\| + \|z\|\,. \tag{21.9}$$

Доведення. Оскільки у нормованій структурі E для всякого $x \in E$ має місце зображення $x = x^+ - x^-$, де x^+, x^- є відповідно додатною і від'ємною частинами елемента x, тобто,

$$x^+ = \sup\{x, \theta\}\,, \quad x^- = x^+ - x,$$

де θ – нульовий елемент в E, то з (21.8) отримуємо

$$y^+ \le x^+ \le z^+, \quad y^- \ge x^- \ge z^-.$$

Тому для модуля $|x| = x^+ + x^-$ елемента x будемо мати

$$|x| = x^+ + x^- \le z^+ + y^- \le z^+ + z^- + y^+ + y^- = |z| + |y| \,.$$

Звідси, враховуючи монотонність норми і нерівність трикутника, отримуємо

$$\|x\| \le \||y| + |z|\| \le \|y\| + \|z\| \,,$$

що й потрібно було довести.

Надалі будемо вважати, що напівупорядкований простір E є нормованою структурою з монотонною нормою і розглядатимемо рівняння (21.3), де $F : E \to E$.

Розглянемо спочатку випадок ізотонного оператора F, тобто, вважатимемо, що з нерівності $y \le z$ випливає нерівність $Fy \le Fz$.

Теорема 21.1. *Нехай: 1) нормована структура є цілком правильно напівупорядкованим простором; 2) неперервний оператор F є ізотонним і справджується умова A; 3) заданий елемент $u \in E$ задовольняє нерівність*

$$u \le Fu. \tag{21.10}$$

Тоді існує розв'язок x^* рівняння (21.3), до x^* монотонно збігається послідовність $\{y_n\}$, утворена за допомогою формул

$$y_0 = u, \;\; y_{n+1} = Fy_n \;\; (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,, \tag{21.11}$$

і справджується оцінка

$$u \le x^*. \tag{21.12}$$

Доведення. Монотонність оператора F і нерівність (21.10) дають підставу для нерівностей

$$y_0 \le y_1 \le \ldots \le y_n \le \ldots . \tag{21.13}$$

Переконаємося, що послідовність $\{y_n\}$ є обмеженою за нормою. Вилучимо з розгляду тривіальну ситуацію, коли для всіх $n = 0,\ 1,\ \ldots$

чи принаймі для $n > N$ з фіксованим натуральним N, можна говорити про дві нетривіальні взаємно альтернуючі можливості. Для першої з них маємо на увазі, що яким би не був номер N, знайдеться $n > N$, для якого $\|y_n\| > M$ для числа M, що фігурує в умові А. При цьому таких y_n, для яких $\|y_n\| \leq M$, знайдеться всього скінченна кількість. Це означає, що, починаючи з якогось номера n_0, будемо мати

$$\|y_n\| > M$$

для всіх $n = n_0,\ n_0 + 1,\ \ldots$. Скориставшись з умови А і з (21.9), знаходимо

$$\|y_{n_0+1}\| = \|Fy_{n_0}\| \leq \|y_{n_0}\|\,.$$

Припустимо, що для якогось $k > 0$ правдива нерівність $\|y_{n_0+k}\| \leq \|y_{n_0+k-1}\|$. Завдяки умові А та (21.11), (21.13) отримуємо

$$\|y_{n_0+k+1}\| = \|Fy_{n_0+k}\| \leq \|y_{n_0+k}\|\,,$$

тобто, завдяки принципові індукції, матимемо

$$\|y_{n_0}\| \geq \|y_{n_0+1}\| \geq \ldots \geq \|y_{n_0+k}\| \geq \ldots$$

Отже, у цій ситуації послідовність $\{y_n\}$ обмежена деякою величиною M_1, взагалі кажучи, більшою за M. У другій із двох зазначених альтернуючих ситуацій припустимо існування безлічі членів послідовності $\{y_n\}$, для яких $\|y_n\| \leq M$, а також водночас існування безлічі членів цієї послідовності, для яких $\|y_n\| > M$. Виберемо перші-ліпші два номери n_1 і n_2, для яких $n_1 < n_2$ і $\|y_{n_1}\| \leq M$, $\|y_{n_2}\| \leq M$. Вважатимемо при цьому, що n_1, n_2 вибрані так, що знайдеться такий номер n_3, для якого $n_1 < n_3 < n_2$ і $\|y_{n_3}\| > M$. З (21.13) маємо, що $y_{n_1} \leq y_{n_3} \leq y_{n_2}$. Застосуємо лему 21.1 до цих елементів і одержимо оцінку

$$\|y_{n_3}\| \leq \|y_{n_1}\| + \|y_{n_2}\| \leq 2M.$$

Таким чином, в усякому разі, послідовність $\{y_n\}$ обмежена за нормою деяким числом $M_2 = \max\{M_1, 2M\}$. Цілком правильна напівупорядкованість E дає підставу твердити, що існує границя x^* монотонно неспадної обмеженої за нормою послідовності $\{y_n\}$. Отже,

$$0 \leq u = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_n \leq \ldots \leq x^*,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x^*.$$

Враховуючи, що послідовності $\{y_n\}$ та $\{Fy_{n-1}\}$ тотожно співпадають, маємо підставу твердити, що $x^* = Fx^*$, тобто, що x^* є розв'язком рівняння (21.3). Таким чином, оскільки правдива також нерівність (21.13), теорему доведено.

Зауваження 21.1. *В умовах теореми не фігурує вимога про неперервність оператора F.*

Зауваження 21.2. *Замінимо умову 3) теореми умовою: 3а) заданий елемент $v \in E$, для якого*

$$v \geq Fv. \tag{21.14}$$

Замість ітерацій (21.11) розглядатимемо ітерації

$$z_0 = v, \ \ z_{n+1} = Fz_n \ \ (n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{21.15}$$

За цих припущень, зберігаючи інші умови теореми 21.1 незмінними, можна отримати її аналог, у твердженнях якого замість послідовності $\{y_n\}$ фігурує послідовність $\{z_n\}$, а нерівність (21.12) треба замінити нерівністю

$$x^* \leq v. \tag{21.16}$$

Зауваження 21.3. *Якщо в умові A справджуєтъся сильніша за (21.7) нерівність*

$$\|Fx\| < \|x\| \quad \textit{при} \quad \|x\| \geq M \quad (x \in E), \tag{21.17}$$

то всякий розв'язок $x \in E$ рівняння (21.3) належать до множини $B = \{x|\, \|x\| < M, x \in E\}$.

Справді, припускаючи протилежне, тобто, що для якогось розв'язку $x \in E$ рівняння (21.3) маємо $\|x\| \geq M$, з (21.3) і (21.17) отримаємо

$$\|x\| = \|Fx\| < \|x\|,$$

що неможливо.

Зауваження 21.4. *Якщо F – цілком неперервний оператор, а E – банахів простір (не конче напівупорядкований), то однієї умови A* *досить, аби пересвідчитися в існуванні бодай одного розв'язку $x \in E$ рівняння (21.3).*

Переконуємося у цьому за допомогою такого міркування. Умова А означає, що оператор F перетворює кулю $S(M) \in E$ в компактну, отже, й обмежену множину B_1. Якщо вибрати число $M_1 > M$ настільки великим, щоб куля $S(M_1)$ з радіусом M_1 містила обидві множини $S(M)$ та B_1, то з умови А випливатиме, що оператор F перетворює множину $S(M_1)$ в себе. Тому до рівняння (21.3) застосовний принцип Шаудера, що й доводить потрібне твердження.

За виконання умов теореми 21.1 нема підстав твердити про існування нижнього y^* або верхнього z^* розв'язків рівняння (21.3).

Теорема 21.2. *Простір E будемо вважати KN-простором обмежених елементів, неперервний оператор F– ізотонним. Припустимо, що справджується підсилений варіант умови А з нерівністю (21.17) замість нерівності (21.7). Тоді рівняння (21.3) має в E нижній розв'язок y^* та верхній розв'язок z^*.*

Доведення. Якщо e – одиниця в KN-просторі обмежених елементів, а y – який-небудь елемент з Е, для якого маємо $\|y\| \geq M$, то $\|y\| \cdot e \geq Me$. Позначимо $a = Me$. Очевидно,

$$-a \leq a. \tag{21.18}$$

Оскільки $\|a\| = \|-a\| = M$, то $\|Fa\| < \|a\|$, $\|F(-a)\| < \|a\|$. Тому

$$\begin{aligned} |Fa| &= \|Fa\| \cdot e \leq \|a\| \cdot e = Me = a, \\ |F(-a)| &= \|F(-a)\| \cdot e \leq \|a\| \cdot e = Me = a. \end{aligned}$$

Отже,

$$-a \leq |F(-a)| \leq a, \quad -a \leq |Fa| \leq a, \tag{21.19}$$

зокрема,

$$-a \leq F(-a), \quad Fa \leq a. \tag{21.20}$$

Тут ми скористалися з того, що оператор Fx означений у всьому просторі Е. Отже, справджується умова А з $u = -a$ та нерівність (21.14) з $v = a$. Тому можна звернутися до теореми 21.1 та до зауваження 21.2, щоб зробити висновок про існування в Е розв'язку y^* рівняння (21.3), до якого монотонно збігається послідовність $\{y_n\}$, та розв'язку z^*, до якого монотонно збігається послідовність $\{z_n\}$. При цьому

$$u = -a \le y^*, \ \ v = a \ge z^*, \ \ y^* \le z^*,$$

що можна довести, скориставшись з принципу індукції. Отже,

$$-a \le y^* \le z^* \le a. \tag{21.21}$$

Переконаємося, що y^* – нижній, а z^* – верхній розв'язки рівняння (21.3). Нехай x – який-небудь розв'язок в Е рівняння (21.3). Якщо для нього маємо $\|x\| \ge M$, то з (21.17) отримаємо $\|x\| = \|Fx\| < \|x\|$. Отже, неможливо, щоб $\|x\| \ge M$. Тому для всякого розв'язку $x \in E$ рівняння (21.3) конче правдива нерівність $\|x\| < M$. Завдяки визначенню елемента $a = Me$ матимемо $x \in [-a, a] = \{x | -a \le x \le a, \ x \in E\}$. Таким чином, якщо x – розв'язок рівняння (21.3) в Е, то $x \in [-a, a]$. Залишається підтвердити, що $y^* \le x \le z^*$. Це можна легко отримати, скориставшись з принципу індукції та співвідношень

$$y_n \le y_{n+1} \le x \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0, \ 1, \ \ldots),$$

бо $u = -a$, $v = a$. Тому можна вважати теорему доведеною.

Зауваження 21.5. *Для рівняння (21.3) деколи доцільно мати на увазі ситуацію, за якої замість всього простору E маємо справу з його деякою підмножиною E_1. Наприклад, для рівняння (21.1) з $\alpha = \frac{p}{2q} < 1$ для взаємно простих p, q на роль множини E_1 можна взяти конус K додатних елементів цілком правильно напівупорядкованого простору $E = L_2(0,1)$ функцій інтегровних на $(0,1)$ з квадратом за Лебегом. Для цього прикладу переформулювання двох попередніх теорем є тривіальною справою, подробиці якої пропускаємо.*

Розглянемо випадок антитонного оператора F, тобто, вважатимемо, що при $y \le z$, $y, z \in E$ маємо $Fy \ge Fz$. Позначимо через $\|y, z\|$ норму пари (y, z) елементів з Е, яку означимо таким способом, щоб: а) справджувалися співвідношення $\|y\| \le \|y, z\|$, $\|z\| \le \|y, z\|$ для всяких $y, z \in E$; б) норма $\|y, z\|$ була монотонною при запровадженні в $E \times E$ напівупорядкованості пар елементів (y, z), породженої тим чи іншим способом напівупорядкованістю в

E. Цих вимог можна дотриматись, якщо норму $\|y,z\|$ запровадити, наприклад, за однією із формул

$$\|y,z\| = \max\{\|y\|, \|z\|\}, \tag{21.22}$$

$$\|y,z\| = (\|y\|^p + \|z\|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1), \tag{21.23}$$

а напівупорядкованість пар (y,z) означити, наприклад, так: $(y,z) \leq (u,v)$ при $y \leq u$, $z \leq v$, або $(y,z) \leq (u,v)$ при $y \leq u$, $z \geq v$. Як можна переконатися, за такої напівупорядкованості $E \times E$ буде цілком правильно напівупорядкованим простором і структурою, якщо ці властивості має E.

Теорема 21.3. *Нехай: 1) E – цілком правильно напівупорядкований простір і структура; 2) неперервний оператор F є антитонним і справджується припущення, яке назвемо умовою A_1: існує таке дійсне число $M > 0$, що з нерівності $\|y,z\| > M$ випливає нерівність*

$$\|Fy, Fz\| \leq \|y,z\|; \tag{21.24}$$

3) існують елементи $u, v \in E$, для яких

$$u \leq Fv, \quad v \geq Fu; \tag{21.25}$$

4) система рівнянь

$$y = Fz, \;\; z = Fy \tag{21.26}$$

може мати щонайбільше один розв'язок в $E \times E$; 5) рівняння (21.3) має в E бодай один розв'язок. Тоді для єдиного розв'язку $x^* \in E$ рівняння (21.3) мають місце оцінки

$$y_0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_n \leq \ldots \leq x^* \leq \ldots \leq z_n \leq \ldots \leq z_1 \leq z_0,$$

де послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ утворені за допомогою формул

$$y_{n+1} = Fz_n, \quad z_{n+1} = Fy_n \tag{21.27}$$

з початковими наближеннями $y_0 = u$, $z_0 = v$ і ці послідовності збігаються до x^* за нормою в E.

Доведення. З антитонності оператора F та співвідношень (21.25) – (21.27) можна отримати

$$y_0 \le Fz_0 = y_1, \quad z_1 = Fy_0 \le z_0.$$

Тому

$$y_2 = Fz_1 \ge Fz_0 = y_1, \quad z_2 = Fy_1 \le Fy_0 = z_1. \tag{21.28}$$

Отже, принцип індукції дозволяє вважати обґрунтованими нерівності

$$\begin{aligned} &y_0 \le y_1 \le \ldots \le y_n \le y_{n+1} \le \ldots, \\ &z_0 \ge z_1 \ge \ldots \ge z_n \ge z_{n+1} \ge \ldots. \end{aligned} \tag{21.29}$$

Переконаємося, що послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ обмежені за нормою. Якби, принаймні починаючи з якогось $n = N \ge 0$, ми мали

$$\|y_n, z_n\| \le M, \tag{21.30}$$

то теорема була б доведеною, бо в такому разі послідовність $\{(y_n, z_n)\}$ обмежена за нормою, отже, були б обмеженими послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$. Проте, можлива ситуація, що який не був би номер $N > 0$, знайдеться таке $n > N$, що

$$\|y_n, z_n\| > M. \tag{21.31}$$

Доцільно виокремити два випадки цієї ситуації. В першому з них знайдеться не більше за скінченну кількість членів послідовності $\{(y_n, z_n)\}$, для яких $\|y_n, z_n\| \le M$. Тоді, починаючи з деякого номера $n = N$, будемо мати (21.31). Завдяки (21.27) та умові A_1 для таких n отримуємо

$$\|y_{N+1}, z_{N+1}\| = \|Fz_N, Fy_N\| \le \|z_N, y_N\|.$$

Якщо уже знайдено, що

$$\|y_{N+k}, z_{N+k}\| \le \|y_{N+k-1}, z_{N+k-1}\| \quad (k \ge 1),$$

то з (21.31), (21.27) і умови A_1 випливає

$$\|y_{N+k+1}, z_{N+k+1}\| = \|Fy_{N+k}, Fz_{N+k}\| \le \|y_{N+k}, z_{N+k}\|.$$

Це, на підставі принципу індукції, означає, що мають місце співвідношення

$$\|y_N, z_N\| \geq \|y_{N+1}, z_{N+1}\| \geq \ldots \geq \|y_{N+k}, z_{N+k}\| \geq \ldots$$

Отже, прийнявши

$$B = \{\, (y,z) |\, \|y,z\| \leq \sup \|y_n, z_n\|\,, \;\; y,z \in E\}\,,$$

маємо, що послідовність $\{(y_n, z_n)\}$ обмежена в скінченній області $B \subset E \times E$.

У другому із можливих випадків припускатимемо існування нескінченої кількості членів послідовності $\{(y_n, z_n)\}$ для яких правдиві співвідношення (21.30) і одночасне існування безлічі членів цієї послідовності, для яких співвідношення (21.30) є хибними, тобто, правдиві нерівності (21.31). Це означає, що таку ж властивість має бодай одна із послідовностей $\{y_n\}$ або $\{z_n\}$. Тобто, існує безліч членів, наприклад, послідовності $\{y_n\}$,для яких $\|y_n\| \leq M$ та безліч її членів, для яких $\|y_n\| > M$. Виберемо які-небудь n_1 та n_2, для яких $\|y_{n_1}\| \leq M$, $\|y_{n_2}\| \leq M$. Якщо знайдеться таке n_3, що $n_1 < n_3 < n_2$ і $\|y_{n_3}\| > M$, то з (21.29) отримаємо $y_{n_1} \leq y_{n_3} \leq y_{n_2}$. Тому можна застосувати лему 21.1 і одержати

$$\|y_{n_3}\| \leq \|y_{n_1}\| + \|y_{n_2}\| \leq 2M. \tag{21.32}$$

Довільність вибору n_1, n_2, n_3 та нерівності (21.32) служить підставою для твердження про обґрунтованість нерівності $\|y_n\| \leq 2M$ для всіх n чи бодай для всіх n, починаючи з якогось $n_0 > 0$. Цим підтверджено, що послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ обмежені за нормою. Оскільки вони монотонні, а простір E – цілком правильно напівупорядкований, то послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ збігаються за нормою в E відповідно до своїх границь y^* і z^*. Крім того, послідовність $\{y_n\}$ співпадає з послідовністю $\{Fz_{n-1}\}$, а послідовність $\{z_n\}$ – з послідовністю $\{Fy_{n-1}\}$. Звідси випливає, що y^*, z^* є компонентами розв'язку (y^*, z^*) системи (21.26). Існування розв'язку $x^* \in E$ рівняння (21.3) та єдиність розв'язку системи (21.26) є підставою для рівностей $y^* = z^* = x^*$. Цим доведення теореми можна завершити.

Для антитонного оператора F подібним способом можна одержати також відповідний аналог до теореми 21.2. Зауважимо, не вдаючись до подробиць щодо формулювання і доведення такого аналогу, що, як і теореми 21.1–21.3, його можна одержати як часткові випадки загальніших теорем з немонотонним оператором F.

Будемо розглядати рівняння (21.3) із, взагалі кажучи, немонотонним оператором F, для якого справджуються такі умови:

Умова Б. *Задані такі неспадні щодо* y *незростаючі щодо* z *оператори* $T_1(y,z)$, $T_2(y,z) : E \times E \to E$, *для яких мають місце рівності*

$$T_1(x,x) = T_2(x,x) = Fx \quad (x \in E)\,. \tag{21.33}$$

Умова A_0. *Існує таке число* $M > 0$, *що з нерівності* $\|y,z\| > M$ *випливає нерівність*

$$\|T_1(y,z)\,, T_2(y,z)\| \le \|y,z\|\,. \tag{21.34}$$

Умова В. *Якщо послідовність* $\{y_n\}$ *не спадає, а послідовність* $\{z_n\}$ *не зростає і* $y_n \to y^*$, $z_n \to z^*$, *то*

$$T_1(y_n, z_n) \to T_1(y^*, z^*)\,, \quad T_2(y_n, z_n) \to T_2(y^*, z^*)\,,$$

Умови А та A_1 є частковими випадками умови A_0.

Теорема 21.4. *Нехай: 1) справджуються умови* A_0, *Б, В; 2) при* $y, z \in E$ *має місце нерівність*

$$T_1(y,z) \le T_2(y,z)\,; \tag{21.35}$$

3) задані елементи $u, v \in E$, *для яких*

$$u \le T_1(u,v)\,, \quad v \ge T_2(v,u)\,; \tag{21.36}$$

4) система рівнянь

$$y = T_1(y,z)\,, \ \ z = T_2(z,y) \tag{21.37}$$

може мати щонайбільше один розв'язок; 5) рівняння (21.3) має в E бодай один розв'язок. Тоді для єдиного розв'язку $x^* \in E$ рівняння (21.3) мають місце оцінки

$$y_n \le y_{n+1} \le x^* \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,, \tag{21.38}$$

де послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ утворені за допомогою ітераційного алгоритму

$$y_{n+1} = T_1\left(y_n, z_n\right), \quad z_{n+1} = T_2\left(z_n, y_n\right) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{21.39}$$

з початковими наближеннями $y_0 = u$, $z_0 = v$. При цьому послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ збігаються до x^* за нормою в E.

Доведення. Скористаємося з тієї ж схеми міркувань, яка нам прислужилася при доведенні теорем 21.1 та 21.3. Очевидно, що $y_0 \le y_1$, $z_0 \ge z_1$. Припускаючи виконання нерівностей $y_{n-1} \le y_n$, $z_{n-1} \ge z_n$, можна знайти

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= T_1\left(y_n, z_n\right) \ge T_1\left(y_{n-1}, z_{n-1}\right) = y_n, \\ z_{n+1} &= T_1\left(z_n, y_n\right) \ge T_1\left(z_{n-1}, y_{n-1}\right) = z_n. \end{aligned}$$

Тому за принципом індукції вважаємо підтвердженими нерівності (21.29) для алгоритму (21.39). З них і з умови A_0 можна отримати висновок про обмеженість за нормою послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, майже повторивши відповідну частину обгрунтування теореми 21.3, яке стосується можливих двох нетривіальних ситуацій щодо припущення про безліч тих членів послідовності $\{(y_n, z_n)\}$, для яких правдива нерівність (21.31). У першому випадку, коли, починаючи з $n = N$, всі члени послідовності $\{(y_n, z_n)\}$ задовольняють (21.31), при переході від нерівності $\|y_{N+k}, z_{N+k}\| \le \|y_{N+k-1}, z_{N+k-1}\|$ до тієї ж нерівності з заміною k на $k+1$, знайдемо

$$\begin{aligned} \|y_{N+k+1}, z_{N+k+1}\| = \|T_1\left(y_{N+k}, z_{N+k}\right), T_2\left(y_{N+k}, z_{N+k}\right)\| \le \\ \le \|y_{N+k}, z_{N+k}\|\,. \end{aligned}$$

Щодо до другого можливого випадку про нескінчену кількість елементів послідовності $\{(y_n, z_n)\}$, для яких справджуються нерівності (21.32) та одночасно нескінченну кількість її членів, для котрих замість (21.31) маємо (21.32), то розгляд його вичерпується з цілковитою ідентичністю до відповідної ситуації у доведенні теореми 21.3. Остаточно справа зводиться до того, що всі члени послідовності $\{(y_n, z_n)\}$ обмежені одночасно щонайбільше числом $2M$. Наслідком цих міркувань є висновок про існування границь $y^* \in E$ послідовності $\{y_n\}$ та $z^* \in E$ послідовності $\{z_n\}$, з чого випливає також, що (y^*, z^*) – розв'язок системи (21.37). З іншого боку, існування розв'язку $x^* \in E$ рівняння (21.3) і рівності (21.33) означають, що (x^*, x^*) – розв'язок системи (21.37). Оскільки система (21.37) може мати тільки один розв'язок в $E \times E$, то очевидним стають рівності $y^* = z^* = x^*$. Співвідношення (21.38) випливають з (21.29) і з монотонної збіжності до x^* кожної із послідовностей $\{y_n\}$ і $\{z_n\}$. Теорему доведено.

Припущення (21.33) можна замінити загальнішим. Замінимо умову Б іншою.

Умова Б_0. *Задані неспадні щодо y, незростаючі щодо z оператори $T_1(y,z), T_2(y,z) : E \times E \to E$, для яких правдиві співвідношення*

$$T_1(x,x) \leq Fx \leq T_2(x,x) \quad (x \in E). \tag{21.40}$$

Теорема 21.5. *Нехай: 1) виконані умови А_0, Б_0, В; 2) справджуються припущення 2)–5) теореми 21.4. Тоді для всякого розв'язку $x^* \in E$ рівняння (21.3) матимемо оцінки (21.38), де послідовності $\{y_n\}$ і $\{z_n\}$, утворені за допомогою ітераційного процесу (21.39) із $y_0 = u$, $z_0 = v$. Крім того, послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ монотонно збігаються до компонент y^*, z^* відповідно розв'язку (y^*, z^*) системи (21.37) і при цьому*

$$u \leq y^* \leq x^* \leq z^* \leq v. \tag{21.41}$$

Доведення. Насамперед переконаємося, що з існування розв'язку $x^* \in E$ рівняння (21.3) випливає існування розв'язку (φ, ψ) системи (21.37) в $E \times E$. Якщо умова Б_0 співпадає з умовою Б, то цей факт стає очевидним, бо нерівності (21.40) стають рівностями (21.33). Для доведення приймемо

$$\varphi_0 = \psi_0 = x^*, \tag{21.42}$$

$$\varphi_{n+1} = T_1(\varphi_n, \psi_n), \quad \psi_{n+1} = T_2(\psi_n, \varphi_n) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{21.43}$$

де x^* – розв'язок рівняння (21.3). Співвідношення (21.40) і ізотонність щодо y та антитонність щодо z операторів $T_1(y,z)$, $T_2(y,z)$ призводять до нерівностей

$$\begin{aligned} &\varphi_0 \geq \varphi_1 \geq \ldots \geq \varphi_n \geq \varphi_{n+1} \geq \ldots, \\ &\psi_0 \leq \psi_1 \leq \ldots \leq \psi_n \leq \psi_{n+1} \leq \ldots \end{aligned} \tag{21.44}$$

Можна далі використати схему міркувань, вжиту для доведення збіжності послідовностей $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ при обгрунтуванні теореми 21.4. В результаті одержимо висновок про існування границь φ та ψ відповідно послідовностей $\{\varphi_n\}$ та $\{\psi_n\}$, причому (φ, ψ) є розв'язком системи (21.37) і $\varphi_n \downarrow \varphi$, $\psi_n \uparrow \psi$, а також

$$\varphi \leq x^* \leq \psi. \tag{21.45}$$

Крім того, для послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, утворених за допомогою формул (21.39) з $y_0 = u$, $z_0 = v$, можна цілком повторити відповідні міркування з доведення теореми 21.4 і отримати ті самі висновки щодо y^*, z^* як компонент розв'язку (y^*, z^*) системи рівнянь (21.37) та про нерівності (21.29). Єдиність розв'язку системи (21.37) означає, що можна ідентифікувати: $\varphi = y^*$, $\psi = z^*$. Отже, спираючись на (21.45), отримуємо висновок про правдивість всіх тверджень теореми, зокрема, співвідношень (21.41). Теорему доведено.

Теорема 21.6. *Нехай: 1) E є KN-простором обмежених елементів і в $E \times E$ норму запроваджено за формулою (21.22); 2) справджуються умови $Б_0$ та A_0; 3) якщо $y \leq z \quad (y, z \in E)$, то $T_1(y,z) \leq T_2(z,y)$. Тоді існує крайній в $E \times E$ розв'язок (y^*, z^*) системи (21.37), компоненти якого належать до деякого відрізку $[-a, a] \subset E$, і для всякого розв'язку $x^* \in E$ рівняння (21.3) матимемо співвідношення*

$$-a \leq x^* \leq a,$$

та

$$y^* \leq x^* \leq z^*.$$

Зауваження 21.3 дозволяє зробити висновок, що $(y^*, z^*) \in D = \{(y,z) |\, \|y, z\| < M,\ y, z \in E\}$. Якщо e – одиниця простору E обмежених елементів, то згідно із зауваженням 21.3 будемо мати

$$|y| \le \|y\|\, e \le \|y,z\|\, e \le Me,$$
$$|z| \le \|z\|\, e \le \|y,z\|\, e \le Me.$$

Позначивши $Me = a$ і враховуючи очевидну нерівність $-a \le a$, формулу (21.22) та визначення області D, будемо мати

$$|T_1(-a,a)| \le \|T_1(-a,a), T_2(a,-a)\|\, e \le \|-a,a\|\, e = Me = a,$$
$$|T_2(a,-a)| \le \|T_1(-a,a), T_2(a,-a)\|\, e \le \|-a,a\|\, e = Me = a.$$

Звідси

$$-a \le T_1(a,-a), \quad a \ge T_2(a,-a). \tag{21.46}$$

За цієї ситуації можна зробити висновок про існування крайнього на відрізку $[-a,a]$ розв'язку системи (21.37). Пропускаючи подробиці доведення існування цього крайнього розв'язку, зауважимо тільки, що задля цього досить скористатися ітераціями (21.39) з $y_0 = -a$, $z_0 = a$. Зважаючи на те, що всякий розв'язок (y^*, z^*) в $E \times E$ системи (21.37) мусить мати компоненти y^*, z^* з відрізка $[-a,a]$ завдяки зауваженню 21.3, одержуємо висновок про те, що (y^*, z^*) – крайній в E розв'язок системи (21.7). Інші висновки теореми випливають з доведеного факту й тому вважаємо теорему доведеною.

Зауваження 21.6. *Якщо $T_1(y,z)$, $T_2(y,z)$ не залежать від z, вважаючи, що в (21.40) маємо рівності, з теореми 21.5 випливає теорема 21.1, а з теореми 21.6 випливає теорема 21.2. В тому випадку, коли $T_1(y,z)$, $T_2(y,z)$ не залежать від y, а (21.40) є рівностями, з теореми 21.5 отримуємо теорему 21.3, а з теореми 21.6 відповідний аналог цієї теореми для рівняння 21.3 з антитонним оператором F. Зазначимо, що в тому разі, коли $T_1(y,z)$, $T_2(y,z)$ не залежать від y або від z, з теорем 21.5 і 21.6 отримуються дещо загальніші, наприклад, за теореми 21.1–21.3 твердження, якщо (21.40) не конче мусять бути рівностями.*

Теорема 21.7. *Нехай: 1) справджуються умови $Б_0$, В; 2) задані лінійні додатні щодо $w \in E$, неспадні за y, незростаючі за z оператори $A_1(y,z)\,w$, $A_2(y,z)\,w$, для яких при $x,y,z \in E$ будемо мати*

$$\begin{aligned} -A_1(z,y)(z-y) &\le T_1(z,x) - T_1(y,x), \\ T_2(x,z) - T_2(x,y) &\le A_2(z,y)(z-y), \end{aligned} \tag{21.47}$$

причому існує таке $M > 0$, що з нерівності $\|z, y\| \geq M$ випливає нерівність

$$\begin{aligned} &\|T_1(y,z) - (A_1(z,y) + A_2(z,y))(z-y), T_2(y,z) + \\ &\quad + (A_1(z,y) + A_2(z,y))(z-y)\| \leq \|z,y\|; \end{aligned} \tag{21.48}$$

3) задані $u, v \in E$, для яких

$$\begin{aligned} &u \leq -(A_1(v,u) + A_2(v,u))(v-u) + T_1(u,v), \\ &v \geq (A_1(v,u) + A_2(v,u))(v-u) + T_2(v,u); \end{aligned} \tag{21.49}$$

4) система рівнянь

$$\begin{aligned} &y = -(A_1(z,y) + A_2(z,y))(z-y) + T_1(y,z), \\ &z = (A_1(z,y) + A_2(z,y))(z-y) + T_2(z,y) \end{aligned} \tag{21.50}$$

може мати в $E \times E$ не більше за один розв'язок. Тоді, якщо розв'язок $x^* \in E$ рівняння (21.3) існує, то він єдиний і до нього збігаються відповідно не зростаючи і не спадаючи послідовності $\{y_n\}$ і $\{z_n\}$, утворені за допомогою ітераційного процесу

$$y_0 = u, \quad z_0 = v, \tag{21.51}$$

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = -(A_1(z_n,y_n) + A_2(z_n,y_n))(z_n-y_n) + T_1(y_n,z_n), \\ &z_{n+1} = (A_1(z_n,y_n) + A_2(z_n,y_n))(z_n-y_n) + T_2(z_n,y_n). \end{aligned} \tag{21.52}$$

Крім того, справджуються оцінки (21.38).

Доведення. Перевірка монотонності послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ практично співпадає з доведенням відповідних фактів у §§19, 20. Ті міркування, які стосуються обмеженості за нормою цих послідовностей, фактично повторюють відповідні міркування з доведення теореми 21.4. Тому $y_n \uparrow y^*$, $z_n \downarrow z^*$ $(y^*, z^* \in E)$, причому (y^*, z^*) є розв'язком системи (21.50). Оскільки той факт, що x^* є розв'язком рівняння (21.3), означає, що (x^*, x^*) є розв'язком системи (21.50). Ця система може мати не більше ніж один розв'язок, то можна зробити висновок, що всі твердження теореми 21.7 обгрунтовані. Теорему доведено.

Теорема 21.8. *Нехай: 1) E є KN-простором обмежених елементів і в $E \times E$ норму запроваджено за формулою (21.22); 2)* *справджуються умови $Б_0$ і $В$ та умова 2) теореми 21.7. Тоді існує крайній в $E \times E$ розв'язок (y^*, z^*) системи (21.50), компоненти якого належать до деякого відрізка $[-a, a] \subset E$ і для всякого розв'язку $x^* \in E$ рівняння (21.3) правдиві нерівності $-a \leq x^* \leq a$, та $y^* \leq x^* \leq z^*$.*

Доведення лише незначними подробицями відрізняється від доведення теореми 21.6.

Зауваження 21.7. *Частковий випадок, у якому $T_1(y, z)$, $T_2(y, z)$ є цілком неперервним оператором, є одним з прикладів, для якого існування розв'язку $x^* \in E$ рівняння (21.3) можна забезпечити тільки однією умовою A_0. Обгрунтування цього твердження зводиться до того, що у цьому випадку оператор, породжений правою частиною системи (21.37) перетворює деяку кулю S радіуса M з $E \times E$ у компактну в $E \times E$ множину D. Виберемо число $M_1 > M$ настільки великим, щоб куля $S_1 \subset E \times E$ радіуса M_1 містила як кулю S, так і компактну і тому обмежену множину D_1. Отже, виходить, що оператор, породжений правою частиною системи (21.37), перетворює кулю S саму в себе. Тому застосовний принцип нерухомої точки Шаудера. Однак і для цього випадку наведені в цьому параграфі теореми мають певний інтерес, бо гарантують збіжність деяких ітераційних процесів до розв'язку рівняння (21.3), тобто, містять конструкції, які не отримуються безпосередньо з принципу Шаудера.*

Приклад 21.1. Для рівняння

$$x(t) = c + \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, x^{\gamma}(s)\, ds \quad (0 \leq \gamma \leq 1) \tag{21.53}$$

з неперервною дійсною функцією $\beta(t)$ справджується умова (21.7)при всяких c і $\beta(t) \geq 0$, для $0 \leq \gamma < 1$. Якщо $\gamma = 1$, то умова (21.7) справджується за певних очевидних застережень, які, наприклад, при $\beta(t) \in C[t_0, t_0 + T]$ означають, що

$$T \max_{t \in [t_0, t_0 + T]} \beta(t) \leq 1.$$

Тому для рівняння (21.53) застосовна теорема 21.1 з оператором

$$Fx = c + \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, x^{\gamma}(s)\, ds.$$

При цьому

$$x^*(t) = \left(c + \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, ds \right)^{-1+\gamma}$$

для $\gamma \in [0, 1)$,

$$x^*(t) = ce^{\int\limits_{t_0}^{t} \beta(s) ds}$$

для $\gamma = 1$.

Зауваження 21.8. *Якщо нерівність (21.34) в умовах теореми 21.4 є строгою нерівністю, тобто, існує дійсне число* $M > 0$*, для якого з нерівності* $\|y, z\| > M$ *випливає нерівність*

$$\|T_1(y, z), T_2(y, z)\| < \|y, z\|, \tag{21.54}$$

то можна стверджувати, що всякий розв'язок $(y, z) \quad (y, z \in E)$ *системи (21.37) належить до області*

$$D = \{ (y, z) |\, \|y, z\| < M \}. \tag{21.55}$$

Справді, якби це було не так, тобто, якби знайшовся такий розв'язок $(y, z) \quad (y, z \in E)$, що $\|y, z\| > M$, то для нього завдяки (21.54) отримуємо неможливу нерівність $\|y, z\| < \|y, z\|$, оскільки в такому разі

$$\|y, z\| = \|T_1(y, z), T_2(y, z)\| < \|y, z\|.$$

Очевидно, що у зауваженні 21.3 йдеться про частинний випадок з наведеного зауваження, й очевидно також, що це зауваження можна відповідно поширити й на інші випадки, що розглядалися в цьому параграфі, наприклад, на ситуацію, пов'язану з умовами теореми 21.7.

Зауважимо, що термін “підлінійний оператор” деколи вживається в дещо іншому розумінні у порівнянні з тим, що вкладаємо тут у цей термін. Під підлінійними операторами маємо на увазі нелінійні оператори F, які мають властивість вигляду (21.4) з $\alpha \leq 1$ або одну із властивостей (21.7) чи (21.24).

РОЗДІЛ VIII. ДВОСТОРОННІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА ТА РІВНЯНЬ З УЗАГАЛЬНЕНОЮ ГЕТЕРОТОННІСТЮ

Результати §22 охоплюють відповідні результати із [57] (див. також [55, 56]). Не виокремлюємо випадки лінійних двосторонніх інтегральних нерівностей, оскільки вони докладно описані в [55, 57, 111, 113], а також в [125], де у вигляді окремого додатку наведено переклад статті [55]. Двосторонні нерівності з узагальненою гетеротонністю подані за [100]. §24 повністю присвячений конкретизації загальних теорем із попередніх параграфів цього розділу. Більшість наведених тут прикладів істотно узагальнюють відповідні інтегральні нерівності із [92], а частина з них близька до результатів, наведених в [57] (див. [57, стор. 144-156]).

§22. Двосторонні операторні і інтегральні нерівності вольтерівського типу

Операторним нерівностям з операторами Вольтерра, зокрема, інтегральним нерівностям належить важлива роль у багатьох галузях кількісної і якісної теорії інтегральних, диференціальних, функціонально-диференціальних та інших класів рівнянь. В теорії інтегральних нерівностей, наприклад, що стосуються оцінок розв'язків рівнянь вигляду

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s, x(s))\, ds, \tag{22.1}$$

однією з найважливіших вимог є, як відомо, припущення про монотонність функції $k(t, s, x)$ щодо x. М. В. Азбелєвим отримані деякі теореми про інтегральні нерівності, в умовах яких замість монотонності $k(t, s, x)$ за x використана слабкіша $L_1(L_2)$-умова Азбелєва (див., напр., [5]), яку деколи називають W-умовою Вальтера (див. бібліографію в [57]). Інший підхід до побудови теорем про двосторонні операторні нерівності використаний в [55-58]. Для двосторонніх оцінок розв'язків рівняння (22.1) можна скористатися з властивостей односторонньої і часткової ліпшицієвості оператора у правій частині (22.1), що можна розглядати як розвиток використаних в [5, 57] підходів у теорії операторних та інтегральних нерівностей з немонотонними операторами.

Доцільно розглядати дещо загальніше за (22.1) рівняння

$$x\,(t) = f\,(t) + K\,(t,x) \tag{22.2}$$

у просторі $C\,(E,[a,b])$ неперервних при $t \in [a,b]$ функцій із значеннями у напівупорядкованому банаховому просторі E. Вважатимемо, що $a,b \in R^N$, $a \leq b$, $[a,b] = \{t|\, a \leq t \leq b\}$ – відрізок в N-мірному евклідовому просторі R^N, у якому запроваджено напівупорядкованість природним способом, тобто, нерівність $a \leq b$ означає, що $a = \{a_1,\ldots,a_N\}$, $b = \{b_1,\ldots,b_N\}$, $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$ $\left(i = \overline{1,N}\right)$. Будемо вважати, що E – правильно напівупорядковано за допомогою тілесного конуса K_0. Використовуватимемо позначення $y \leq z$ при $z - y \in K_0$ та $y << z$ при $z - y \in intK_0$, де $intK_0$ – сукупність внутрішніх елементів конуса K_0. В R^N строгу нерівність $y < z$ будемо розуміти як сукупність строгих нерівностей $a_i < b_i$ $\left(i = \overline{1,N}\right)$.

Вважатимемо $K\,(t,x)$ оператором Вольтерра, тобто таким, що для всякого $t \in [a,b]$, $x = x(t) \in C(E,[a,b])$ кожній функції $x = x(t) \in C(E,[a,b])$ ставить у відповідність функцію, що приймає значення з E і має ту властивість, що при $x_i = x_i(t,s) \in C(E,[a,b])$ $(i = 1,2)$ з рівності $x_1\,(s) = x_2\,(s)$ для $s \in [a,b]$ випливає, що $K\,(t,x_1) = K\,(t,x_2)$ (див., напр., [6]).

Крім того, приймемо, що $K\,(t,x)$ є V_a-оператором, тобто, що $\lim\limits_{t\to a+0} K\,(t,x) = K\,(a,x) = \theta$ $(x \in E)$, θ – нульовий елемент в E. Поняття V_a-оператора запроваджено в [58] (див. також [57]) за ініціативою М. С. Курпеля. Операторами Вольтерра і V_a-операторами є, наприклад, оператори

$$K\,(t,x) = \int\limits_a^t k_1\,(t,s,x\,(s))\,ds, \tag{22.3}$$

$$K(t,x)=\int\limits_a^t k_1(t,s,x(s),x(\tau_1(s)))\,ds, \tag{22.4}$$

$$\begin{gathered}K(t,x)=\int\limits_a^t k_3(t,s,x(s),x(\tau_1(s)),\\ \int\limits_a^s k_2(s,\xi,x(\xi),x(\tau_2(\xi))\,d\xi))ds\end{gathered} \tag{22.5}$$

при $\tau_1(t) = t - \Delta_1(t)$, $\tau_2(t) = t - \Delta_2(t)$, $\Delta_1(t) \geq \theta_N$, $\Delta_2(t) \geq \theta_N$, де θ_N – нульовий вектор в R^N, якщо є неперервними за сукупністю аргументів функції $k, k_1, k_2, k_3, \tau_1, \tau_2$, і k, k_1, k_2, k_3 приймають значення із E.

Нехай задані такі неперервні за сукупністю аргументів оператори Вольтерра і V_a-оператори $T_1(t,y,z), T_2(t,y,z) : [a,b] \times E \times E \to E$, для яких при $t \in [a,b]$, $x \in E$ будемо мати

$$T_1(t,x,x) \leq K(t,x) \leq T_2(t,x,x). \tag{22.6}$$

Постулюємо такі припущення.

Умова А. *Задані неперервні за сукупністю аргументів оператори Вольтерра і V_a-оператори $A_i(t,z,y)\,w$, $B_i(t,z,y)\,w$ $(i = 1,\ 2)$, лінійні неперервні додатні як оператори щодо w, неспадні щодо z, незростаючі щодо y, для яких з нерівностей $y \leq z$ випливають нерівності*

$$-A_1(t,z,y)(z-y) \leq T_1(t,z,x) - T_1(t,y,x),$$

$$-A_2(t,z,y)(z-y) \leq T_2(t,z,x) - T_2(t,y,x),$$

$$T_1(t,x,z) - T_1(t,x,y) \leq B_1(t,z,y)(z-y),$$

$$T_2(t,x,z) - T_2(t,x,y) \leq B_2(t,z,y)(z-y)$$

при $t \in [a,b]$, $x, y, z \in E$.

Теорема 22.1. *Нехай: 1) справджується умова А; 2) функція $f(t) \in C(E,[a,b])$ задовольняє нерівності*

$$f_1(t) \leq f(t) \leq f_2(t) \quad (t \in [a,b]) \tag{22.7}$$

з функціями $f_1(t), f_2(t) \in C(E,[a,b])$*; 3) задані функції* $p(t), q(t) \in C(E,[a,b])$*, для яких при* $t \in [a,b]$ *правдиві нерівності*

$$\begin{aligned} p(t) &<< f_1(t) + T_1(t,p,q) - (A_1(t,q,p) + B_1(t,q,p))(q-p), \\ q(t) &>> f_2(t) + T_2(t,q,p) + (A_2(t,q,p) + B_2(t,q,p))(q-p). \end{aligned} \qquad (22.8)$$

Тоді для всякого розв'язку $x^*(t) \in C(E,[a,b])$ *рівняння (22.2) на* $[a,b]$ *мають місце оцінки*

$$p(t) << x^*(t) << q(t). \qquad (22.9)$$

Доведення. Позначимо через D множину точок з $(a;b]$, у яких за припущенням оцінки (22.9) не мають місця. Віддаль

$$d = \rho(a,D) = \inf_{t\in D} \rho(a,t), \qquad (22.10)$$

де $\rho(a,t)$ – віддаль між точками a і t в N-мірному векторному просторі R^N, задовольняє нерівність $d > 0$. Це випливає з неперервності функцій $p(t)$, $q(t)$, $x^*(t)$ й умови A та з того, що для $t = a$ завдяки (22.8) будемо мати

$$\begin{gathered} p(a) << f_1(a) + T_1(a,p,q) - (A_1(a,q,p) + B_1(a,q,p))(q-p) = \\ = f_1(a) \le f(a) = x^*(a) \le f_2(a) = \\ = f_2(a) + T_2(a,q,p) - (A_2(a,q,p) + B_2(a,q,p))(q-p) << q(a). \end{gathered}$$

Нехай $t_1 \in [a,b]$ – така точка, що при $t = t_1$ рівність (22.10) досягається, тобто $\rho(a,t_1) = d > 0$. Якщо таких точок, у яких досягається рівність (22.10), є кілька, то за t_1 візьмемо яку-небудь з них. Зрозуміло, що $t_1 \in D$, бо інакше було б $p(t_1) << x^*(t_1) << q(t_1)$ і за неперервністю знайшовся б окіл точки t_1, у якому $p(t) << x^*(t) << q(t)$. Тому при $t = t_1$ не могла б справджуватися рівність $\rho(a,D) = \rho(a,t_1)$. Таким чином, при $t = t_1$ порушене бодай одне із співвідношень (22.9) і замість них маємо лише співвідношення

$$p(t_1) \le x^*(t_1) \le q(t_1), \qquad (22.11)$$

оскільки з неперервності $p(t)$, $q(t)$, $x^*(t)$ для $t = t_1$ випливає

$$p(t_1) = \lim_{t\to t_1-0} p(t) \le \lim_{t\to t_1-0} x^*(t) \le \lim_{t\to t_1-0} q(t) = q(t_1).$$

Завдяки (22.2), (22.6), (22.8) та щойно отриманим співвідношенням одержуємо

$$\begin{aligned}
&p(t_1) << f_1(t_1) + T_1(t_1,p,q) - (A_1(t_1,q,p) + B_1(t,q,p))(q-p) \leq \\
&\leq f_1(t_1) + T_1(t_1,p,q) \leq f_1(t_1) + K(t_1,x^*) \leq f_2(t_1) + T_2(t_1,q,p) \leq \\
&\leq f_2(t_1) + T_2(t_1,q,p) + (A_2(t_1,q,p) + B_2(t_1,q,p))(q-p) << q(t_1),
\end{aligned}$$

бо з властивостей операторів A_i, B_i $(i = 1,\ 2)$ і зробленого припущення випливає, що $(A_1(t_1,q,p) + B_1(t_1,q,p))(q-p) \geq \theta$, $(A_2(t_1,q,p) + B_2(t_1,q,p))(q-p) \geq \theta$, де θ – нульовий елемент в E. Отримана суперечність з припущенням означає, що теорему доведено.

Надалі використовуватимемо деякі припущення, які зручно сформулювати як окремі умови.

Умова Б. *Нехай задані послідовності* $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ *неперервних при* $t \in [a,b]$ *функцій із значеннями в* E, *для яких справджується припущення про їх монотонність:* $y_n(t) \leq y_{n+1}(t)$ *та* $z_{n+1}(t) \geq z_n(t)$ *для* $n = 0,\ 1,\ \ldots$ *і* $t \in [a,b]$ *та припущення про їх обмеженість:* $y_n(t) \leq \bar{y}(t)$, $z_n(t) \geq \bar{z}(t)$ *для* $n = 0,\ 1,\ \ldots$ *і* $t \in [a,b]$, *де* $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ *– задані функції із* $C(E,[a,b])$. *Тоді послідовності* $\{u_n(t)\}$, $\{v_n(t)\}$, *утворені за формулами*

$$\begin{aligned}
u_n(t) &= f_1(t) + T_1(t,y_n,z_n) - (A_1(t,z_n,y_n) + B_1(t,z_n,y_n))(z_n - y_n), \\
v_n(t) &= f_2(t) + T_2(t,z_n,y_n) + (A_2(t,z_n,y_n) + B_2(t,z_n,y_n))(z_n - y_n),
\end{aligned}$$

компактні в $C(E,[a,b])$.

Умова В. *Якщо* $y, z \in E$, $t \in [a,b]$, *то*

$$T_1(t,y,z) \leq T_2(t,y,z). \tag{22.12}$$

Умова Б справджується, якщо $T_1, T_2, A_1, A_2, B_1, B_2$ є інтегральними операторами. Наприклад, якщо T_1, T_2 співпадають з операторами $K(t,x)$ вигляду (22.3), (22.4) або (22.5), причому функції k_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ не спадають щодо x і неперервні за сукупністю аргументів. В такому разі оператори A_i, B_i $(i = 1,\ 2)$ є нульовими операторами. Доведення цього можна знайти в [57].

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} y(t) &= f_1(t) + T_1(t, y, z) - (A_1(t, z, y) + B_1(t, z, y))(z - y), \\ z(t) &= f_2(t) + T_2(t, z, y) + (A_2(t, z, y) + B_2(t, z, y))(z - y). \end{aligned} \tag{22.13}$$

Лема 22.1. *Нехай справджуються умови А–В і функції $p(t), q(t) \in C(E, [a, b])$ при $t \in [a, b]$ задовольняють нерівності (22.8). Нехай, крім того, при $t \in [a, b]$, $y, z \in E$ правдиві нерівності*

$$A_1(t, z, y) \le A_2(t, z, y), \quad B_1(t, z, y) \le B_2(t, z, y).$$

Тоді система (22.13) має крайній в $C(E, [a, b])$ розв'язок $(y^*(t), z^*(t))$.

Доведення. З (22.8) за допомогою схожих до використаних для доведення теореми 22.1 міркувань можна знайти, що $p(t) << q(t)$ для $t \in [a, b]$. Це дає змогу, застосовуючи принцип індукції, довести обмеженість і монотонність послідовностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, побудованих за допомогою ітераційного процесу

$$y_0(t) = p(t), \quad z_0(t) = q(t), \tag{22.14}$$

$$\begin{aligned} & y_{n+1}(t) = f_1(t) + T_1(t, y_n, z_n) - \\ & - (A_1(t, z_n, y_n) + B_1(t, z_n, y_n))(z_n - y_n), \\ & z_{n+1}(t) = f_2(t) + T_2(t, z_n, y_n) + \\ & + (A_2(t, z_n, y_n) + B_2(t, z_n, y_n))(z_n - y_n). \end{aligned} \tag{22.15}$$

Як і при доведенні нерівностей (22.9) можна переконатися, що

$$\begin{aligned} & y_0(t) << y_1(t) \le \ldots \le y_n(t) \le y_{n+1}(t) \le \\ & \le z_{n+1}(t) \le z_n(t) \le \ldots \le z_1(t) << z_0(t). \end{aligned} \tag{22.16}$$

З умови Б випливає, що ці послідовності компактні в $C(E, [a, b])$. Це дає підставу для висновку про існування границь $y^*(t), z^*(t) \in C(E, [a, b])$ відповідно послідовностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$. Очевидно, що $(y^*(t), z^*(t))$ є розв'язком в $C(E, [a, b]) \times C(E, [a, b])$ системи (22.13). З (22.16) випливає також нерівність $y^*(t) \le z^*(t)$ для $t \in [a, b]$. Переконаємося, що $(y^*(t), z^*(t))$ є крайнім на відрізку $[p(t), q(t)]$ розв'язком системи (22.13). Справді. Якщо $(y(t), z(t))$ –

який-небудь розв'язок в $C(E,[a,b]) \times C(E,[a,b])$ цієї системи і $y(t), z(t) \in [p(t), q(t)]$, то можна підтвердити співвідношення

$$\begin{aligned} &y_n(t) \le y(t) \le z_n(t), \\ &y_n(t) \le z(t) \le z_n(t) \quad (t \in [a,b],\ n = 0, 1, \ldots). \end{aligned} \tag{22.17}$$

Для цього зауважимо спочатку, що з умови А, (22.8) і (22.14) отримаємо

$$\begin{aligned} y_0(t) << y_1(t) \le y(t) \le z_1(t) << z_0(t), \\ y_0(t) << y_1(t) \le z(t) \le z_1(t) << z_0(t). \end{aligned}$$

Припустивши, що

$$\begin{aligned} y_{n-1}(t) \le y_n(t) \le y(t) \le z_n(t) \le z_{n-1}(t), \\ y_{n-1}(t) \le y_n(t) \le z(t) \le z_n(t) \le z_{n-1}(t), \end{aligned}$$

знаходимо

$$\begin{gathered} y_{n+1}(t) - y_n(t) = f_1(t) + T_1(t, y_n, z_n) - (A_1(t, z_n, y_n) + \\ + B_1(t, z_n, y_n))(z_n - y_n) - f_1(t) - T_1(t, y_{n-1}, z_{n-1}) + \\ + (A_1(t, z_{n-1}, y_{n-1}) + B_1(t, z_{n-1}, y_{n-1}))(z_{n-1} - y_{n-1}) \ge \\ \ge (A_1(t, z_{n-1}, y_{n-1}) + B_1(t, z_{n-1}, y_{n-1}))(z_{n-1} - y_{n-1}) - \\ -(A_1(t, z_n, y_n) + B_1(t, z_n, y_n))(z_n - y_n) - \\ -A_1(t, y_n, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) - B_1(t, z_{n-1}, z_n)(z_{n-1} - z_n) \ge \\ \ge A_1(t, z_{n-1}, y_{n-1})(z_{n-1} - z_n) + B_1(t, z_{n-1}, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) \ge \theta, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} z_n(t) - z_{n+1}(t) = f_2(t) + T_2(t, z_{n-1}, y_{n-1}) + \\ + (A_2(t, z_{n-1}, y_{n-1}) + B_2(t, z_{n-1}, y_{n-1}))(z_{n-1} - y_{n-1}) - f_2(t) - \\ -T_2(t, z_n, y_n) - (A_2(t, z_n, y_n) + B_2(t, z_n, y_n))(z_n - y_n) \ge \\ \ge (A_2(t, z_{n-1}, y_{n-1}) + B_2(t, z_{n-1}, y_{n-1}))(z_{n-1} - y_{n-1}) - \\ - (A_2(t, z_n, y_n) + B_2(t, z_n, y_n))(z_n - y_n) - \\ -A_2(t, z_{n-1}, z_n)(z_{n-1} - z_n) + B_2(t, y_n, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) \ge \\ \ge A_2(t, z_{n-1}, y_{n-1})(y_n - y_{n-1}) + B_2(t, z_{n-1}, y_{n-1})(z_{n-1} - z_n) \ge \theta, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} y(t) - y_{n+1}(t) = f_1(t) + T_1(t, y, z) - (A_1(t, z, y) + \\ + B_1(t, z, y))(z - y) - f_1(t) - T_1(t, y_n, z_n) + \\ + (A_1(t, z_n, y_n) + B_1(t, z_n, y_n))(z_n - y_n) \ge \\ \ge (A_1(t, z_n, y_n) + B_1(t, z_n, y_n))(z_n - y_n) - \\ - (A_1(t, z, y) + B_1(t, z, y))(z - y) - \\ -A_1(t, y, y_n)(y - y_n) - B_1(t, z_n, z)(z_n - z) \ge \\ \ge A_1(t, z_n, y_n)(z_n - z) + B_1(t, z_n, y_n)(y - y_n) \ge \theta, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
z_{n+1}(t) - y(t) = f_2(t) + T_2(t, z_n, y_n) + \\
+ (A_2(t, z_n, y_n) + B_2(t, z_n, y_n))(z_n - y_n) - f_1(t) - \\
-T_1(t, z, y) - (A_1(t, z, y) + B_1(t, z, y))(z - y) \geq \\
\geq (A_2(t, z_n, y_n) + B_2(t, z_n, y_n))(z_n - y_n) - \\
- (A_2(t, z, y) + B_2(t, z, y))(z - y) - \\
-A_2(t, z_n, z)(z_n - z) - B_2(t, y, y_n)(y - y_n) \geq \\
\geq A_2(t, z_n, y_n)(y_n - y) + B_2(t, z_n, y_n)(z_n - z) \geq \theta.
\end{gathered}$$

Отже, $y_n(t) \leq y_{n+1}(t) \leq y(t) \leq z_{n+1}(t) \leq z_n(t)$. Подібним способом отримуються для $t \in [a, b]$ нерівності

$$y_n(t) \leq y_{n+1}(t) \leq z(t) \leq z_{n+1}(t) \leq z_n(t).$$

Цим з покликанням на принцип індукції підтверджуються нерівності (22.17), а отже, й нерівності

$$y^*(t) \leq y(t) \leq z^*(t), \quad y^*(t) \leq z(t) \leq z^*(t),$$

котрі й означають, що $(y^*(t), z^*(t))$ є крайнім на відрізку $[p(t), q(t)]$ розв'язком системи (22.13). Залишається переконатися, що $(y^*(t), z^*(t))$ є крайнім розв'язком цієї системи в усьому просторі $C(E, [a, b])$. Для цього досить звернути увагу на те, що для всякого розв'язку $(y(t), z(t))$ системи (22.13) із співвідношень $y(t), z(t) \in C(E, [a, b])$ можна отримати завдяки (22.8) та умовам A та B, що $y(t), z(t) \in [p(t), q(t)]$. Лему доведено.

Лема 22.2. *Нехай справджуються умови A–B. Знайдеться такий N-мірний вектор $b_1 \in (a; b]$, (тобто, $a < b_1 \leq b$), що в $C(E, [a, b_1])$ існує крайній розв'язок системи (22.13).*

Доведення. Функції $p(t)$, $q(t)$, означені за формулами

$$p(t) = f_1(t) - w_0, \quad q(t) = f_2(t) + w_0 \tag{22.18}$$

з будь-якими внутрішнім елементом w_0конуса K_0 задовольняють нерівності (22.8) принаймні при $t = a$. За неперервністю знайдеться $b_1 > a$, при якому матимемо нерівності (22.8) для $t \in [a, b_1]$. На $[a, b_1]$ можна застосувати лему 22.1. Тому доведення леми 22.2 завершене.

Переходячи до нестрогих нерівностей зазначимо, що в умовах теореми 22.1 заміна строгих нерівностей в (22.8) на нестрогі нерівності не дає змоги без додаткових припущень перейти від строгих оцінок (22.9) до нестрогих оцінок $p(t) \le x^*(t) \le q(t)$.

Лема 22.3. *Нехай: 1) справджуються умови A–B; 2) при* $t \in [a,b]$, $y,z \in E$ *маємо* $A_1(t,y,z) \le A_2(t,y,z)$, $B_1(t,y,z) \le B_2(t,y,z)$; *3) задані функції* $u(t), v(t) \in C(E,[a,b])$, *для яких при* $t \in [a,b]$ *маємо*

$$\begin{aligned} & u(t) \le f_1(t) + T_1(t,u,v) - \\ & -(A_1(t,v,u) + B_1(t,v,u))(v-u), \\ & v(t) \ge f_2(t) + T_2(t,v,u) + \\ & +(A_2(t,v,u) + B_2(t,v,u))(v-u). \end{aligned} \tag{22.19}$$

Тоді існує $b_0 \in (a;b]$, *для якого при* $t \in [a,b_0]$ *існує такий розв'язок* $(\bar{y}(t), \bar{z}(t))$, *що* $\bar{y}(t), \bar{z}(t) \in C(E,[a,b_0])$ *і справджуються оцінки*

$$u(t) \le \bar{y}(t), \quad v(t) \ge \bar{z}(t) \quad (t \in [a,b_0]). \tag{22.20}$$

Доведення. Означимо $p(t)$, $q(t)$ за формулами (22.18), застерігши вибір w_0 таким чином, щоб

$$p(a) << u(a) << q(a), \quad p(a) << v(a) << q(a). \tag{22.21}$$

За неперервністю знайдеться $b_0 \in (a;b]$ таке, що при $t \in [a,b_0]$ матимемо

$$p(t) << u(t) << q(t), \quad p(t) << v(t) << q(t). \tag{22.22}$$

За допомогою індукції можна перевірити, що послідовності $\{u_n(t)\}$, $\{v_n(t)\}$, побудовані за допомогою формул

$$u_0(t) = u(t), \quad v_0(t) = v(t), \tag{22.23}$$

$$\begin{aligned} & u_{n+1} = f_1(t) + T_1(t,u_n,v_n) - \\ & -(A_1(t,v_n,u_n) + B_1(t,v_n,u_n))(v_n-u_n), \\ & v_{n+1} = f_2(t) + T_2(t,v_n,u_n) + \\ & +(A_2(t,v_n,u_n) + B_2(t,v_n,u_n))(v_n-u_n) \end{aligned} \tag{22.24}$$

задовольняють співвідношення

$$p(t) << u_0(t) \le u_1(t) \le \ldots \le u_n(t) \le u_{n+1}(t) << q(t),$$

$$p(t) << v_{n+1}(t) \leq v_n(t) \leq \ldots \leq v_1(t) \leq v_0(t) << q(t)$$

при $t \in [a, b_0]$. Тому існують границі $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$ відповідно послідовностей $\{u_n(t)\}$, $\{v_n(t)\}$. Завдяки умові А ці послідовності компактні в $C(E, [a, b_0])$ і, отже, $\bar{y}(t), \bar{z}(t) \in C(E, [a, b_0])$. Оскільки очевидно, що $(\bar{y}(t), \bar{z}(t))$ – розв'язок системи (22.13), то з монотонної збіжності послідовностей $\{u_n(t)\}$, $\{v_n(t)\}$ випливають оцінки (22.20). Це означає, що лему доведено.

Теорема 22.2. *Нехай: 1) при $t \in [a, b]$, $x \in E$ справджуються нерівності (22.6); 2) виконані умови А–В; 3) при $t \in [a, b]$ функції $u(t), v(t) \in C(E, [a, b])$ задовольняють співвідношення (22.19); 4) система (22.13) може мати в $C(E, [a, b])$ не більше як один розв'язок. Тоді знайдеться таке $b_0 \in (a; b]$, що для всякого неперервного на $[a, b]$, чи бодай на $[a, b_0]$ розв'язку $x^*(t)$ рівняння (22.2) справджуються оцінки*

$$u(t) \leq x^*(t) \leq v(t) \tag{22.25}$$

при $(t \in [a, b_0])$.

Доведення. Виберемо $p(t)$, $q(t)$ так само як і при доведенні леми 22.2, скориставшись з формул (22.18). За лемою 22.3 існує $b_0 \in (a; b]$ таке, що при $t \in [a, b_0]$ правдиві оцінки (22.20). Якщо $x^*(t) \in C(E, [a, b])$ – якийсь розв'язок рівняння (22.2), то приймемо $g_n = g_n(t)$, $h_n = h_n(t)$,

$$g_0(t) = h_0(t) = x^*(t), \tag{22.26}$$

$$\begin{aligned} &g_{n+1} = f_1(t) + T_1(t, g_n, h_n) - \\ &-(A_1(t, h_n, g_n) + B_1(t, h_n, g_n))(h_n - g_n), \\ &h_{n+1} = f_2(t) + T_2(t, h_n, g_n) + \\ &+(A_2(t, h_n, g_n) + B_2(t, h_n, g_n))(h_n - g_n). \end{aligned} \tag{22.27}$$

Послуговуючись принципом індукції, легко переконатися, що для $t \in [a, b_0]$ будемо мати

$$p(t) << h_0(t) \leq h_1(t) \leq \ldots \leq h_n(t) \leq h_{n+1}(t) << q(t),$$

$$p(t) << g_{n+1}(t) \leq g_n(t) \leq \ldots \leq g_1(t) \leq g_0(t) << q(t).$$

Опираючись на ці співвідношення і на умову Б, можемо стверджувати, що монотонні і обмежені послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ мають відповідно границі $y^*(t), z^*(t) \in C(E,[a,b_0])$ і що $(y^*(t), z^*(t))$ є розв'язком системи (22.13). Єдиність розв'язку системи (22.13) і лема 22.3 дають змогу ототожнити $y^*(t) = \bar{y}(t)$, $z^*(t) = \bar{z}(t)$ для $t \in [a,b_0]$ і, маючи на увазі також рівності (22.26), (22.27), вважати доведеними нерівності (22.25). Це означає, що теорему доведено.

Будемо задля спрощень вважати, що співвідношення (22.6) є рівностями, у яких обидва оператори $T_1(t,y,z)$, $T_2(t,y,z)$ тотожно співпадають, тобто, вважатимемо заданим оператор $T(t,y,z)$, який є оператором Вольтерра і V_a-оператором і для якого при $t \in [a,b]$, $x \in E$ маємо

$$T(t,x,x) = K(t,x). \tag{22.28}$$

Умову А для цього випадку подамо у такому вигляді.

Умова A_0. *Задані неперервні за сукупністю аргументів оператори Вольтерра і V_a-оператори $A(t,z,y)w$, $B(t,z,y)w$, лінійні неперервні додатні як оператори щодо w, неспадні щодо z, незростаючі щодо y, для яких з нерівності $y \le z$ випливають нерівності*

$$\begin{gathered} -A(t,z,y)(z-y) \le T(t,z,x) - T(t,y,x), \\ T(t,x,z) - T(t,x,y) \le B(t,z,y)(z-y) \end{gathered}$$

при $t \in [a,b]$, $x,y,z \in E$.

За цієї ситуації з теореми 22.1 отримуємо частковий її випадок.

Наслідок 22.1. *Нехай: 1) справджується умова A_0 і $f(t) \in C(E,[a,b])$; 2) функції $p(t), q(t) \in C(E,[a,b])$, при $t \in [a,b]$ задовольняють нерівності*

$$\begin{aligned} p(t) &<< f(t) + T(t,q,p) - (A(t,q,p) + B(t,q,p))(q-p), \\ q(t) &>> f(t) + T(t,p,q) + (A(t,q,p) + B(t,q,p))(q-p). \end{aligned}$$

Тоді для всякого розв'язку $x^*(t) \in C(E,[a,b])$ рівняння (22.2) мають місце оцінки (22.9) при $t \in [a,b]$.

Із теореми 22.2 матимемо також такий результат.

Наслідок 22.2. *Нехай: 1) при $t \in [a,b]$, $x \in E$ правдива рівність (22.28); 2) справджується умова A_0 та умови Б, В з операторами*

$$T_1(t,y,z) = T_2(t,y,z) = T(t,y,z)\,, \tag{22.29}$$

$$\begin{aligned} &A_1(t,y,z) = A_2(t,y,z) = A(t,y,z)\,,\\ &B_1(t,y,z) = B_2(t,y,z) = B(t,y,z)\,; \end{aligned} \tag{22.30}$$

3) при $t \in [a,b]$ функції $u(t), v(t) \in C(E,[a,b])$ задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} &u(t) \le f(t) + T(t,u,v) - (A(t,v,u) + B(t,v,u))(v-u)\,,\\ &v(t) \ge f(t) + T(t,v,u) + (A(t,v,u) + B(t,v,u))(v-u)\,; \end{aligned}$$

4) система

$$\begin{aligned} &y(t) = f(t) + T(t,y,z) - (A(t,z,y) + B(t,z,y))(z-y)\,,\\ &z(t) = f(t) + T(t,z,y) + (A(t,z,y) + B(t,z,y))(z-y)\,; \end{aligned} \tag{22.31}$$

має не більше як один розв'язок з неперервними на $[a,b]$ компонентами. Тоді знайдеться $b_0 \in (a;b]$ таке, що на $[a,b_0]$ існує єдиний в $C(E,[a,b_0])$ розв'язок $x^*(t)$ рівняння (22.2) і для нього мають місце оцінки (22.25) при $t \in [a,b_0]$.

Доведення. Досить зазначити, що згідно з лемою 22.3 виходить, що на $[a,b_0]$ будемо мати $\bar{y}(t) = \bar{z}(t) = x^*(t)$, тобто, що розв'язок $x^*(t) \in C(E,[a,b_0])$ існує і єдиний для $t \in [a,b_0]$. Тому з (22.20) випливають оцінки (22.25) і наслідок доведено.

В умовах теореми 22.2 і наслідку 22.2 фігурує вимога, щоб система (22.13) та система (22.31) були однозначно розв'язними. Одним з найпростіших способів забезпечити правдивість цієї вимоги є припущення про ліпшицієвість відповідно операторів T_1, T_2 та T щодо y і щодо z. Точніше, це означає, наприклад, що до умов наслідку 22.2 доцільно приєднати ще одну умову.

Теорема 22.3. *Нехай справджуються умови 1)–3) наслідку 22.2 і при цьому оператори $A(t,y,z)\,w$, $B(t,y,z)\,w$ є постійними щодо y, z операторами, тобто $A(t,y,z)\,w = A(t)\,w$, $B(t,y,z)\,w = B(t)\,w$. Нехай, крім того, задані неперервні за сукупністю аргументів лінійні додатні щодо w оператори $\alpha(t,y,z)\,w$, $\beta(t,y,z)\,w$, які є* *операторами Вольтерра і* V_a*-операторами і для яких при* $t \in [a,b]$, $x,y,z \in E$ *маємо*

$$\begin{aligned} T(t,z,x) - T(t,y,x) &\le (-A(t) + \alpha(t,z,y))(z-y), \\ (B(t) + \beta(t,z,y))(z-y) &\le T(t,x,z) - T(t,x,y). \end{aligned} \tag{22.32}$$

Тоді знайдеться $b_1 \in (a,b]$, *для якого при* $t \in [a,b_1]$ *справджуються твердження наслідку 22.2, тобто при* $t \in [a,b_1]$ *існує єдиний розв'язок* $x^*(t) \in C(E,[a,b_1])$ *рівняння (22.2) і для нього при* $t \in [a,b_1]$ *мають місце оцінки (22.25).*

Доведення. Зазначимо спочатку, що без обмеження загальності допустиме ототожнення $b_1 = b_0$, де b_0 означене у наслідку 22.2. З огляду на отримані при доведенні леми 22.3 співвідношеннях

$$u_n(t) \le u_{n+1}(t), \quad v_n(t) \ge v_{n+1}(t)$$

і на умови теореми можна знайти

$$\begin{gathered} u_{n+1}(t) - u_n(t) = T(t,u_n,v_n) - T(t,u_{n-1},v_{n-1}) - (A(t)+B(t)) \times \\ \times (v_n - u_n) + (A(t)+B(t))(v_{n-1} - u_{n-1}) \le (A(t) + \\ +\beta(t,v_n,u_n))(v_{n-1} - v_n) + (B(t) + \alpha(t,v_n,u_n))(u_n - u_{n-1}), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} v_n(t) - v_{n+1}(t) = T(t,v_{n-1},u_{n-1}) - T(t,v_n,u_n) + (A(t)+B(t)) \times \\ \times (v_{n-1} - u_{n-1}) - (A(t)+B(t))(v_n - u_n) \le (A(t) + \\ +\beta(t,v_n,u_n))(u_n - u_{n-1}) + (B(t) + \alpha(t,v_n,u_n))(v_{n-1} - v_n). \end{gathered}$$

Звідси видно, що однозначну розв'язність системи (22.31) і збіжність до єдиного її розв'язку $(y(t), z(t))$, $y(t) = z(t) = x^*(t) \in C(E,[a,b_1])$ можна гарантувати для $t \in [a,b_1]$ $\quad (b_1 \in (a,b])$ при такому b_1, що

$$\|A(t) + B(t) + \alpha(t,z,y) + \beta(t,z,y)\| \le \rho < 1$$

при $t \in [a,b_1]$, $y,z \in [u(t), v(t)]$. Теорему доведено.

Зауважимо, що як і у §12 з результатів, наведених вище, можна отримати низку часткових випадків, коли оператори $T_1(t,y,z)$, $T_2(t,y,z)$, $T(t,y,z)$ не залежать, наприклад, від одного з аргументів y або z. Докладніші формулювання отримуваних для таких випадків прикладів пропускаємо.

Інтегральні оператори (22.3)–(22.5), очевидно, є операторами Вольтерра і V_a-операторами. Тому для рівняння (22.2) з такими операторами можна скористатися з наведених у попередній частині цього параграфу результатів. Однак ці результати для нестрогих нерівностей мають, взагалі кажучи, локальний характер. Використовуючи специфіку інтегрального оператора Вольтерра, ці результати для нестрогих нерівностей можна за певних обставин поширити на деякий максимальний проміжок $[a, b_0) \subset [a, b]$ або на весь відрізок $[a, b] \in R^N$. Задля конкретності докладніше зупинимося на рівнянні вигляду (22.1), яке будемо розглядати в класі $C(E, [a, b])$ неперервних при $t \in [a, b]$ функцій із значеннями у напівупорядкованому банаховому просторі E з тілесним конусом K_0.

Нехай оператори $T_i(t, y, z)$, $A_i(t, y, z)\, w$, $B_i(t, y, z)\, w \quad (i = 1,\ 2)$ мають вигляд

$$T_i(t, y, z) = \int\limits_a^t K_i(t, s, y(s), z(s))\, ds, \tag{22.33}$$

$$A_i(t, y, z)\, w = \int\limits_a^t a_i(t, s, y(s), z(s))\, w(s)\, ds, \tag{22.34}$$

$$B_i(t, y, z)\, w = \int\limits_a^t b_i(t, s, y(s), z(s))\, w(s)\, ds, \tag{22.35}$$

причому

$$K_1(t, s, x, x) \le k(t, s, x) \le K_2(t, s, x, x). \tag{22.36}$$

Умову A, яку для цього випадку називатимемо умовою AV, можна подати у такому вигляді.

Умова AV. *Задані неперервні за сукупністю аргументів оператори* $a_i(t, s, z, y)\, w$, $b_i(t, s, z, y)\, w \quad (i = 1,\ 2)$, *лінійні неперервні додатні щодо* w, *неспадні щодо* z, *незростаючі щодо* y, *для яких із співвідношень* $t, s \in [a, b]$, $y, z \in E$, $y \le z$ *випливає*

$$\begin{aligned} &-a_i(t, s, z, y)(z - y) \le K_i(t, s, z, x) - K_i(t, s, y, x), \\ &K_i(t, s, x, z) - K_i(t, s, x, y) \le b_i(t, s, z, y)(z - y) \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \tag{22.37}$$

Для даної ситуації правдивість умови Б гарантована самою природою інтегрального оператора Вольтерра у рівнянні (22.2). Точніше, правдиве твердження, яке подамо у вигляді окремої леми.

Лема 22.4. *Нехай заданий оператор* $h(t,s,x) : [a,b] \times [a,b] \times E \to E$ *неперервний за сукупністю аргументів і неспадний щодо* x. *Якщо послідовність* $\{y_n(t)\}$ *функцій із* $C(E,[a,b])$ *не спадає (не зростає) і обмежена в* E, *тобто* $y_n(t) \leq y(t) \quad (y_n(t) \geq y(t))$, *де* $y(t) \in C(E,[a,b])$, *то послідовність* $\{u_n(t)\}$, *утворена за допомогою формул*

$$u_n(t) = \int\limits_a^t h(t,s,y_n(s))\,ds,$$

компактна в $C(E,[a,b])$.

Доведення. Для випадку $N = 1$ лему 22.4 доведено В.А.Бондаренком (див. [57]). Для $N \geq 1$ лему можна довести за схемою міркувань В.А.Бондаренка, маючи на увазі, що точку t_1, у якій одержується суперечність, вибирають такими самим способом, яким вибрано точку t_1 при доведенні теореми 22.1. Цим зауваженням щодо доведення обмежимося, оскільки інші його міркування цілком повторюють відповідні міркування В.А.Бондаренка.

Зазначимо, що для $N > 1$ результат леми є новим.

Лема 22.5. *Нехай: 1) правдива умова AV; 2) із співвідношень* $t,s \in [a,b]$, $u \leq y$, $t \geq z$, $u,v,y,z \in E$ *випливають співвідношення*

$$\begin{gathered} K_i(t,s,u,v) + (a_i(t,s,v,u) + b_i(t,s,v,u))\,u \leq \\ \leq K_i(t,s,y,z) + (a_i(t,s,z,y) + b_i(t,s,z,y))\,y \quad (i = 1,\ 2), \end{gathered} \tag{22.38}$$

$$f_1(t) \leq f_2(t), \quad K_1(t,s,y,z) \leq K_2(t,s,y,z). \tag{22.39}$$

Тоді існує таке $b_0 \in (a,b]$, *що при кожному* $b_1 \in [a,b_0)$ *система* *рівнянь*

$$
\begin{aligned}
&y\,(t) = f_1\,(t) + \int\limits_a^t K_1\,(t,s,y(s),z(s))\,ds - \\
&- \int\limits_a^t \left(a_1\,(t,s,z(s),y(s)) + b_1\,(t,s,z(s),y(s))\right)(z(s) - y(s))\,ds, \\
&z\,(t) = f_2\,(t) + \int\limits_a^t K_2\,(t,s,y(s),z(s))\,ds + \\
&+ \int\limits_a^t \left(a_2\,(t,s,z(s),y(s)) + b_2\,(t,s,z(s),y(s))\right)(z(s) - y(s))\,ds,
\end{aligned}
\tag{22.40}
$$

має крайній в $C\,(E,[a,b])$ *розв'язок* $(y^*\,(t)\,,z^*\,(t))$.

Доведення. Зауважимо спочатку, що умови леми 25.5 дають підставу застосувати лему 22.2. Справа зводиться до того, щоб вибрати $p\,(t)$, $q\,(t)$ за (22.18) і побудувати монотонні послідовності $\{y_n\,(t)\}$, $\{z_n\,(t)\}$ за допомогою формул

$$
\begin{aligned}
&y_{n+1}\,(t) = f_1\,(t) + \int\limits_a^t K_1\,(t,s,z_n\,(s)\,,y_n\,(s))\,ds - \\
&- \int\limits_a^t (a_1\,(t,s,z_n\,(s)\,,y_n\,(s)) + \\
&+ b_1\,(t,s,z_n\,(s)\,,y_n\,(s)))\,(z_n\,(s) - y_n\,(s))\,ds, \\
&z_{n+1}\,(t) = f_2\,(t) + \int\limits_a^t K_2\,(t,s,z_n\,(s)\,,y_n\,(s))\,ds + \\
&+ \int\limits_a^t (a_2\,(t,s,z_n\,(s)\,,y_n\,(s)) + \\
&+ b_2\,(t,s,z_n\,(s)\,,y_n\,(s)))\,(z_n\,(s) - y_n\,(s))\,ds,
\end{aligned}
\tag{22.41}
$$

$$
y_0\,(t) = p\,(t)\,, \quad z_0\,(t) = q\,(t)\,. \tag{22.42}
$$

Як і при доведенні леми 22.1, можна переконатися у їх монотонності і обмеженості на деякому "проміжку" $[a,b_0] \subseteq [a,b]$, можливо меншому за $[a,b]$. За лемою 22.4 вони компактні в $C\,(E,[a,b_0])$, й тому з них можна виділити збіжні підпослідовності, які насправді співпадають із самими цими послідовностями завдяки їх монотонності. Отже, існують границі $y^*\,(t)\,,z^*\,(t) \in C\,(E,[a,b_0])$ відповідно послідовностей $\{y_n\,(t)\}$, $\{z_n\,(t)\}$. При цьому, оскільки згідно з (22.18), (22.42) маємо $y_0\,(t) << z_0\,(t)$, то $y^*\,(t) \leq z^*\,(t)$.

Очевидно, що $(y^*(t), z^*(t))$ є розв'язком системи (22.40). Якщо $(y(t), z(t))$ $\quad (y(t), z(t) \in C(E, [a, b_0]))$ який-небудь інший розв'язок цієї системи, то, як і при доведенні леми 22.1, можна переконатися у нерівностях

$$y^*(t) \le y(t) \le z^*(t), \quad y^*(t) \le z(t) \le z^*(t) \quad (t \in [a, b_0]). \qquad (22.43)$$

При $t \in [a, b_0]$ нерівності (22.43) правдиві, тобто, $(y^*(t), z^*(t))$ – крайній в $C(E, [a, b_0])$ розв'язок системи (22.40). Можливість продовження цього розв'язку на деякий максимальний "проміжок" $[a, b_1)$ або на весь проміжок $[a, b]$ можна обгрунтувати традиційним способом. Тому вважаємо лему доведеною.

Теорема 22.4. *Нехай справджуються умови леми 22.5 і задані функції $u(t), v(t) \in C(E, [a, b])$ задовольняють при $t \in [a, b]$ нерівності*

$$\begin{gathered}
u(t) \le f_1(t) + \int_a^t K_1(t, s, u(s), v(s))\, ds - \\
- \int_a^t (a_1(t, s, v(s), u(s)) + b_1(t, s, v(s), u(s))) \times \\
\times (v(s) - u(s))\, ds, \\
v(t) \ge f_2(t) + \int_a^t K_2(t, s, v(s), u(s))\, ds + \\
+ \int_a^t (a_2(t, s, v(s), u(s)) + b_0(t, s, v(s), u(s))) \times \\
\times (v(s) - u(s))\, ds.
\end{gathered} \qquad (22.44)$$

Нехай, крім того, система (22.40) може мати в $C(E, [a, b]) \times C(E, [a, b])$ не більше за один розв'язок. Тоді для всякого розв'язку $x^*(t) \in C(E, [a, b])$ рівняння (22.2) мають місце оцінки (22.25) при $t \in [a, b]$.

Доведення. Якщо $x^*(t) \in C(E, [a, b])$ – розв'язок рівняння (22.2), то можна прийняти

$$\varphi_0(t) = \psi_0(t) = x^*(t),$$

$$\varphi_{n+1}(t) = f_1(t) + \int_a^t K_1(t, s, \varphi_n(s), \psi_n(s))\, ts -$$
$$- \int_a^t (a_1(t, s, \psi_n(s), \varphi_n(s)) + b_1(t, s, \psi_n(s), \varphi_n(s)))\, (\psi_n(s) - \varphi_n(s))\, ds,$$

$$\psi_{n+1}(t) = f_2(t) + \int\limits_a^t K_2(t, s, \psi_n(s), \varphi_n(s))\, ds +$$
$$+ \int\limits_a^t (a_2(t, s, \psi_n(s), \varphi_n(s)) + b_2(t, s, \psi_n(s), \varphi_n(s)))(\psi_n(s) - \varphi_n(s))\, ds.$$

Можна переконатися, що послідовності $\{\varphi_n(t)\}$, $\{\psi_n(t)\}$ монотонні. З іншого боку, вибравши $p(t)$, $q(t)$ за формулами (22.18) і повторивши міркування із доведення попередньої леми щодо монотонності послідовностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, побудованих за формулами (22.41), (22.42), можна також довести нерівності

$$y_n(t) \le \varphi_n(t) \le \psi_n(t) \le z_n(t) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots) \tag{22.45}$$

для деякого "проміжку" $[a, b_0] \subseteq [a, b]$. Це означає, що для $t \in [a, b_0]$ нерівності (22.25) доведені. Вважаючи тепер, що $b_0 \le b$ і $b_0 \ne b$, позначимо через t_0 точку $t_0 \in [a, b]$, у якій досягається рівність (22.10), де через D позначено множину таких t, при яких оцінки (22.25) не справджуються. Очевидно, що $d \ge 0$ і що $t_0 \notin D$. Якщо $t_0 \le b$ і $t_0 \ne b$, то приймемо

$$\alpha_1(t) = f_1(t) + \int\limits_a^{t_0} K_1(t, s, y^*(s), z^*(s))\, ds -$$
$$- \int\limits_a^{t_0} (a_1(t, s, z^*(s), y^*(s)) + b_1(t, s, z^*(s), y^*(s)))(z^*(s) - y^*(s))\, ds,$$
$$\alpha_2(t) = f_2(t) + \int\limits_a^{t_0} K_2(t, s, z^*(s), y^*(s))\, ds +$$
$$+ \int\limits_a^{t_0} (a_2(t, s, z^*(s), y^*(s)) + b_2(t, s, z^*(s), y^*(s)))(z^*(s) - y^*(s))\, ds.$$

З (22.39), (22.44) випливає

$$u(t) \le \alpha_1(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K_1(t, s, u(s), v(s))\, ds -$$
$$- \int\limits_{t_0}^{t} (a_1(t, s, v(s), u(s)) + b_1(t, s, v(s), u(s)))(v(s) - u(s))\, ds,$$
$$v(t) \ge \alpha_2(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K_2(t, s, v(s), u(s))\, ds +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} (a_2(t, s, v(s), u(s)) + b_2(t, s, v(s), u(s)))(v(s) - u(s))\, ds$$

для $t \in [t_0, b]$. Прийнявши $p(t) = \alpha_1(t) - w_0$, $q(t) = \alpha_2(t) + w_0$, де w_0 - внутрішній елемент конуса K за допомогою якого напівупорядковано простір E, можна повторити попередні міркування для $[t_0, b]$ і цим виявити суперечність з припущеннями щодо вибору t_0. Це означає, що теорему доведено, тобто, що $t_0 = b$.

Якщо $a_i(t,s,z,y)$, $b_i(t,s,z,y)$ $(i = 1,\ 2)$ є нуль-операторами, то при $N = 1$ наведені у цьому параграфі основні результати співпадають з відповідними результатами із [57] (див. [57, §§9, 19]). Для $N > 1$ результати цього параграфу є новими і при $a_i(t,s,z,y) = 0$, $b_i(t,s,z,y) = 0$ $(i = 1, 2)$.

Приклад 22.1. (див. [57, §25]). В [5] доведено, що система рівнянь

$$x(t) = \int\limits_0^t f(s, x(s))\, ds, \tag{22.46}$$

яку розглядаємо в $C(R^n, [0,T])$, де $f = \{f_1, f_2\}$, $x = \{x_1, x_2\}$ $(0 < T < \infty)$,

$$f_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x_2 \geq 0, -\infty < x_1 < \infty, \\ 2\sqrt{-x_2}, & \text{якщо} \quad x_2 < 0, -\infty < x_1 < \infty, \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} -2\sqrt{x_1}, & \text{якщо} \quad x_1 > 0, -\infty < x_2 < \infty, \\ 0, & \text{якщо} \quad x_1 \leq 0, -\infty < x_2 < \infty \end{cases}$$

не має нижнього і верхнього розв'язків. Приймемо

$$F_1(s, u_1, u_2, v_1, v_2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad v_2 \geq 0, -\infty < u_1, u_2, v_1 < \infty, \\ 2\sqrt{-v_2}, & \text{якщо} \quad v_2 < 0, -\infty < u_1, u_2, v_1 < \infty, \end{cases}$$

$$F_2(s, u_1, u_2, v_1, v_2) = \begin{cases} -2\sqrt{v_1}, & \text{якщо} \quad v_1 > 0, -\infty < u_1, u_2, v_2 < \infty, \\ 0, & \text{якщо} \quad v_1 \leq 0, -\infty < u_1, u_2, v_2 < \infty. \end{cases}$$

Оператор

$$\int\limits_0^t F(s, y(s), z(s))\, ds,$$

де $y = \{y_1, y_2\}$, $z = \{z_1, z_2\}$, $F = \{F_1, F_2\}$ є ізотонним щодо y і антитонним щодо z. Системи рівнянь

$$y(t) = \int_0^t F(s, y(s), z(s))\, ds,$$

$$z(t) = \int_0^t F(s, z(s), y(s))\, ds$$

має крайній в $C\left(R^2, [0,T]\right)$ розв'язок $(y^*(t), z^*(t))$ на будь-якому сегменті $[0,T] \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}\right]$ $(\alpha > 0)$, оскільки на такому сегменті $[0,T]$ мають місце рівності

$$p(t) << \int_0^t F(s, p(s), q(s))\, ds,$$
$$q(t) >> \int_0^t F(s, q(s), p(s))\, ds,$$

де $p(t) = \{-\alpha, -\alpha\}$, $q(t) = \{\alpha, \alpha\}$, а нерівність $y(t) << z(t)$ розуміємо як систему нерівностей $y_1(t) < z_1(t)$, $y_2(t) < z_2(t)$ $(t \in [0,T])$. При цьому на $[0,T] \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\sqrt{\alpha}\right]$ правдиві оцінки (22.9) для всякого розв'язку $x^*(t) = \{x_1^*(t), x_2^*(t)\} \in C\left(R^2, [0,T]\right)$ рівняння (22.46).

§23. Рівняння з узагальненою гетеротонністю

Розглядатимемо двосторонні операторні нерівності для рівняння

$$x = F_0 x \tag{23.1}$$

із, взагалі кажучи, немонотонним оператором $F_0 : E_1 \to E_1$, де $E_1 \subseteq E$, Е – напівупорядкований простір. Зауважимо, що збіжність в Е, якщо не вказаний інший спосіб вибору топології в Е, розуміємо як збіжність в розумінні топології, породженої напівупорядкованістю (див. [20, 29]).

Будемо вважати, що задані оператори $T(y,z), \varPhi(y,z) : E_1 \times E_1 \to E_1$, які мають такі властивості.

(А) *Оператор*

$$F\,(y,z) = T\,(y,z) + \varPhi\,(T\,(y,z)\,, T(z,y)) \tag{23.2}$$

не спадає за y, *не зростає за* z.

(Б) *Для* $x \in E_1$ *справджується рівність*

$$T\,(x,x) = F_0 x.$$

Теорема 23.1. *Нехай: 1) справджуються умови (А), (Б); 2) задані елементи* $u, v \in E_1$ *задовольняють нерівності*

$$u \le F\,(u,v)\,, \quad v \ge F\,(v,u)\,; \tag{23.3}$$

3) послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *побудовані за допомогою формул*

$$\begin{gathered} y_0 = u, \;\; z_0 = v, \\ y_{n+1} = F\,(y_n, z_n)\,, \;\; z_{n+1} = F\,(z_n, y_n) \;\; (n = 0,\ 1,\ \ldots)\,, \end{gathered} \tag{23.4}$$

збігаються відповідно до компонент y^*, z^* *крайнього в* E_1 *розв'язку* (y^*, z^*) *системи*

$$y = F\,(y,z)\,, \;\; z = F\,(z,y)\,. \tag{23.5}$$

Тоді для всякого розв'язку $x^* \in E_1$ *рівняння (23.1) справджуються оцінки*

$$u \le x^* \le v. \tag{23.6}$$

Доведення. З теореми 19.5 випливає, що оцінки (23.6) мають місце для всякого розв'язку $x^* \in E_1$ рівняння

$$x = F\,(x,x)\,. \tag{23.7}$$

Оскільки всякий розв'язок рівняння (23.1) є розв'язком рівняння (23.7), то теорему доведено.

Безпосередніми наслідками цієї теореми є, наприклад, такі твердження.

Теорема 23.2. *Нехай заданий такий оператор $\Phi : E_1 \to E_1$, що оператор $F = F_0 + \Phi F_0 - \Phi$ є ізотонним. Якщо процес послідовних наближень*

$$x_{n+1} = Fx_n$$

з початковим наближенням $x_0 = u \quad (x_0 = v)$ збігається до нижнього розв'язку $y^* \in E_1$ (верхнього розв'язку $z^* \in E_1$) рівняння (23.1), то з нерівності

$$u \le Fu \quad (v \ge Fv)\,, \quad u \in E_1 \quad (v \in E_1)$$

випливає оцінка

$$u \le y^* \quad (v \ge z^*)\,. \tag{23.8}$$

Теорема 23.3. *Нехай: 1) існує таке натуральне число k, що F_0^k є ізотонним оператором; 2) заданий елемент $u \in E_1 \quad (v \in E_1)$, для якого*

$$u \le F_0^k u, \quad v \ge F_0^k v; \tag{23.9}$$

3) знайдеться таке натуральне число m, що послідовні наближення

$$x_0 = u \;\; (x_0 = v)\,, \;\; x_{n+1} = F_0^{km} x_n$$

збігаються до нижнього розв'язку $y^* \in E_1$ (верхнього розв'язку $z^* \in E_1$) рівняння

$$x = F_0^{km} x.$$

Тоді має місце оцінка (23.8).

Для доведення досить зазначити, що в умовах теореми 23.2 можна прийняти

$$\Phi = \sum_{i=0}^{km} F_0^i,$$

де $F_0^0 = I$, I – тотожний оператор.

Як частковий випадок можна отримати таку теорему, яка належить М. В. Азбелєву і З. Б. Цалюку [6].

Теорема 23.4 *[6]. Нехай E – напівупорядкований простір, E_1 – замкнена множина елементів з E, оператор $F_0 : E_1 \to E_1$*

неперервний, F_0^m *– стискуючий оператор,* F_0^k *– ізотонний,* m, k *– задані натуральні числа. Тоді з нерівності (23.9) випливає оцінка*

$$u \leq x^* \quad (v \geq x^*) \tag{23.10}$$

для єдиного розв'язку $x^* \in E_1$ *рівняння (23.1).*

Зупинимося на випадку, коли рівняння (23.1) є інтегральним рівнянням вигляду

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, x(s), x(s))\, ds, \tag{23.11}$$

де $-\infty < a \leq t \leq < b < \infty$, $f(t) \in \mathrm{C}(E, [a, b])$, оператор $K(t, s, y, z)$: $[a, b] \times [a, b] \times E \times E \to E$ – неперервний за сукупністю аргументів, E – банахова структура, $\mathrm{C}(E, [a, b])$ – простір неперервних при $t \in [a, b]$ функцій із значеннями в E. Як і раніше у §22 будемо вважати, що напівупорядкованість в E запроваджено за допомогою тілесного конуса K і запис $x << y$ означатиме, що $y - x \in intK$.

Нехай оператор $\varPhi(y, z) \equiv \varPhi(t, y, z)$ означений за допомогою формули

$$\varPhi(t, y, z) = \int_a^t \varphi(t, s, y(s), z(s))\, ds,$$

де неперервний за сукупністю аргументів оператор $\varphi(t, s, y, z)$ при фіксованих $t, s \in [a, b]$ діє з $E \times E$ в E. Оператор $F(y, z)$ у цьому випадку має вигляд

$$F(y, z) = f(t) + \int_a^t H(t, s, y(s), z(s))\, ds,$$

де

$$H(t, s, y(s), z(s)) = K(t, s, y(s), z(s)) - \varphi(t, s, y(s), z(s)) +$$
$$+\varphi\left[t, s, f(s) + \int_a^t K(s, \xi, y(\xi), z(\xi)) d\xi, f(s) + \int_a^t K(s, \xi, z(\xi), y(\xi))\, d\xi\right].$$

Теорема 23.5. *Нехай* $H(t,s,y,z)$ *не спадає щодо* y, *не зростає щодо* z *і задані* $p(t), q(t) \in C(E,[a,b])$, *які на сегменті* $[a,b]$ *задовольняють нерівності*

$$p(t) << f(t) + \int\limits_a^t H(t,s,p(s),q(s))\,ds,$$
$$q(t) >> f(t) + \int\limits_a^t H(t,s,q(s),p(s))\,ds.$$

Тоді на сегменті $[a,b]$ *правдиві нерівності*

$$p(t) << x^*(t) << q(t) \tag{23.12}$$

для всякого розв'язку $x^*(t) \in C(E,[a,b])$ *рівняння (23.11).*

Доведення. За теоремою 22.1 нерівності (23.12) правдиві при $t \in [a,b]$ для всякого розв'язку $x^*(t) \in \mathrm{C}(E,[a,b])$ рівняння

$$x(t) = f(t) + \int\limits_a^t H(t,s,x(s),x(s))\,ds. \tag{23.13}$$

Оскільки кожний розв'язок рівняння (23.11) є розв'язком рівняння (23.13), то теорему доведено.

Теорема 23.6. *Нехай: 1) однозначно розв'язна в* $C(E,[a,b]) \times C(E,[a,b])$ *система рівнянь*

$$\begin{gathered} y(t) = f(t) + \int\limits_a^t H(t,s,y(s),z(s))\,ds, \\ z(t) = f(t) + \int\limits_a^t H(t,s,z(s),y(s))\,ds, \end{gathered} \tag{23.14}$$

причому її розв'язок має вигляд $(x^*(t), x^*(t))$; *2) задані функції* $u(t), v(t) \in C(E,[a,b])$, *які задовольняють при* $t \in [a,b]$ *нерівності*

$$u(t) \le f(t) + \int\limits_a^t H(t,s,u(s),v(s))\,ds,$$
$$v(t) \ge f(t) + \int\limits_a^t H(t,s,v(s),u(s))\,ds;$$

3) оператор $H(t,s,y,z)$ не спадає за y, не зростає за z. Тоді єдиний в $C(E,[a,b])$ розв'язок $x^*(t)$ рівняння (23.11) задовольняє при $t \in [a,b]$ нерівності

$$u(t) \le x^*(t) \le v(t). \tag{23.15}$$

Доведення. Приймемо

$$T(y,z) = f(t) + \int_a^t K(t,s,y(s),z(s))\,ds.$$

Умови (А) і (Б), очевидно, справджуються. Умова 2) теореми означає, що елементи $u = u(t)$, $v = v(t)$ задовольняють умову 2) теореми 23.1. Тому існує сегмент $[a,b_0] \subseteq [a,b]$, на якому виконується умова 3) теореми 23.1. Тобто, до розв'язку $(y(t), z(t))$ $(y(t), z(t) \in \mathrm{C}(E,[a,b]))$ системи (23.14) збігаються рівномірно на деякому сегменті $[a,b_0] \subseteq [a,b]$ послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, означені за допомогою формул

$$y_0(t) = u(t), \quad z_0(t) = v(t),$$

$$y_{n+1}(t) = f(t) + \int_a^t H(t,s,y_n(s),z_n(s))\,ds,$$
$$z_{n+1}(t) = f(t) + \int_a^t H(t,s,z_n(s),y_n(s))\,ds.$$

Обгрунтування цього можна зробити так само, як доведено лему 18.1 з [57]. Отже, як випливає з теореми 23.1, твердження теореми 23.6 має місце на $[a,b_0]$. Міркуючи далі так само як і при доведенні теореми 22.2, переконуємося, що теорема справджується для всього сегменту $[a,b]$.

Зауваження 23.1. *Наведені вище результати для інтегральних нерівностей можна поширити на випадок, коли $[a,b]$ є N-мірним відрізком, вносячи зміни у формулювання теорем і їх доведення, орієнтуючись на відповідні формулювання і доведення в §22.*

Нехай $f(t)$, $K(t,s)$, $\varphi(t,s)$ є дійсними функціями, інтегровними з квадратом відповідно в областях (a,b) і $(a,b)\times(a,b)$. Розглянемо рівняння

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds, \tag{23.16}$$

Приймемо

$$H(t,s) = K(t,s) - \varphi(t,s) + \int_a^t \varphi(t,\xi)\,K(\xi,s)\,d\xi.$$

Теорема 23.7. *Нехай $H(t,s) \geq 0$ при $t,s \in (a,b)$ і задана функція $u(t) \in L_2(a,b)$ $\quad (v(t) \in L_2(a,b))$ така, що при майже всіх $t \in (a,b)$ будемо мати*

$$u(t) \leq f_1(t) + \int_a^t H(t,s)\,u(s)\,ds,$$

$$\left(v(t) \geq f_1(t) + \int_a^t H(t,s)\,v(s)\,ds \right),$$

де

$$f_1(t) = f(t) + \int_a^t \varphi(t,s)\,f(s)\,ds. \tag{23.17}$$

Тоді при майже всіх $t \in (a,b)$ справджується нерівність (23.10), тобто $u(t) \leq x^*(t)$ $\quad (v(t) \geq x^*(t))$ для єдиного розв'язку $x^*(t) \in L_2(a,b)$ рівняння (23.16).

Доведення зводиться до застосування теореми 23.6. Підрахунок для (23.17) є безпосереднім вислідом із способу задання оператора $\varPhi$ для цього випадку (див. умови теореми 23.2) та з лінійності рівняння (23.16).

Якщо, наприклад, замість рівняння (23.16) розглядати рівняння

$$x(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)\,x(\tau(s))\,ds$$

з тими ж самими f і K, що й в умовах попередньої теореми, то твердження теореми 23.7 має місце в цьому випадку, якщо f_1 і H мають постульовані умовами теореми 23.7 властивості.

Приклад 23.1. Нехай

$$K(t,s) = a(t)\, b(s), \quad \varphi(t,s) = \alpha(t)\, \beta(s).$$

Тоді

$$H(t,s) = [a(t) + \alpha(t)\, \psi(t)]\, b(s) - \alpha(t)\, [\beta(s) + b(s)\, \psi(s)],$$

де

$$\psi(t) = \int_c^t a(\xi)\, \beta(\xi)\, d\xi \quad (c \in [a,b]).$$

Якщо $\alpha(t)$, $\beta(t)$ вибрані так, що $H(t,s) \geq 0$, то з нерівності

$$u(t) \leq f(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s)\, f(s)\, ds + \int_a^t H(t,s)\, u(s)\, ds$$

випливає оцінка

$$u(t) \leq f(t) + a(t) \int_a^t f(s)\, \beta(s) \exp\left[\int_s^t a(\xi)\, b(\xi)\, d\xi\right] ds = x(t).$$

При $b(t) \geq 0$ можна, зокрема, прийняти

$$\beta(t) = cb(t) \exp\left[-\int_c^t a(\xi)\, b(\xi)\, d\xi\right].$$

Функцію $\alpha(t)$ можна вибрати таким способом, щоб справджувалася нерівність

$$a(t) + \alpha(t)\, [\psi(t) - 1] \geq 0,$$

й тоді для $H(t,s)$ будемо мати

$$H(t,s) = b(s)\, [a(t) + \alpha(t)\, \psi(t) - \alpha(t)].$$

Зауваження 23.2. *Інше узагальнення поняття монотонності належить Сато (див. [135]). Суть справи у викладі В. Вальтера [135] зводиться до наступного. Якщо при* $t \in [0,T]$ *задана функція* $g(t)$ *і* α *– задане дійсне число таке, що* $0 \le \alpha \le 1$, *то для* $0 \le t < \tau \le T$ *означимо*

$$g_\alpha(t|\,\tau) = g(\tau) - \alpha g(t)\,.$$

Наприклад,

$$k_\alpha(t|\,\tau, s, x) = k(\tau, s, x) - \alpha k(t, s, x)\,,$$

$$\begin{gathered}(K(x))_\alpha(t|\,\tau) = \int\limits_a^{t|\tau} K_\alpha(t|\,\tau, s, x(s))\,ds = \\ = \int\limits_a^{\tau} K(\tau, s, x(s))\,ds - \alpha\int\limits_a^{t} K(t, s, x(s))\,ds = \\ = (K(x))(\tau) - \alpha(K(x))(t)\,.\end{gathered} \tag{23.18}$$

Ядро $K(t,s,x)$ *інтегрального оператора* $(Kx)(t) = \int\limits_a^t K(t,s,x(s))\,ds$ *назвемо, наслідуючи В. Вальтера [135],* α*- монотонним, якщо з нерівності* $y \le z$ *випливає*

$$K_\alpha(t|\,\tau, s, y) \le K_\alpha(t|\,\tau, s, z)\,,$$

за припущення, що всі аргументи належать до області означення функції $K(t,s,x)$. *Якщо* $\alpha = 0$, *то* α*-монотонність співпадає із звичайною монотонністю.*

В контексті зауваження 23.2 наведемо деякі твердження, які можна вважати α-гетеротонними аналогами відповідних тверджень В. Вальтера [135] для α- монотонних операторів. Рівняння (23.11) розглядатимемо в $\mathrm{C}(E,[a,b])$.

Називатимемо оператор

$$\int\limits_a^t K(t,s,y(s),z(s))\,ds = (K(y,z))(t)$$

α - гетеротонним, якщо з нерівностей $y \le u$, $z \ge v$ випливає нерівність

$$(K(y,z))_\alpha(t|\,\tau) \le (K(u,v))_\alpha(t|\,\tau)\,.$$

Теорема 23.8. *Нехай всі функції, які трапляються далі є неперервними і справджуються такі припущення: 1) оператор* $\int\limits_a^t K(t,s,y,z)\,ds = (K(y,z))(t)$ *має властивість* α*-гетеротонності; 2) для функцій* $p(t), q(t) \in C(E,[a,b])$ *мають місце нерівності*

$$\begin{array}{l} p_\alpha(t|\tau) << f(t|\tau) + (K(p,q))_\alpha(t|\tau), \\ q_\alpha(t|\tau) >> f(t|\tau) + (K(q,p))_\alpha(t|\tau) \quad (0 \le a \le t < \tau \le b). \end{array}$$

Тоді при $t \in [a,b]$ *справджуються оцінки (23.12) для всякого розв'язку* $x^*(t) \in C(E,[a,b])$ *рівняння (23.11).*

Доведення. Приймемо

$$\Phi(\tau,y,z) = -\alpha y(t) \quad (0 \le a \le \tau < t \le T;\ \alpha \in [0,1]). \tag{23.19}$$

Тоді доведення можна звести до покликання на теорему 23.5.

Подібним способом можна переконатися у правдивості наступної теореми.

Теорема 23.9. *Нехай всі функції, які трапляються далі є неперервними і справджуються умови: 1) оператор* $(K(y,z))(t)$ *є* α*-гетеротонним; 2) задані функції* $u(t), v(t) \in C(E,[a,b])$*, для яких при* $t,\tau \in [a,b]$ *виконуються нерівності*

$$\begin{array}{l} u_\alpha(t|\tau) \le f(t|\tau) + (K(u,v))_\alpha(t|\tau), \\ v_\alpha(t|\tau) \ge f(t|\tau) + (K(v,u))_\alpha(t|\tau) \quad (0 \le a \le t < \tau \le b); \end{array}$$

3) система рівнянь (23.14) однозначно розв'язна в $C(E,[a,b]) \times C(E,[a,b])$*, причому її єдиний розв'язок має вигляд* $(x^*(t), x^*(t))$*. Тоді єдиний в* $C(E,[a,b])$ *розв'язок* $x^*(t)$ *рівняння (23.11) при* $t \in [a,b]$ *задовольняє оцінки (23.15).*

Зазначимо, що в тому випадку, коли $K(t,s,y,z)$ не залежить від z матимемо часткові випадки, які можна ідентифікувати з відповідними результатами В.Вальтера (див. [135, гл.I, §3])

Зауваження 23.3. *Поняття* α*-монотонності в [135] використане також для доведення теорем про диференціальні нерівності, які раніше встановлені Е.Баядою (див. [125]), Ф. Каф'єро [118], В.Лакшмікантамом [123] (див. також [57, 125]) та Ч.Олехом і З.Оп'ялем (див. [125]).*

Зауваження 23.4. *Пропускаємо тут подробиці щодо можливості формулювання відповідних тверджень, отриманих на шляху поєднання ідей односторонньої і часткової ліпшицієвості з узагальненнями понять монотонності та гетеротонності відповідних операторів, оскільки формулювання і доведення таких тверджень не містить ні формальних ні неформальних труднощів, за винятком труднощів, пов'язаних з громіздкістю відповідного викладу. Уникаємо також надмірної деталізації часткових випадків, обмежившись наведеними твердженнями, які можна вважати за приклади для ілюстрації основних ідей, використовуваних у роботі.*

§24. Приклади інтегральних нерівностей

Наведемо деякі результати, які узагальнюють відомі теореми Гронуолла, Біхарі, Вендроффа та деякі інші теореми про інтегральні нерівності. Вони ґрунтуються на результатах попередніх параграфів, зокрема §22, і здебільшого є новими для $N > 1$ навіть у монотонному випадку. Ці результати близькі до відповідних результатів з [57] (див. [57, §§20, 21]) і деколи теж є новими і для $N = 1$. Зазначимо, що – як в [57] так і в наступному викладі у цьому параграфі – наведені твердження не вичерпують можливостей побудови інших аналогів і узагальнень згаданих теорем про інтегральні нерівності і їх можна розглядати як ілюстрацію можливостей для побудови таких тверджень на основі використаного в [57] і в цій книзі підходу.

1. Розглянемо спочатку рівняння

$$x(t) = f(t) + \alpha(t) \int\limits_a^t \beta(\xi)\, x(\xi)\, d\xi \tag{24.1}$$

з дійсними неперервними при $t \in [a, b]$ функціями $f(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, де $t = \{t^1, \ldots, t^N\}$, $a = \{a^1, \ldots, a^N\}$, $b = \{b^1, \ldots, b^N\}$ $\left(-\infty < a^i < b^i < \infty\right)$, $[a, b] = \left[a^1, b^1\right] \times \ldots \times \left[a^N, b^N\right]$.

Нехай для неперервних функцій $u(t)$, $v(t)$ при $t \in [a,b]$ маємо

$$\begin{aligned} u(t) \le f(t) + \int\limits_a^t \left(\alpha^+(t)\beta^+(\xi) + \alpha^-(t)\beta^-(\xi)\right) u(\xi)\, d\xi - \\ - \int\limits_a^t \left(\alpha^+(t)\beta^-(\xi) + \alpha^-(t)\beta^+(\xi)\right) v(\xi)\, d\xi, \\ v(t) \ge f(t) + \int\limits_a^t \left(\alpha^+(t)\beta^+(\xi) + \alpha^-(t)\beta^-(\xi)\right) v(\xi)\, d\xi - \\ - \int\limits_a^t \left(\alpha^+(t)\beta^-(\xi) + \alpha^-(t)\beta^+(\xi)\right) u(\xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{24.2}$$

де

$$\alpha^+(t) = \sup\{\alpha(t), 0\}, \quad \alpha^-(t) = \alpha^+(t) - \alpha(t),$$
$$\beta^+(t) = \sup\{\beta(t), 0\}, \quad \beta^-(t) = \beta^+(t) - \beta(t).$$

За теоремою 22.2 неперервний на $[a,b]$ розв'язок $x^*(t)$ рівняння (24.1) задовольняє нерівності

$$u(t) \le x^*(t) \le v(t). \tag{24.3}$$

В тому випадку, коли $\alpha(t)$, $\beta(t)$ мають вигляд

$$\alpha(t) = \prod_{i=1}^N \alpha_i\left(t^i\right), \quad \beta(t) = \prod_{i=1}^N \beta_i\left(t^i\right), \tag{24.4}$$

розв'язок рівняння (24.1) можна знайти у явному вигляді. Позначимо

$$L_j\left(t^j\right) = \int\limits_{a^j}^{t^j} \alpha_j\left(s^j\right)\beta_j\left(s^j\right) ds^j \quad \left(a^j \le s^j \le b^j, \;\; j = \overline{1,N}\right). \tag{24.5}$$

$$E_N\left(\eta^i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\eta^i}{(i!)^N},$$

$$g(t) = \int\limits_a^t f(\xi)\beta(\xi)\, d\xi, \tag{24.6}$$

$$h^*(t,\xi) = E_N\left(\prod_{j=1}^{N}\left(L_j\left(t^j\right) - L_j\left(\xi^j\right)\right)\right), \quad a \le \xi \le t \le b. \qquad (24.7)$$

Теорема 24.1. *Якщо справджуються співвідношення (24.4), то з існування неперервних при $t \in [a,b]$ функцій $u(t)$, $v(t)$, що задовольняють співвідношення (24.2), випливають для $t \in [a,b]$ оцінки*

$$u(t) \le f(t) + \alpha(t)\, g(t) + \alpha(t)\int_a^t g(s)\,\alpha(s)\,\beta(s)\, h^*(t,s)\, ds \le v(t) \qquad (24.8)$$

з означеними за формулами (24.5)–(24.7) функціями $g(t)$, $h^*(t,s)$.

Доведення. Рівняння (24.1) призводить до рівності

$$w(t) = g(t) + \int_a^t \alpha(s)\,\beta(s)\, w(s)\, ds \qquad (24.9)$$

за допомогою заміни

$$w(t) = \int_a^t \beta(s)\, x(s)\, ds. \qquad (24.10)$$

Єдиний для $t \in [a,b]$ неперервний розв'язок рівняння (24.9) очевидним способом можна записати у вигляді

$$w(t) = g(t) + \int_a^t \alpha(s)\,\beta(s)\, h^*(t,s)\, ds. \qquad (24.11)$$

Оскільки із (24.1) і (24.10) випливає рівність

$$x(t) = f(t) + \alpha(t)\, w(t),$$

то із (24.11) знаходимо

$$x(t) = f(t) + \alpha(t)\, g(t) + \alpha(t)\int_a^t g(s)\,\alpha(s)\,\beta(s)\, h^*(t,s)\, ds.$$

Це у співставленні з (24.3) підтверджує нерівності (24.8).

Функція $E_1(t)$ для $n=1$ має вигляд $E_1(t)=e^t$. При $n=2$ будемо мати $E_2(t)=I_0\left(2\sqrt{t}\right)$ – модифіковану функцію Бесселя нульового порядку.

Виокремимо частковий випадок, який отримується з теореми 24.1 при $\alpha(t)\geq 0$, $\beta(t)\geq 0$.

Наслідок 24.1. *Якщо $\alpha(t)\geq 0$, $\beta(t)\geq 0$ і справджується нерівність*

$$u(t)\leq f(t)+\alpha(t)\int\limits_a^t \beta(s)\,u(s)\,ds$$

$$\left(v(t)\geq f(t)+\alpha(t)\int\limits_a^t \beta(s)\,v(s)\,ds\right),$$

то має місце оцінка

$$u(t)\leq f(t)+\alpha(t)\,g(t)+\alpha(t)\int\limits_a^t g(s)\,\alpha(s)\,\beta(s)\,h^*(t,s)\,ds$$

$$\left(f(t)+\alpha(t)\,g(t)+\alpha(t)\int\limits_a^t g(s)\,\alpha(s)\,\beta(s)\,h^*(t,s)\,ds\leq v(t)\right).$$

Результат, який містить цей наслідок, є загальнішим за N-мірний аналог леми Гронуолла, отриманий В. Вальтером (див. [135, лема III, §19]). Саму лему В. Вальтера отримаємо з наслідку 24.1 при $\alpha(t)\equiv 1$.

Наступні дві теореми можна вважати за узагальнення наслідку 24.1.

Теорема 24.2. *Якщо справджуються умови теореми 24.1 з $\alpha(t)\geq 0$ і задана інтегровна при $t\in[a,b]$ функція $q(t)$ така, що*

$$q(t)=\prod_{j=1}^{N} q_j\left(t^j\right),\;\; q_j\left(t^j\right)\geq 0;\;\; q_j\left(t^j\right)\geq \beta_j\left(t^j\right) \qquad (24.12)$$
$$\left(t_j\in\left[a^j,b^j\right],\, j=\overline{1,N}\right)$$

то при $t \in [a, b]$ *мають місце оцінки*

$$\begin{gathered} u(t) \le x^*(t) \le f(t) + \alpha(t) \int\limits_a^t f(s)\,\beta(s)\,ds + \\ + \alpha(t) \int\limits_a^t b(s)\,\alpha(s)\,q(s) \exp\left[\int\limits_s^t \alpha(\xi)\,q(\xi)\,d\xi\right] ds, \end{gathered} \tag{24.13}$$

де

$$b(t) = \int\limits_a^t f(s)\,q(s)\,ds.$$

Доведення. Очевидно, що для $j = \overline{1, N}$ будемо мати

$$\begin{gathered} L_j\left(t^j\right) - L_j\left(s^j\right) = \int\limits_{a^j}^{t^j} \alpha_j(\xi)\,\beta_j(\xi)\,d\xi - \\ - \int\limits_{a^j}^{s^j} \alpha_j(\xi)\,\beta_j(\xi)\,d\xi = \int\limits_{s^j}^{t^j} \alpha_j(\xi)\,\beta_j(\xi)\,d\xi. \end{gathered} \tag{24.14}$$

Для $z \ge 0$ отримуємо

$$\begin{gathered} E_N(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{(i!)^N} = 1 + z + \frac{z^2}{(2!)^2} + \ldots + \frac{z^N}{(N!)^N} + \ldots \le \\ \le 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^N}{N!} + \ldots = e^z, \end{gathered} \tag{24.15}$$

де z^i – натуральний степінь числа z. Завдяки теоремі 24.1 та співвідношенням (24.12), (24.14), (24.15) можна знайти

$$\begin{gathered} u(t) \le x^*(t) \le f(t) + \alpha(t)\,g(t) + \\ + \alpha(t) \int\limits_a^t g(s)\,\alpha(s)\,\beta(s) \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\int\limits_s^t \alpha(\xi)\beta(\xi)d\xi\right)^i}{(i!)^N}\right) ds \le f(t) + \alpha(t)\,g(t) + \\ + \alpha(t) \int\limits_a^t g(s)\,\alpha(s)\,\beta(s) \left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{\left(\int\limits_s^t \alpha(\xi)\beta(\xi)d\xi\right)^i}{i!}\right) ds = f(t) + \\ + \alpha(t) \int\limits_a^t f(s)\,\beta(s)\,ds + \alpha(t) \int\limits_a^t b(s)\,\alpha(s)\,q(s) \exp\left[\int\limits_s^t \alpha(\xi)\,q(\xi)\,d\xi\right] ds, \end{gathered}$$

що й потрібно було довести.

В умовах цієї теореми можна прийняти, зокрема,

$$q_j(t) = \beta_j^+(t) \quad \left(\beta_j^+(t) = \sup\{\beta_j(t), 0\}, \quad j = \overline{1,N}\right).$$

Теорема 24.3. *Якщо справджуються умови теореми 24.1 з $\beta(t) \geq 0$ і задана інтегровна при $t \in [a,b]$ функція $p(t)$ така, що*

$$p(t) = \prod_{j=1}^{N} p_j\left(t^j\right), \quad p_j\left(t^j\right) \geq 0; \quad p_j\left(t^j\right) \geq \alpha_j\left(t^j\right)$$
$$\left(t_j \in \left[a^j, b^j\right], \; j = \overline{1,N}\right),$$

то при $t \in [a,b]$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} u(t) \leq x(t) \leq f(t) + \alpha(t) \int_a^t f(s)\beta(s)\,ds + \\ + p(t) \int_a^t \left(\int_a^\tau f(s)\beta(s)\,ds\right) p(\tau) \exp\left[\int_\tau^t p(\xi)\beta(\xi)\,d\xi\right] d\tau. \end{aligned} \tag{24.16}$$

Доведення практично не відрізняється від доведення теореми 24.2.

В умовах теореми 24.3 можна, зокрема прийняти

$$p_j(t) = \alpha_j^+(t) \quad \left(\alpha_j^+(t) = \sup\{\alpha_j(t), 0\}, \quad j = \overline{1,N}\right).$$

Приклад 24.1. Розглянемо нерівність

$$u(x,y) \leq \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \int_1^x \int_1^y \frac{t}{s} u(s,t)\,dsdt, \tag{24.17}$$

де всі величини є дійсними числами. Функції $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $\alpha(x,y) = \frac{x}{y}$, $\beta(x,y) = \frac{y}{x}$ є неперервними $x \geq 1$, $y \geq 1$, причому $\beta(x,y) \geq 0$, $\alpha(x,y) \geq 0$ і справджуються співвідношення (24.4). При цьому система нерівностей (24.2) розпадається на дві нерівності. Нерівність (24.17) є однією з них. Отже, можна застосувати теорему 24.2 і з нерівності (24.17) отримати оцінку

$$u(x,y) \leq \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \int_1^x \int_1^y \frac{s}{t} \cdot \frac{t}{s} dsdt +$$

$$+\frac{x}{y}\int_1^x\int_1^y\left(\int_1^s\int_1^t\frac{\xi}{\eta}\cdot\frac{\eta}{\xi}d\eta d\xi\right)\frac{t}{s}\cdot\frac{s}{t}\exp\left[\int_s^t\int_t^y\frac{\xi}{\eta}\cdot\frac{\eta}{\xi}d\eta d\xi\right]dsdt.$$

Після спрощень одержимо

$$u\left(x,y\right)\leq\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\left(x-1\right)\left(y-x\right)+x^2\left(\exp\left[\left(x-1\right)\left(y-1\right)\right]-1\right).$$

Наведені результати для лінійного випадку можна тлумачити як узагальнення нерівностей Гронуолла-Беллмана та нерівностей Вендроффа (див., напр., [13]).

2. Перейдемо до нелінійних інтегральних нерівностей, які часто асоціюють з відомою нерівністю Біхарі.

Розглянемо рівняння

$$x\left(t\right)=c+\int_a^t\beta\left(s\right)g\left(x\left(s\right)\right)ds\quad\left(c=const\right),\tag{24.18}$$

де $\beta\left(t\right)=\beta_1\left(t\right)-\beta_2\left(t\right)$, $\beta_1\left(t\right),\beta_2\left(t\right)$ є неперервними невід'ємними при $t\in[a,b]$ функціями. Вважатимемо, що $g\left(x\right)$ – неперервна неспадна строго додатна при $x\in\left(\lambda_0,\lambda_1\right)$ функція. Як і раніше $a=\left\{a^1,\ldots,a^N\right\}$, $b=\left\{b^1,\ldots,b^N\right\}$, $t=\left\{t^1,\ldots,t^N\right\}$. Нехай: 1) неперервні функції $u\left(t\right)$, $v\left(t\right)$ при $t\in[a,b]$ задовольняють нерівності

$$\begin{aligned}u\left(t\right)&\leq c+\int_a^t\beta_1\left(s\right)g\left(u\left(s\right)\right)ds-\int_a^t\beta_2\left(s\right)g\left(v\left(s\right)\right)ds,\\ v\left(t\right)&\geq c+\int_a^t\beta_1\left(s\right)g\left(v\left(s\right)\right)ds-\int_a^t\beta_2\left(s\right)g\left(u\left(s\right)\right)ds;\end{aligned}\tag{24.19}$$

2) система рівнянь

$$\begin{aligned}y\left(t\right)&=c+\int_a^t\beta_1\left(s\right)g\left(y\left(s\right)\right)ds-\int_a^t\beta_2\left(s\right)g\left(z\left(s\right)\right)ds,\\ z\left(t\right)&=c+\int_a^t\beta_1\left(s\right)g\left(z\left(s\right)\right)ds-\int_a^t\beta_2\left(s\right)g\left(y\left(s\right)\right)ds\end{aligned}\tag{24.20}$$

має єдиний розв'язок $\left(y\left(t\right),z\left(t\right)\right)$ такий, що $y\left(t\right)=z\left(t\right)$ і функція $x\left(t\right)=y\left(t\right)=z\left(t\right)$ – неперервна при $t\in[a,b]$; 3) задана достатньо гладка неспадна функція $G(x) \quad (x \in (\lambda_0, \lambda_1))$ така, що для всякої достатньо гладкої функції $x(t)$, для якої $x(a) = c$, або бодай для будь-якого розв'язку $x(t)$ рівняння (24.18) будемо мати

$$\frac{\partial^N G(x)}{\partial t^1 \dots \partial t^N} \leq \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{\partial^N x}{\partial t^1 \dots \partial t^N}. \tag{24.21}$$

Теорема 24.4. *Якщо справджуються умови 1)–3), то з нерівностей (24.19) випливає оцінка*

$$G(u(t)) \leq G(c) + \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, ds. \tag{24.22}$$

Доведення. Диференціюємо N раз обидві частини рівності (24.18). Отримуємо

$$\frac{\partial^N x}{\partial t^1 \dots \partial t^N} = \beta(t)\, g(x(t)). \tag{24.23}$$

Зважаючи на те, що $g(x) > 0$, і скориставшись з (24.21), звідси знаходимо

$$\frac{\partial^N G(x)}{\partial t^1 \dots \partial t^N} \leq \beta(t).$$

Інтегруючи N разів цю нерівність, будемо мати

$$G(x) \leq G(c) + \int\limits_{a}^{t} \beta(s)\, ds. \tag{24.24}$$

Зважаючи на те, що справджуються умови теореми 22.4 й тому $u(t) \leq x(t) \leq v(t) \quad (t \in [a, b])$ та що функція $G(x)$ – неспадна, з нерівності (24.24) одержуємо оцінку (24.22). Теорему доведено.

Якщо в (24.21) маємо протилежну нерівність, тобто,

$$\frac{\partial^N G(x)}{\partial t^1 \dots \partial t^N} \geq \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{\partial^N x}{\partial t^1 \dots \partial t^N}, \tag{24.25}$$

то з нерівностей (24.19) випливає оцінка

$$G(v(t)) \geq G(c) + \int\limits_{a}^{t} \beta(s)\, ds. \tag{24.26}$$

Якщо, зокрема, $\beta_2(t) = 0$, то з нерівності

$$u(t) \le c + \int_a^t \beta(s)\, g(u(s))\, ds$$

при збереженні інших умов теореми 24.4 випливає оцінка (24.22). За тих самих припущень при $\beta_2(t) = 0$ з нерівності

$$v(t) \ge c + \int_a^t \beta(s)\, g(v(s))\, ds$$

випливає нерівність (24.26).

Зауваження 24.1. *Припущення про те, що $c = const$ в умовах теореми 24.4 можна замінити, зберігши як саме формулювання її, так і основні міркування у доведенні, слабкішим припущенням*

$$c(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \left(t_0^j - t^j\right),$$

де $c_i = const$.

3. Розглянемо випадок $N = 2$ дещо докладніше. Нехай рівняння (24.18) має вигляд

$$z(x,y) = c + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \beta(t,s)\, g(z(t,s))\, dsdt, \tag{24.27}$$

де $\beta(t,s) \ge 0$ при $x \ge x_0$, $y \ge y_0$. Нехай $g(z)$ – двічі неперервно диференційовна неспадна строго додатна функція при $z \in R^1$, $z \ge c$. Диференціюючи один раз (24.27) за x та за y, матимемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int_{y_0}^{y} \beta(x,s)\, g(z(x,s))\, ds, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \beta(t,y)\, g(z(t,y))\, dt. \tag{24.28}$$

З додатності $\beta(x,y)$, $g(z)$ випливає $\frac{\partial z}{\partial x} \geq 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} \geq 0$, а з монотонності і диференційовності $g(z)$, маємо також $g'_z = \frac{dg}{dz} \geq 0$. Приймемо

$$G(z) = \int\limits_c^z \frac{d\lambda}{g(\lambda)} \quad (z \geq c) \tag{24.29}$$

і продиференціюємо цю рівність. З урахуванням рівності (24.27) будемо мати

$$\frac{\partial^2 G(z)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(G'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{g(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) =$$

$$= -\frac{g'_z}{g^2(z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{g(z)} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \leq \frac{1}{g(z)} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

для всякого розв'язку $z(x,y)$ рівняння (24.27). Крім того, функція $G(z)$, означена за (24.29), не спадає при $z \geq c$. Отже, за теоремою 24.4 можна зробити висновок про правдивість оцінки

$$G(u) \leq G(c) + \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{y_0}^{y} \beta(t,s)\, dt ds.$$

Цей результат співпадає з основним результатом Р. Гутовського [121].

В тому випадку, коли $g(z) = z$, можна прийняти $G(z) = \ln z$ й тоді з теореми 24.4 випливає нерівність

$$u(x,y) \leq c e^{\int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{y_0}^{y} \beta(t,s) dt ds},$$

відома як нерівність Вендроффа (див. [13]).

Подібним способом з теореми 24.4 можна отримати й інші як відомі вже так і нові оцінки розв'язків інтегральних нерівностей Вальтера з багатьма незалежними змінними.

4. Наведені результати, зокрема, теорема 24.4, є частковими випадками загальніших теорем. Задля прикладу сформулюємо одну з таких теорем, де не вимагатимемо монотонності $g(z)$.

Теорема 24.5. *Нехай: 1) задана неспадна щодо y, незростаюча щодо z функція $\varphi(y,z)$, причому маємо $\varphi(x,x) > 0$, для якої*

$\varphi(x,x) = g(x)$; 2) справджується умова 3) теореми 24.4; 3) система рівнянь

$$y(t) = c + \int\limits_a^t \beta_1(s)\,\varphi(y(s), z(s))\,ds - \int\limits_a^t \beta_2(s)\,\varphi(z(s), y(s))\,ds,$$
$$z(t) = c + \int\limits_a^t \beta_1(s)\,\varphi(z(s), y(s))\,ds - \int\limits_a^t \beta_2(s)\,\varphi(y(s), z(s))\,ds$$

має єдиний неперервний при $t \in [a,b]$ розв'язок $(y(t), z(t))$. Тоді з правдивості при $t \in [a,b]$ нерівностей

$$u(t) \le c + \int\limits_a^t \beta_1(s)\,\varphi(u(s), v(s))\,ds - \int\limits_a^t \beta_2(s)\,\varphi(v(s), u(s))\,ds,$$
$$v(t) \ge c + \int\limits_a^t \beta_1(s)\,\varphi(v(s), u(s))\,ds - \int\limits_a^t \beta_2(s)\,\varphi(u(s), v(s))\,ds$$

випливає оцінка (24.22) для $t \in [a,b]$.

Доведення теореми в суттєвому від доведення теореми 24.4 не відрізняється.

Наведемо приклад ще однієї теореми для рівняння Вольтерра з монотонною правою частиною. Розглянемо рівняння

$$w(x,y) = f(x,y) + \alpha(x,y) \int\limits_0^x \int\limits_0^y \beta(t,s)\, g(w(t,s))\, dsdt,$$

де $\beta(x,y)$ – неперервна невід'ємна при $x \in [0,T_1]$, $y \in [0,T_2]$ функція, $g(\lambda)$ – неперервна неспадна строго додатня при $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$ функція, функції $f(x,y)$, $\alpha(x,y)$ вважатимемо достатньо гладкими.

Теорема 24.6. *Нехай: 1) задана така неперервна функція $h(x,y)$, що для всякої неперервної функції $z(x,y)$ справджується нерівність*

$$\frac{\partial^2\alpha(x,y)}{\partial x\partial y} \int\limits_0^x \int\limits_0^y \beta(t,s)\, g(z(t,s))\, dsdt + \frac{\partial\alpha(x,y)}{\partial x} \int\limits_0^x \beta(t,y)\, g(z(t,y))\, dt +$$
$$+ \frac{\partial\alpha(x,y)}{\partial y} \int\limits_0^y \beta(x,s)\, g(z(x,s))\, ds + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} \le h(x,y)\, g(z(x,y));$$

2) задана достатньо гладка неспадна функція $G(z)$ така, що для всякої достатньо гладкої функції $z(x,y)$, яка задовольняє рівності

$$z(0;0) = f(0;0), \quad z(0;y) = f(0;y), \quad z(x;0) = f(x;0),$$

або бодай для всякого неперервного розв'язку $z(x,y)$ рівняння, яке розглядаємо, справджується нерівність

$$\frac{\partial^2 G(z)}{\partial x \partial y} \le \frac{1}{g(z)} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};$$

3) справджується нерівність

$$u(x,y) \le f(x,y) + \alpha(x,y) \int\limits_0^x \int\limits_0^y \beta(t,s)\, g(u(t,s))\, dsdt$$

з неперервною функцією $u(x,y)$. Тоді має місце оцінка

$$G(u(x,y)) \le G(f(x,0)) + G(f(0,y)) - G(f(0;0)) +$$
$$+ \int\limits_0^x \int\limits_0^y (h(t,s) + \alpha(t,s)\,\beta(t,s))\, dtds.$$

Доведення. Можна скористатися із схеми доведення теореми 24.4.

Теорема 24.6 містить загальніший результат за відповідний результат Д. Байнова (див., напр., [10, 124]).

Основні результати, подані тут, які стосуються нелінійних інтегральних нерівностей з операторами Вольтерра з багатьма незалежними змінними, ґрунтуються на тому факті, що постулювання властивостей функції $G(x)$ дає змогу, варіюючи її конструкцією, отримувати як відомі, так і нові нерівності, які є аналогами та узагальненнями нерівностей Біхарі та Вольтерра.

Приклад 24.2. Розглянемо рівняння

$$z(x,y) = c + \int\limits_{x_0}^x \int\limits_{y_0}^y e^{t-x_0+s-y_0} z^4(t,s)\, dtds \quad (c>0). \tag{24.30}$$

Очевидно, що $g(z) = z^4$ є неперервною монотонною строго додатною при $z \ge c$ функцією, $\beta(x,y) = e^{x-x_0+y-y_0}$ – неперервна додатня функція. Можна прийняти $G(z) = -\frac{1}{3z^3}$, бо в такому разі

$$\frac{\partial^2 G(z)}{\partial x \partial y} = G''_{zz} \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + G'_z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4z^3}{z^8} \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z^4} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \le \frac{1}{z^4} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

для всякого неперервного розв'язку $z(x,y)$ рівняння (24.30). Тому з нерівності

$$u(x,y) \le c + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} e^{t-x_0+s-y_0} u^4(t,s)\,dtds$$

випливає оцінка

$$-\frac{1}{3u^3(x,y)} \le -\frac{1}{3c^3} + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} e^{t-x_0+s-y_0} dsdt,$$

з якої випливає

$$u(x,y) \le c\left(1 - 3c^3\left(e^{x-x_0}-1\right)\left(e^{y-y_0}-1\right)\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

Приклад 24.3. Розглянемо знову рівняння (24.30), будемо вважати, що $c > 1$. У цьому випадку можна прийняти $G(z) = z$, бо

$$\frac{\partial^2 G(z)}{\partial x \partial y} = G''_{zz}\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + G'_z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \ge \frac{1}{z^4(x,y)}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

для всякого розв'язку $z(x,y)$ рівняння (24.30). За теоремою 24.4 з нерівності

$$v(x,y) \ge c + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} e^{t-x_0+s-y_0} v^4(t,s)\,dsdt \tag{24.31}$$

за цих обставин випливає нерівність

$$v(x,y) \ge c + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} e^{t-x_0+s-y_0} dsdt \ge c + \left(e^{x-x_0}-1\right)\left(e^{y-y_0}-1\right).$$

Зазначимо додатково, що при $c \ge m^{-\frac{1}{m+3}}$ можна прийняти $G(z) = z^m$ $(m \ge 1)$. Тоді з нерівності (24.31) випливає оцінка

$$v(x,y) \ge \left(c^m + \left(e^{x-x_0}-1\right)\left(e^{y-y_0}-1\right)\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Приклад 24.4. Нехай рівняння (24.18) має вигляд

$$z(x,y,w) = c + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{w_0}^{w} \beta(t,s,\gamma) g(z(t,s,\gamma))\, d\gamma ds dt, \qquad (24.32)$$

де $c > 0$, $\beta(x,y,w)$ – неперервна невід'ємна при $x \geq x_0$, $y \geq y_0$, $w \geq w_0$ функція, функція $g(z)$ при $z \geq 0$ є неперервною неспадною строго додатньою. Якщо $g(z) = \frac{z}{z+1} \quad (z \geq c)$, то можна прийняти $G(z) = z$, бо

$$\frac{\partial^3 G(z)}{\partial x \partial y \partial w} = G'''_{zzz}\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial w} + G''_{zz}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial w}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial w}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) +$$
$$+ G'_z \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z} \leq \frac{1}{g(z)}\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z}$$

для всякого диференційовного достатню кількість разів розв'язку $z(x,y)$ рівняння (24.32). За теоремою 24.4 з нерівності

$$u(x,y,w) \leq c + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{w_0}^{w} \beta(t,s,\gamma)\frac{u(t,s,\gamma)}{1+u(t,s,\gamma)} d\gamma ds dt$$

випливає оцінка

$$u(x,y,w) \leq c + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{w_0}^{w} \beta(t,s,\gamma) d\gamma ds dt.$$

В тому випадку, коли $g(z) = z^2$, $c \geq m^{-\frac{1}{1+m}} \quad (m \geq 2)$, можна прийняти $G(z) = z^m$. Тоді з нерівності

$$v(x,y,w) \geq c + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{w_0}^{w} \beta(t,s,\gamma)\, v^2(t,s,\gamma) d\gamma ds dt$$

випливає оцінка

$$v(x,y,w) \geq \left(c + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{w_0}^{w} \beta(t,s,\gamma) d\gamma ds dt\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Наведемо ще кілька результатів для випадку $N = 1$, які повторюють за суттю деякі з результатів із [103].

Нехай $[a, b]$ – сегмент на дійсній осі ($-\infty < a < b < \infty$). На $[a, b]$ розглядатимемо рівняння

$$x(t) = f(t) + \alpha(t) \int\limits_a^t (\beta(s) - \gamma(s))\, g(x(s))\, ds, \tag{24.33}$$

де $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ – неперервні невід'ємні на $[a, b]$ функції, $g(x)$ – неперервна неспадна і строго додатня при $x \in (\lambda_0, \lambda_1)$, $f(t)$ – неперервна при $t \in [a, b]$; всі функції приймають дійсні значення. Нехай неперервні при $t \in [a, b]$ функції $u(t)$, $v(t)$ задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} u(t) &\le f(t) + \alpha(t) \int\limits_a^t \beta(s) g(u(s))\, ds - \alpha(t) \int\limits_a^t \gamma(s) g(v(s))\, ds, \\ v(t) &\ge f(t) + \alpha(t) \int\limits_a^t \beta(s) g(v(s))\, ds - \alpha(t) \int\limits_a^t \gamma(s) g(u(s))\, ds. \end{aligned} \tag{24.34}$$

Нехай система рівнянь

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) + \alpha(t) \int\limits_a^t \beta(s) g(y(s))\, ds - \alpha(t) \int\limits_a^t \gamma(s) g(z(s))\, ds, \\ z(t) &= f(t) + \alpha(t) \int\limits_a^t \beta(s) g(z(s))\, ds - \alpha(t) \int\limits_a^t \gamma(s) g(y(s))\, ds \end{aligned} \tag{24.35}$$

має єдиний неперервний на $[a, b]$ розв'язок $(y(t), z(t))$. Очевидно, що $y(t) = z(t) = x(t)$, якщо $x(t)$ – єдиний неперервний на $[a, b]$ розв'язок рівняння (24.33). Ясно, що коли існує неперервний на $[a, b]$ розв'язок $x(t)$ рівняння (24.33), то $(x(t), x(t))$ є єдиним неперервний розв'язком системи (24.35). Тоді на $[a, b]$ мають місце нерівності

$$u(t) \le x(t) \le v(t). \tag{24.36}$$

Припустимо, що існують похідні $f'(t)$, $\alpha'(t)$. Позначивши

$$h(t) = \int\limits_a^t (\beta(s) - \gamma(s))\, g(x(s))\, ds \tag{24.37}$$

та скориставшись з (24.33), можна отримати

$$(f(t)+\alpha(t)\,h(t))' = \alpha(t)\,(\beta(t)-\gamma(t))\,g(x(t)) + \alpha'(t)\,h(t) = f'(t)\,.$$

Це означає, що

$$x'(t) = \alpha(t)\,(\beta(t)-\gamma(t))\,g(x(t)) + \alpha'(t)\,h(t) + f'(t)\,. \tag{24.38}$$

Додатково припустимо, що існують неперервні функції $\lambda(t)$, $H(t)$, для яких

$$\begin{gathered} f'(t){+}\alpha'(t)h(t){=}f'(t){+}\alpha'(t)\int\limits_a^t(\beta(s)-\gamma(s))\,g(\lambda(s))\,ds{\le} \\ \leqslant H(t)g(\lambda(t))\,. \end{gathered} \tag{24.39}$$

Тоді

$$x'(t) \le (\alpha(t)\,(\beta(t)-\gamma(t)) + H(t))\,g(x(t))\,.$$

Оскільки $g(\lambda) > 0$, то звідси

$$\frac{dx}{g(x)} \le (H(t) + \alpha(t)\,(\beta(t)-\gamma(t)))\,dt,$$

що призводить завдяки лівій із нерівностей (24.36) до оцінки

$$G(u(t)) \le G(f(a)) + \int\limits_a^t (H(s)+\alpha(s))\,(\beta(s)-\gamma(s))\,ds, \tag{24.40}$$

у якій функція $G(x)$ для $x > x_0$, $x, x_0 \in (\lambda_0, \lambda_1)$ означена за допомогою рівності

$$G(x) = \int\limits_{\lambda_0}^{x} \frac{d\lambda}{g(\lambda)}. \tag{24.41}$$

Цим доведено таке твердження.

Теорема 24.7. *Нехай: 1) $g(\lambda)$ – неперервна монотонна строго додатна при $x \in (\lambda_0, \lambda_1)$ функція, $f(t)$, $\alpha(t)$ – неперервно диференційовні невід'ємні на $[a,b]$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ – неперервні невід'ємні при $t \in [a,b]$ функції, $\alpha(t) \ge 0$; 2) задана неперервна на $[a,b]$*

функція $H(t)$ *така, що для всякої неперервної на* $[a,b]$ *функції* $\lambda(t)$ *справджується нерівність (24.39); 3) система рівнянь має має єдиний на* $[a,b]$ *неперервний розв'язок. Тоді з нерівностей (24.34) випливає оцінка (24.40).*

Сформулюємо дещо загальніший результат. Нехай: *1) неперервна строго додатна дійсна функція* $\varphi(y,z) \quad (y,z \in (\lambda_0,\lambda_1))$ *не спадає щодо* y*, не зростає щодо* z*; 2) на сегменті* $[a,b]$ *задані неперервні дійсні функції* $\alpha(t) \geq 0$*,* $\beta(t) \geq 0$*,* $f(t)$*, причому існують неперервні похідні* $f'(t)$*,* $\alpha'(t)$*; 3) задані неперервні функції* $u(t)$*,* $v(t)$ *при* $t \in [a,b]$ *задовольняють нерівності*

$$\begin{aligned} u(t) &\leq f(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s)\,\varphi(u(s), v(s))\,ds, \\ v(t) &\geq f(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s)\,\varphi(v(s), u(s))\,ds; \end{aligned} \tag{24.42}$$

4) система

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s)\,\varphi(y(s), z(s))\,ds, \\ z(t) &= f(t) + \alpha(t) \int_a^t \beta(s)\,\varphi(v(s), u(s))\,ds \end{aligned} \tag{24.43}$$

має єдиний неперервний на $[a,b]$ *розв'язок; 5) існує неперервна на* $[a,b]$ *функція* $H(t)$ *така, що для всякої неперервної на* $[a,b]$ *функції* $\lambda(t)$ *справджується нерівність*

$$f'(t) + \alpha'(t) \int_a^t \beta(s)\,\varphi(\lambda(s), \lambda(s))\,ds \leq H(t)\,\varphi(\lambda(t), \lambda(t)). \tag{24.44}$$

Теорема 24.8. *Якщо виконані умови 1)-5), то справджується оцінка*

$$G(u(t)) \leq G(f(a)) + \int_a^t (H(s) + \alpha(s)\,\beta(s))\,ds, \tag{24.45}$$

де функція $G(x)$ означена для $x \geq \lambda_0$, $x \in (\lambda_0, \lambda_1)$ за допомогою формули

$$G(x) = \int_{\lambda_0}^{x} \frac{d\lambda}{\varphi(\lambda, \lambda)}. \tag{24.46}$$

Доведення можна провести за аналогічною до схеми доведення теореми 24.7 методикою. З єдиності розв'язку системи (24.43) випливає єдиність розв'язку $x(t)$ рівняння

$$x(t) = f(t) + \alpha(t) \int_{a}^{t} \beta(s)\, \varphi(x(s), x(s))\, ds. \tag{24.47}$$

Тому мають місце нерівності (24.36). Зокрема, з першої з них випливає

$$u(t) \leq x(t) = f(t) + \alpha(t) \int_{a}^{t} \beta(s)\, \varphi(x(s), x(s))\, ds. \tag{24.48}$$

Після диференціювання рівності (24.47) і використання умови 5), отримуємо

$$x'(t) \leq (H(t) + \alpha(t)\, \beta(t))\, \varphi(x(t), x(t)).$$

Отже,

$$G(x(t)) \leq G(f(a)) + \int_{a}^{t} (H(s) + \alpha(s)\, \beta(s)) ds.$$

Звідси з огляду на (24.48) отримуємо потрібну нерівність (24.45). Теорему доведено.

Якщо в (24.44) маємо протилежну нерівність, то замість (24.45) будемо мати

$$G(v(t)) \geq G(f(a)) + \int_{a}^{t} (H(s) + \alpha(s)\, \beta(s))\, ds.$$

Доведення таке саме, як і доведення теореми 24.8, якщо замість лівої з нерівностей (24.36) скористатися правою з них.

Теорему 24.8 можна узагальнити, наприклад, у такий спосіб, щоб замість функції $\beta(t)$ розглядати в умовах теореми 24.8 функцію $\beta(t)-\gamma(t)$, якщо для $\beta(t)$ і $\gamma(t)$ вимагати тих самих обмежень, яким підпорядкована функція $\beta(t)$ в умовах цієї теореми. При цьому відповідним чином потрібна змінити співвідношення (24.43)-(24.45), маючи на увазі формальний синтез умов теореми 24.7 та 24.8. Деталі формулювання отриманого у такий спосіб твердження пропускаємо.

Наведемо ще два твердження, які у той чи інший спосіб узагальнюють попередні дві теореми. Спочатку розглянемо таку ситуацію. Нехай: *1) задані неперервні неспадні щодо y незростаючі щодо z функції $\varphi(y,z)$, $F(y,z)$, причому при $y,z\in(\lambda_0,\lambda_1)$ маємо $\varphi(y,z)>0$; 2) $\beta(t)$ – неперервна невід'ємна при $t\in[a,b]$ функція; 3) неперервні функції $u(t)$, $v(t)$ при $t\in[a,b]$ задовольняють нерівності*

$$\begin{aligned}&u(t)\le F(c+\int\limits_a^t\beta(s)\varphi(u(s),v(s))\,ds,c+\\&+\int\limits_a^t\beta(s)\varphi(v(s),u(s))\,ds),\\&v(t)\ge F(c+\int\limits_a^t\beta(s)\varphi(v(s),u(s))\,ds,c+\\&+\int\limits_a^t\beta(s)\varphi(u(s),v(s))\,ds);\end{aligned}\tag{24.49}$$

4) система рівнянь

$$\begin{aligned}&y(t)=F(c+\int\limits_a^t\beta(s)\varphi(y(s),z(s))\,ds,c+\\&+\int\limits_a^t\beta(s)\varphi(z(s),y(s))\,ds),\\&z(t)=F(c+\int\limits_a^t\beta(s)\varphi(z(s),y(s))\,ds,c+\\&+\int\limits_a^t\beta(s)\varphi(y(s),z(s))\,ds)\end{aligned}\tag{24.50}$$

має єдиний неперервний при $t\in[a,b]$ розв'язок.

Теорема 24.9. *Нехай справджуються щойно сформульовані умови 1)-4). Тоді мають місце оцінки*

$$u(t) \le \Phi\left(G^{-1}\left(G(\Phi(c)) + \int\limits_a^t \beta(s)\,ds\right)\right) \le v(t), \qquad (24.51)$$

де G^{-1} – обернена до G функція,

$$G(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\lambda}{\varphi(F(\lambda,\lambda), F(\lambda,\lambda))} \quad (x_0, x \in (\lambda_0, \lambda), \ x \ge x_0),$$

$$\Phi(x) = F(x,x),$$

і $G(\Phi(c)) + \int\limits_a^t \beta(s)\,ds$ належить області існування G^{-1}.

Доведення. Розглядаючи рівняння

$$x(t) = F(c + \int\limits_a^t \beta(s)\varphi(x(s), x(s))\,ds, c+ \\ + \int\limits_a^t \beta(s)\varphi(x(s), x(s))\,ds),$$

позначимо

$$h(t) = c + \int\limits_a^t \beta(s)\varphi(x(s), x(s))\,ds,$$

й отримаємо

$$x(t) = \Phi(h(t)), \qquad (24.52)$$

що зрештою призводить до рівностей

$$h'(t) = \beta(t)\varphi(\Phi(h(t)), \Phi(h(t))), \quad h(a) = c.$$

Звідси

$$G(h(t)) - G(h(a)) = \int\limits_a^t \beta(s)\,ds,$$

$$h(t) = G^{-1}\left[G(h(a)) + \int\limits_a^t \beta(s)\,ds\right].$$

Це з огляду на (24.37), (24.52) означає, що теорему доведено.

Нехай тепер: *1)* $k(t,s) \ge 0$, $f(t)$ *– неперервні при* $t, s \in [a,b]$*; 2) функція* $\varphi(y,z) > 0$ *неперервна при* $y, z \in (\lambda_0, \lambda_1)$ *не спадає щодо* y*, не зростає щодо* z*, функція* $F(y,z)$ *не спадає щодо* y*, не зростає щодо* z *і неперервна за сукупністю аргументів; 3) неперервні функції* $u(t)$*,* $v(t)$ *задовольняють при* $t \in [a,b]$ *нерівності*

$$\begin{aligned}
&u(t) \le F(f(t) + \int\limits_a^t k(t,s)\,\varphi(u(s), v(s))\,ds, f(t) + \\
&+ \int\limits_a^t k(t,s)\,\varphi(v(s), u(s))\,ds), \\
&v(t) \ge F(f(t) + \int\limits_a^t k(t,s)\,\varphi(v(s), u(s))\,ds, f(t) + \\
&+ \int\limits_a^t k(t,s)\,\varphi(u(s), v(s))\,ds);
\end{aligned}$$

4) система рівнянь

$$\begin{aligned}
&y(t) = F(f(t) + \int\limits_a^t k(t,s)\,\varphi(y(s), z(s))\,ds, f(t) + \\
&+ \int\limits_a^t k(t,s)\,\varphi(z(s), y(s))\,ds), \\
&z(t) = F(f(t) + \int\limits_a^t k(t,s)\,\varphi(z(s), y(s))\,ds, f(t) + \\
&+ \int\limits_a^t k(t,s)\,\varphi(y(s), z(s))\,ds)
\end{aligned}$$

має єдиний неперервний на $[a,b]$ *розв'язок.*

Теорема 24.10. *Якщо справджуються щойно сформульовані умови 1)-4), то має місце оцінка*

$$u(t) \le \Phi\left(G^{-1}\left(G\left(\bar{f}(t)\right) + \int\limits_a^t \bar{k}(t,s)\,ds\right)\right),$$

де

$$\Phi(x) = F(x, x),$$

$$\bar{f} = \bar{f}(t) = \sup_{\sigma\in[a,t]} f(\sigma), \quad \bar{k}(t,s) = \sup_{\sigma\in[a,t]} \bar{k}(\sigma, s),$$

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\lambda}{\varphi(F(\lambda,\lambda), F(\lambda,\lambda))} \quad (x_0, x \in (\lambda_0, \lambda_1), \ x \geq x_0),$$

якщо тільки $G\left(\bar{f}(t)\right) + \int_a^t \bar{k}(t,s)\,ds$ *належить до області існування функції* G^{-1}*, оберненої до* G.

Доведення можна провести за схемою, подібною до схеми доведення теореми 24.9.

Якщо в умовах теореми 24.9 функція $F(y,z)$ не залежить від z, то з теореми 24.9 випливає відповідний результат із [57] (див. [57], теорема 19.4 та 19.5). З теореми 24.10 за такого ж припущення щодо $F(y,z)$ отримується теорема 19.6 із [57].

Зауваження 24.2. *Майже очевидним способом можна отримати аналоги наведених тут теорем для односторонньо ліпшицієвих операторів у правих частинах відповідних рівнянь. На докладнішому формулюванні таких тверджень не зупиняємося, бо їх легко сконструювати на основі наведених тут результатів. Зазначимо також, що наведені тут результати охоплюють численні результати щодо інтегральних нерівностей, опублікованих іншими авторами (див. також [57]).*

5. Перейдемо до оцінки розв'язків дещо загальніших за (24.19) рівнянь вигляду

$$x(t) = \varphi\left(t, \int_{t_0}^{t} \beta(s)\, g(s, x(s))\, ds\right). \tag{24.53}$$

Будемо спочатку припускати, що всі функції в (24.53) є дійсними, $t_0 = \left\{t_0^1, \dots t_0^N\right\}$, $T_0 = \left\{T_0^1, \dots T_0^N\right\}$, $t_0 \leq t \leq T$, де нерівності, як і раніше, розуміємо як покоординатні: $t_0^i \leq t^i \leq T^i \quad \left(i = \overline{1, N}\right)$. Припускатимемо, що: 1) $\beta(t) \geq 0$; 2) $g(t,x) > 0$; 3) $\varphi(t,x)$, $g(t,x)$

не спадають щодо x. Мова йтиме про порівняння розв'язку $x^*(t)$ рівняння (24.53) з розв'язком $u(t)$ нерівності

$$u(t) \leq \varphi\left(t, \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, g(s, u(s))\, ds\right). \tag{24.54}$$

Позначимо

$$w(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, g(s, u(s))\, ds.$$

Тоді

$$u(t) \leq \varphi(t, w(t)). \tag{24.55}$$

Завдяки умові 3) маємо

$$w(t) \leq \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, g(s, \varphi(s, w(s)))\, ds. \tag{24.56}$$

Отже, для знаходження оцінки розв'язку $u(t)$ нерівності (24.54) можна скористатися оцінкою розв'язку $w(t)$ нерівності (24.56). Припустимо, задля спрощення міркувань, що всі функції, які містяться в (24.54) і (24.56), є неперервними при $t \in [t_0, T]$. Припустимо також, що: *4) на* $[t_0, T]$ *рівняння*

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, g(s, \varphi(s, y(s)))\, ds \tag{24.57}$$

має єдиний розв'язок $y(t)$. З теореми 22.2 випливає оцінка

$$w(t) \leq y(t) \quad (t \in [t_0, T]). \tag{24.58}$$

Розв'язок $y(t)$ рівняння (24.57) в загальному вигляді вдається знайти далеко не завжди для $N = 1$, а тим паче для $N \geq 2$, бо тільки у виняткових випадках можна розв'язати у загальному вигляді відповідне диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^N y(t)}{\partial t^1 \ldots \partial t^N} = \beta(t)\, g(t, \varphi(t, y(t))). \tag{24.59}$$

Тому нерідко доцільно, наприклад, для застосувань у лінійній теорії, обмежитися оцінкою його розв'язку зверху.

Припустимо: *5) існує достатньо гладка функція* $G(t,y)$*, для якої*

$$\frac{\partial^N G(t,y(t))}{\partial t^1 \ldots \partial t^N} \le \frac{1}{g(t,\varphi(t,y(t))} \cdot \frac{\partial^N y(t)}{\partial t^1 \ldots \partial t^N}, \quad G(0,0)=0 \qquad (24.60)$$

для всякої достатньо гладкої функції $y(t)$ *або бодай для всякого розв'язку рівняння (24.57).* З огляду на припущення 2) і 4) теореми 24.7 із (24.59), (24.60) випливає

$$\frac{\partial^N G(t,y(t))}{\partial t^1 \ldots \partial t^N} \le \beta(t),$$

тобто,

$$G(t,y(t)) \le \int_{t_0}^{t} \beta(s)\,ds. \qquad (24.61)$$

Теорема 24.11. *Нехай справджуються умови 1)-5) та: 6) існує* $\tilde{T} \in (t_0,T]$ *таке, що рівність* $G(t,y)=\lambda$ *визначає неспадну щодо* λ *(явну або неявну) функцію* $H(t,\lambda)$ *при* $t \in \left[t_0,\tilde{T}\right]$, $\lambda \ge 0$. *Тоді має місце оцінка*

$$u(t) \le \varphi\left(t, H\left(t, \int_{t_0}^{t} \beta(s)\,ds\right)\right) \quad \left(t \in \left[t_0,\tilde{T}\right]\right). \qquad (24.62)$$

Доведення. З наведених перед формулюванням теореми міркувань, які призводять до оцінки (24.61), випливає, що

$$y(t) \le H\left(t, \int_{t_0}^{t} \beta(s)\,ds\right).$$

Звідси, завдяки (24.55) та (24.58), отримуємо (24.62). Теорему доведено.

У тому випадку, коли нерівність (24.54) має вигляд

$$u(t) \le \varphi\left(c + \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, g(u(s))\, ds\right) \quad (c = const),$$

за виконання умов теореми 24.11, причому функція $G(t,x)$ не залежить від t, нерівність набуває вигляду

$$u(t) \le \varphi\left[G^{-1}\left(G(c) + \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, ds\right)\right], \tag{24.63}$$

де G^{-1} – обернена до G функція.

Якщо $\varphi(t,x)$ має вигляд $\varphi(t,x) \equiv x$, нерівність (24.63) співпадає (див. також [111]) з нерівністю (24.22), яка узагальнює результат Р.Гутовського [121]. Зазначимо, що в [121] розглядався тільки випадок $N = 2$ з функціями g і G спеціального вигляду, а також те, що для $N = 1$ і $g(t,x)$, $G(t,x)$, які не залежать від t, умова 5) справджується, якщо виконуються умови 1)-4). При цьому обидва співвідношення (24.60) є рівностями. З теореми 24.9 випливають оцінки, котрі навіть при $N = 1$ є загальнішими за відповідний результат з [121] (див. [65]), який узагальнює нерівність Біхарі (див., напр., [13, 92]). При $N = 2$ з теореми 24.9 отримуються також відповідні результати з [135] та [111], а також нерівності Вольтерра [13].

Дещо змінивши у міркуваннях, котрі використані для доведення теореми 24.11, можна отримати узагальнення цієї теореми.

Теорема 24.12. *Нехай замість умови 3) теореми 24.11 справджується умова: 3') $\varphi(t,x)$ та $\varphi\left(t, \int\limits_{t_0}^{t} \beta(s)\, g(s,x)\, ds\right)$ не спадають щодо x. Якщо справджується решта умов теореми 24.9, то зберігається твердження цієї теореми.*

Можна довести і такий результат.

Теорема 24.13. *Якщо обидва співвідношення (24.60) є рівностями, а замість умови 3) маємо умову: 3”) права частина у нерівності (24.54) не спадає щодо u, то з виконання інших* *припущень теореми 24.11 нерівність (24.54) призводить до нерівності (24.62).*

Ця теорема також узагальнює основний результат з [65], який належить С. Г. Део (див. бібліографію в [57, 65]).

Обидві попередні теореми є частковими випадками загальнішого твердження.

Теорема 24.14. *Припустимо, що у рівнянні*

$$x(t) = \varphi\left(t, \int_{t_0}^{t} k(t, s, x(s))\, ds\right) \tag{24.64}$$

задані m-вимірні вектор-функції $\varphi(t, x)$, $k(t, s, x)$ є неперервними за сукупністю аргументів при $t, s \in [t_0, T]$, $x \in R^m$, $t_0 \leq T$, $t_0, T \in R^N$. Якщо неперервна вектор-функція $u(t) : [t_0, T] \to R^m$ задовольняє нерівність

$$u(t) \leq \varphi\left(t, \int_{t_0}^{t} k(t, s, u(s))\, ds\right) \tag{24.65}$$

і права частина в (24.64) не спадає щодо x, то існує $T_0 \in (t_0, T]$ таке, що на $[t_0, T_0]$ визначений неперервний розв'язок рівняння (24.64), для якого має місце оцінка

$$u(t) \leq x(t) \quad (t \in [t_0, T_0]).$$

Доведення. Позначивши

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} k(t, s, x(s))\, ds,$$

переконуємося безпосередньо, що $y(t)$ є розв'язком рівняння

$$y(t) = \int_{a}^{t} k(t, s, \varphi(s, y(s)))\, ds, \tag{24.66}$$

причому

$$x(t) = \varphi(t, y(t)). \tag{24.67}$$

З допомогою традиційних міркувань можна переконатися в існуванні такого $T_1 \in (t_0, T]$, що при $t \in [t_0, T_1]$ визначений неперервний розв'язок $y(t)$ рівняння (24.66). До нього рівномірно на $[t_0, T_1]$ збігається підпослідовність $\{y_{n_k}(t)\}$ послідовності $\{y_n(t)\}$, означеної за допомогою ітераційного процесу

$$y_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} k(t, s, \varphi(s, y_n(s)))\, ds \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

де

$$y_0(t) = \int_{t_0}^{t} k(t, s, u(s))\, ds.$$

Скориставшись з позначень

$$x_{n+1}(t) = \varphi(t, y_n(t)), \quad x_0(t) = u(t), \tag{24.68}$$

одержимо

$$y_n(t) = \int_{t_0}^{t} k(t, s, x_n(s))\, ds,$$

тобто, що послідовність $\{x_n(t)\}$ задовольняє співвідношення

$$x_{n+1}(t) = \varphi\left(t, \int_{t_0}^{t} k(t, s, x_n(s))\, ds\right)$$

при $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ t \in [t_0, T_1]$. Монотонність правої частини (24.64) очевидним способом призводить до співвідношень

$$x_n(t) \le x_{n+1}(t) \quad (t \in [t_0, T_1],\ \ n = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{24.69}$$

Підпослідовність $\{x_{n_k+1}(t)\}$ яка згідно з (24.68) відповідає підпослідовності $\{y_{n_k}(t)\}$, котра збігається до розв'язку $y(t)$ рівняння (24.66), задовольняє рівності

$$x_{n_k+1}(t) = \varphi(t, y_{n_k}(t)).$$

Тому з неперервності $\varphi(t,y)$ випливає існування границі $x(t)=\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k+1}(t)$ і рівність (24.67), тобто, випливає неперервність розв'язку $x(t)$ рівняння (24.64).

Крім того, враховуючи (24.69) та неперервність $\varphi(t,x)$, $k(t,s,x)$, можна дійти висновку, що сама послідовність $\{x_n(t)\}$ збігається рівномірно до $x(t)$, а послідовність $\{y_n(t)\}$ збігається рівномірно до $y(t)$ при $t\in[t_0,T_1]$. З (24.69) випливає також оцінка $u(t)\le x(t)$ для $t\in[t_0,T_1]$.

Якщо $T_1\le T$, традиційним способом можна довести (див., напр., [17]), що розв'язки $y(t)$ та $x(t)$ можна продовжити або на $[t_0,T]$, або на деякий максимальний N-мірний проміжок $[t_0,T_0)$. Можна переконатися, що на цей проміжок допускає продовження нерівність $u(t)\le x(t)$. Теорему доведено.

Додаткове припущення про монотонне неспадання правої частини рівняння (24.66) щодо y дозволяє зберегти твердження теореми 24.12 для нерівності (24.65) і рівняння (24.64), і для банахових просторів (замість R^m), у яких напівупорядкованість запроваджена за допомогою конуса, який має властивості тілесності і правильності (див., напр., [16, 17, 57]), а також для довільних напівупорядкованих банахових просторів за припущення, що φ і k є ліпшицієвими операторами.

Приклад 24.5. Припустимо, що $m=1$, $N\ge 1$, рівняння (24.64) має вигляд

$$x(t)=\varphi\left(t,\int\limits_{t_0}^{t} h(t,s)\,g(s,x(s))\,ds\right)$$

і замість (24.65) справджується нерівність

$$u(t)\le\varphi\left(t,\int\limits_{t_0}^{t} h(t,s)\,g(s,u(s))\,ds\right), \tag{24.70}$$

де всі функції неперервні, $\varphi(t,x)$, $g(t,x)$ не спадають щодо x, $g(t,y)>0$, $\varphi(t,y)\ge 0$, $h(t,s)\ge 0$, $u(t)\ge 0$ при $t\in[t_0,T]$, $y\in R^1$, $y\ge 0$. Умови теореми 24.14 забезпечені й тому має місце нерівність

$u(t) \le x(t)$. Рівняння (24.66) для цього випадку має вигляд

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,s)\, g(s, \varphi(s, y(s)))\, ds.$$

Якщо додатково припустимо, що

$$\frac{\partial^p h(t,s)}{\partial t^1 \dots \partial t^N} \le 0 \quad \left(p = \overline{1,N}\right),$$

то звідси після N-кратного диференціювання випливає, що

$$\frac{\partial^N y(t)}{\partial t^1 \dots \partial t^N} \le h(t,t)\, g(t, \varphi(t, y(t))).$$

Якщо для розв'язку $y(t)$ мають місце припущення 5) та 6), то візьмемо до уваги (24.67) і монотонність $\varphi(t,y)$. Тому можна вважати доведеною оцінку (24.62) для розв'язку $u(t)$ нерівності (24.70), в якій замість $\beta(t)$ потрібно взяти $h(t,t)$. Теореми 24.12 і 24.13 можна розглядати як окремі випадки з цього прикладу.

6. Наведемо ще один результат про двосторонні операторні нерівності в термінах довільних напівупорядкованих просторів. Розглянемо рівняння

$$x = FTx \tag{24.71}$$

за припущення, що $F : E_1 \to E_0$, $T : E_0 \to E_1$, $E_0 \subseteq E_1$, $E_1 \subseteq \tilde{E}$, E – напівупорядкований простір, $\tilde{E}$ – деякий топологічний простір. Нехай справджуються такі умови:

(α) *Задані оператори* $F_1(y,z), F_2(y,z) : E_1 \times E_1 \to E_0$, $T_1(p,q), T_2(p,q) : E_0 \times E_0 \to E_1$, *які неперервні за сукупністю аргументів і для яких правдиві співвідношення*

$$F_1(T_1(x,x), T_2(x,x)) \le FTx \le F_2(T_2(x,x), T_1(x,x)) \quad (x \in E_0),$$

причому оператори $F_1(T_1(y,z), T_2(z,y))$, $F_2(T_2(y,z), T_1(z,y))$ *не спадають щодо* y, *не зростають щодо* z *при* $y, z \in E_0$.

(β) *Задані елементи* $u, v \in E_0$, *для яких правдиві співвідношення*

$$\begin{aligned} &u \le F_1(T_1(u,v), T_2(v,u)), \\ &v \ge F_2(T_2(v,u), T_1(u,v)). \end{aligned}$$

(γ) *Система рівнянь*

$$
\begin{aligned}
p &= T_1\left(F_1\left(p,q\right), F_2\left(q,p\right)\right),\\
q &= T_2\left(F_2\left(q,p\right), F_1\left(p,q\right)\right)
\end{aligned}
\tag{24.72}
$$

однозначно розв'язна в $E_1 \times E_1$ *і до компонент* p, q *її єдиного розв'язку* (p,q) *збігаються відповідно послідовності* $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, *побудовані за допомогою формул*

$$
\begin{aligned}
p_{n+1} &= T_1\left(F_1\left(p_n,q_n\right), F_2\left(q_n,p_n\right)\right),\\
q_{n+1} &= T_2\left(F_2\left(q_n,p_n\right), F_1\left(p_n,q_n\right)\right) \quad (n = 0,\ 1,\ \ldots)
\end{aligned}
\tag{24.73}
$$

як для

$$
p_0 = T_1\left(u,v\right), \quad q_0 = T_2\left(v,u\right), \tag{24.74}
$$

так і для

$$
p_0 = T_1\left(x,x\right), \quad q_0 = T_2\left(x,x\right), \tag{24.75}
$$

де $x \in E_0$ *– розв'язок рівняння (24.71).*

Теорема 24.15. *Якщо справджуються умови* $(\alpha) - (\gamma)$, *то для всякого розв'язку* $x \in E_0$ *рівняння (24.71) мають місце оцінки*

$$
u \le x \le v.
$$

Доведення схематично зводиться до наступного. Для послідовностей $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, побудованих за (24.73), (24.75), утворюємо послідовності $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ за формулами

$$
u_{n+1} = F_1\left(p_n,q_n\right), \quad v_{n+1} = F_2\left(q_n,p_n\right)
$$

і доводимо за допомогою індукції співвідношення

$$
u_n \le u_{n+1}, \quad v_n \ge v_{n+1}.
$$

Крім того, з послідовностей $\{\tilde{p}_n\}$, $\{\tilde{q}_n\}$, отриманих за допомогою (24.73), (24.75), означуємо іншу пару послідовностей $\{\tilde{u}_n\}$, $\{\tilde{v}_n\}$ за формулами $\tilde{u}_{n+1} = F_1\left(\tilde{p}_n,\tilde{q}_n\right)$, $\tilde{v}_{n+1} = F_1\left(\tilde{q}_n,\tilde{p}_n\right)$, $\tilde{u}_0 = u$, $\tilde{v}_0 = v$,

$\tilde{p}_0 = T_1(u,v)$, $\tilde{q}_0 = T_2(v,u)$, для компонент яких можна отримати співвідношення

$$\tilde{u}_n \leq \tilde{u}_{n+1} \leq x \leq \tilde{v}_{n+1} \leq \tilde{v}_n.$$

Співставлення цих і попередніх нерівностей з нерівностями $p_0 \leq x \leq q_0$ завершує доведення.

Теорема 24.13 доведена в [100]. Вона містить результат, близький до результатів із §§19, 20, 22 та до відповідних результатів із [57]. Умову (γ) можна б дещо ослабити, відмовившись від припущення про єдиність розв'язку системи з умови (γ), якщо припустити, що ця система (або ж деякі інші допоміжні системи рівнянь, пов'язаних з рівнянням (24.71) певним способом) має розв'язки із спеціальними властивостями. Зокрема, корисним може виявитися, як і у попередніх параграфах, курпелеве поняття крайнього розв'язку.

Зауваження 24.3. *Результати цього параграфу також можна поширити на напівліпшицієві та частково ліпшицієві оператори у правих частинах рівнянь.*

Зауваження 24.4. *За допомогою теореми 24.15 можна конструювати ті чи інші узагальнення попередніх теорм 24.1-24.14.*

РОЗДІЛ IX. ДВОСТОРОННІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ І ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ

Започаткована Ш. Пікаром наприкінці XIX-го століття теорія диференціальних нерівностей (див., напр., [94]) розвинута С.А.Чаплигіним [97] для обгрунтування двостороннього методу Чаплигіна. Для систем диференціальних нерівностей вичерпний результат належить Т.Важевському [136]. Результати Т.Важевського істотно вплинули на дослідження В.Вальтера [135], Я.Шарського [133], Р.Рабчука [125] та чимало інших досліджень. Подані в цьому розділі результати продовжують, зокрема, дослідження із [57]. Ці результати можна поширити на ширші класи задач для функціонально-диференціальних рівнянь, спираючись на розроблений Н.В.Азбелевим і його учнями підхід до таких класів рівнянь (див. [2]).

§25. Диференціальні і функціонально-диференціальні нерівності

Диференціальні нерівності, у яких йдеться про оцінки розв'язків задачі Коші

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{25.1}$$

мають, як відомо, ту відмінність від інтегральних та інших нерівностей, що, наприклад, у випадку скалярної неперервної функції $f(t, x)$ в умовах теорем про диференціальні нерівності вона, взагалі кажучи, не мусить бути монотонною щодо x. Мають місце, наприклад, такі дві теореми (див., напр. [57]).

Теореми 25.1. *Нехай дійсна функція $f(t, x)$ є неперервною при $t \in [t_0, T]$, $x \in R^1$. Тоді із співвідношень*

$$u'(t) < f(t, u(t)) \quad (t \in [t_0, T]), \quad u(t_0) = x(t_0) \tag{25.2}$$

для неперервно-диференційовної на $t \in [t_0, T]$ функції $u(t)$ випливає оцінка

$$u(t) < x^*(t) \tag{25.3}$$

при $t \in (t_0, T]$, *якщо існує неперервно-диференційовний на* $[t_0, T]$ *розв'язок* $x^*(t)$ *задачі (25.1).*

Заміна нерівності (25.2) протилежною призводить до протилежної до (25.3) оцінки $u(t) > x^*(t)$ при $t \in (t_0, T]$.

Якщо замість строгої нерівності (25.2) маємо нестрогу нерівність

$$u'(t) \leq f(t, u(t)) \quad (u(t_0) = x_0), \tag{25.4}$$

то неперервності $f(t, x)$, взагалі кажучи, недостатньо для правдивості оцінки

$$u(t) \leq x^*(t) \quad (t \in [t_0, T]) \tag{25.5}$$

для всякого неперервно диференційовного розв'язку $x^*(t)$ задачі (25.1), означеного на $[t_0, T]$.

Теорема 25.2. *Якщо функція* $f(t, x)$ *є неперервною при* $t \in [t_0, T]$, $x \in R^1$ *і задача (25.1) має єдиний неперервно-диференційовний на* $[t_0, T]$ *розв'язок* $x^*(t)$, *то з правдивості (25.4) для* $t \in [t_0, T]$ *з неперервно-диференційовною функцією* $u(t)$ *випливає оцінка (25.5). Протилежна до нерівності (25.4) нерівність призводить до протилежної до (25.5) нерівності* $u(t) \geq x^*(t)$.

Будемо вести мову про задачу (25.1) в R^N. Отже, йдеться про N-мірну ($N < \infty$) систему диференціальних рівнянь. Взагалі кажучи, на таку ситуацію ні теорему 25.1, ні теорему 25.2 не можна поширити без додаткових обмежень щодо $f(t, x)$. Задля цього за додаткове обмеження часто беруть таке припущення.

Умова W. Функція $f(t, x) = \{f_1(t, x_1, \ldots, x_N), \ldots, f_N(t, x_1, \ldots, x_N)\}$ *має таку властивість, що* $f_i(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_N)$ *не спадає щодо всіх аргументів* x_j *за винятком хіба-що того з них, для якого* $i = j$ $\left(i = \overline{1, N}\right)$.

Умову W називають позадіагональною монотонністю або квазімонотонністю; іноді її називають умовою Т. Важевського (див., напр., [136, 125, 57]).

Теорема 25.3. *Нехай функція* $f : [t_0, T] \times R^N \to R^N$ *задовольняє такі самі умови, які постулює теорема 25.2 і, крім того, справджується умова W. Тоді справджується оцінка (25.5) для неперервно-диференційовного верхнього розв'язку* $x^*(t)$ *задачі (25.1).*

Теорема 25.4. *Якщо справджуються умови теореми 25.1 для функції $f : [t_0, T] \times R^N \to R^N$ та стверджується умова W, то для всякого неперервно-диференційовного на $[t_0, T]$ розв'язку $x^*(t)$ задачі (25.1) має місце оцінка (25.3).*

Окремо сформулюємо теорему 25.3 для випадку єдиності розв'язку $x^*(t)$ задачі (25.1) в R^N.

Теорема 25.5. *Нехай справджуються умови теореми 25.3 і задача (25.1) має на $[t_0, T]$ єдиний неперервно-диференційовний розв'язок $x^*(t) = \{x_1^*(t), \dots, x_N^*(t)\}$. Тоді має місце оцінка (25.5).*

Як і в одномірному випадкові $N = 1$, заміна нерівностей (25.2) та (25.4) на протилежні приводить відповідно до оцінок, протилежних до (25.3) та (25.5). Нерівності $u < v$ та $u \le v$ трактуємо як покоординатні нерівності $u_i < v_i$ та $u_i \le v_i$ $\left(i = \overline{1, N}\right)$ відповідно.

Очевидно, що всяка умова єдиності розв'язку задачі (25.1) є підставою для формулювання відповідного наслідку з теореми 25.5.

Схожу ситуацію маємо, коли йдеться про диференціальне рівняння із запізненням аргументу вигляду

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\tau(t))) \quad (t \in [t_0, T]), \tag{25.6}$$

$$x(t) = \varphi(t) \quad (t \in E_0), \tag{25.7}$$

де $E_0 = \left\{t | t \le t_0, t \in R^1\right\}$ – початкова множина, $\varphi(t)$ – початкова функція, $t \ge \tau(t) = t - \Delta(t) \ge 0$ Вважатимемо $\varphi(t)$, $\Delta(t)$ дійсними неперервними функціями. Функцію $f(t, x, p)$ вважатимемо неперервною за сукупністю аргументів при $t \in [t_0, T]$, $x, p \in R^N$. Умову позадіагональної монотонності замінимо близькою до неї, яку назвемо умовою W_1.

Умова $W_{\ 1}$. Функція $f(t, x, p)$ задовольняє умову W щодо x і є монотонно неспадною щодо p.

Теорема 25.6. *Нехай: 1) справджується умова W_1; 2) неперервно диференційовна функція $u(t)$ задовольняє при $t \in [t_0, T]$ нерівність*

$$u'(t) \le f(t, u(t), u(\tau(t))), \tag{25.8}$$

а при $t \in E_0$ маємо

$$u(t) = \varphi(t). \tag{25.9}$$

Тоді справджується оцінка (25.5) з верхнім розв'язком $x^*(t)$, якщо він визначений при $t \in [t_0, T]$. Протилежна до (25.8) нерівність спричинює протилежну до (25.5) оцінку.

Ця теорема є аналогом теореми 25.4 для задачі (25.6), (25.7). Подібним способом можна отримати аналоги теорем 25.1-25.3, 25.5 для задачі (25.6), (25.7), формулювання яких пропускаємо через їх очевидність. Можна подібним способом сформулювати аналоги теорем 25.1-25.5 для інтегро-диференціальних рівнянь, наприклад, вигляду

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \int_{t_0}^{t} k(t, s, x(s))\, ds\right),$$

чи

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x(\tau_1(t)), \int_{t_0}^{t} k(t, s, x(s), x(\tau_2(s)))\, ds\right).$$

Для функціонально-диференціального рівняння (25.6) з початковою умовою

$$x(0) = x_0, \tag{25.10}$$

у якому $t - \tau(t) = \Delta(t)$ може змінювати знак при $t \in [0, \infty)$, – для прикладу скажемо,– умови теореми 25.6 не забезпечують нерівності (25.5), за них не гарантоване існування бодай одного розв'язку задачі (25.6), (25.10). В цій ситуації рівняння (25.6) може бути рівнянням запізнюючого (при $\tau(t) \le t$), випереджуючого (при $\tau(t) \ge t$) або, у загальному випадку ($t - \tau(t)$ змінює знак), мішаного типу. Наведемо у цьому зв'язку формулювання одного результату М. С. Курпеля про однозначну розв'язність на півосі $[0, \infty)$ рівняння

$$x'(t) = f(t, x(\tau(t))) \tag{25.11}$$

з початковою умовою (25.10) в термінах банахового простору E (див. [110], а також бібліографію в [110]). Будемо використовувати позначення $\|x(t)\|$ для норми функції $x(t)$ при кожному фіксованому t як норму в E. Запровадимо норму

$$\|x\|_0 = \sup_{t \ge 0} \{\exp[-\lambda p(t)]\} \|x(t)\|,$$

де

$$p(t)=\int\limits_0^t l(s)\,ds,\quad l(t)=l_0\left(\tau^{-1}(t)\right).$$

Функція $l_0(t)$ визначена умовою Ліпшиця

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\le l_0(t)\,\tau'(t)\,\|x-y\|\qquad (t\in[0,\infty))$$

за припущення про неперервність функції $f(t,x)$ за сукупністю аргументів. Функцію $\tau(t)$ вважатимемо дійсною неперервно диференційовною неспадною невід'ємною при $t\in[0,\infty)$.

Теорема 25.7 *(М. С. Курпель, див. [110]). Нехай*

$$L=\int\limits_0^\infty l(t)\,ds<\infty,$$

$$\sup_{t\ge 0}\|f(t,x)\|<\infty\quad (\|x\|\le A<\infty),$$

$$q=\sup_{t\ge 0}\frac{1}{\lambda}\left\{\exp\left[\lambda\int\limits_t^{\tau(t)} l(s)\,ds\right]-\exp\left[\lambda\int\limits_t^{\tau(0)} l(s)\,ds\right]\right\}<1$$

для деякого додатнього числа λ. Тоді задача (25.10), (25.11) має єдиний обмежений на півосі $[0,\infty)$ розв'язок $x^*(t)$. До цього розв'язку збігається (за нормою $\|\cdot\|_0$) ітераційний процес

$$x_{n+1}(t)=x_0+\int\limits_0^t f(s,x(\tau(s)))\,ds\quad (n=0,\ 1,\ \ldots)$$

за всякого обмеженого початкового наближення $x_0(t)\in E$.

Ця теорема дає змогу сформулювати таке твердження.

Теорема 25.8. *Якщо справджуються умови теореми 25.7, а також справджується припущення про ізотонність щодо x функції $f(t,x)$, то з припущення, що неперервно диференційовна функція $u(t)$ із значеннями в E задовольняє співвідношення*

$$u'(t)\le f(t,u(\tau(t)))\qquad (t\in[0,\infty)),\qquad u(0)=x_0,$$

то при $t \in [0, \infty)$ має місце оцінка (25.5).

Зазначимо, що монотонність $f(t,x)$ щодо x в умовах теореми 25.8 є істотною навіть у скалярному випадку $E = R^1$. Варто відмітити, що ізотонність $f(t,x)$ теж часто є істотньою серед умов теорем про диференціальні нерівності у тих ситуаціях, коли $f(t,x)$ не задовольняє вимогу про її неперервність як для звичайного диференціального рівняння (25.1), так і для функціонально-диференціальних рівнянь вигляду (25.11) (див., напр., [26, 136]).

Наведемо приклад теореми про диференціальні нерівності вищих порядків [51] (див. також [57]).

В просторі двічі неперервно диференційовних на $[0,1]$ функцій із значеннями в банаховому просторі E, напівупорядкованому за допомогою тілесного конуса K, розглянемо рівняння

$$x''(t) + ax'(t) = f(t,x) \tag{25.12}$$

з початковими умовами

$$x(0) = \theta, \quad x'(0) = \theta, \tag{25.13}$$

де θ – нульовий елемент в E, a – дійсне число, $f(t,x)$ є неперервною при $t \in [0,T]$, $x \in E$ функція із значеннями в E. Нехай справджуються умови: 1) задане таке число b, що функція $F(t,x) = f(t,x) + bx$ не спадає щодо x; 2) рівняння

$$g''(t) + ag'(t) = f(t, x+g) - f(t,x) \quad \big(g(0) = g'(0) = \theta\big)$$

має нижній розв'язок, який тотожно співпадає з нульовим елементом θ; 3) двічі неперервно диференційовні при $[t_0, T]$ із значеннями в E функції $u(t)$, $v(t)$ задовольняють нерівність

$$u''(t) + au'(t) - f(t,u) \le v''(t) + av'(t) - f(t,v) \quad (t \in [0,T])$$

і, крім того, $u(0) = v(0) = \theta$, $u'(0) = v'(0) = \theta$. Тоді: а) якщо рівняння $k^2 + ak + b = 0$ має дійсні корені, то на сегменті $[0,T]$ має місце оцінка $u(t) \le v(t)$; б) якщо це ж рівняння $k^2 + ak + b = 0$ має комплексні корені, то оцінка $u(t) \le v(t)$ справджується на сегменті $[0, T_0]$, де

$$T_0 = \min\left\{T, \frac{2\pi}{\sqrt{4b-a}}\right\}.$$

Обмежимося тут наведеними прикладами теорем про диференціальні та функціонально-диференціальні нерівності, бо ці і деякі інші теореми такого типу отримуються як часткові випадки із попередніх результатів. З тої ж причини пропускаємо і доведення наведених тут теорем.

§26. Зауваження про єдиність розв'язків диференціальних і функціонально-диференціальних рівнянь

Єдиність розв'язків диференціальних та інших класів операторних рівнянь є однією з вимог, на яких часто конструюються теореми про операторні нерівності. Як зазначено в [6, 19] існує тісний зв'язок між умовами, які забезпечують однозначну розв'язність і збіжність до розв'язку методів послідовних наближень та умовами теорем про оцінки розв'язків відповідних рівнянь.

Однією з найвідоміших умов, які забезпечують однозначну розв'язність рівнянь, є умова Ліпшиця. В термінах напівупорядкованих просторів правому і лівому операторам Ліпшиця належить, взагалі кажучи, неоднакова роль як з погляду однозначної розв'язності рівнянь так і з погляду збіжності методу послідовних наближень, а також з погляду операторних нерівностей. Простежимо сказане у застосуванні до проблеми єдиності розв'язків диференціальних і функціонально-диференціальних рівнянь із звичайними похідними.

Вважаючи функцію $f(t,x)$ дійсною неперервною в області $D = [t_0,t_1] \times S(x_0)$, де $S(x_0) = \left\{ x | \, |x - x_0| \le M, x, x_0 \in R^1 \right\}$, $-\infty < t_0 < t_1 \le \infty$, R^1 – множина дійсних чисел, розглянемо задачу Коші

$$x'(t) = f(t, x(t)), \;\; x(t_0) = x_0. \tag{26.1}$$

Будемо вважати, що $[t_0,t_1]$ є тим сегментом, на якому задача (26.1) має нижній розв'язок $y^*(t)$ і верхній розв'язок $z^*(t)$ в класі $C^1[t_0,t_1]$ неперервно диференційовних на $[t_0,t_1]$ функцій. У скалярному випадку, який тут розглядаємо, ліпшицієвість $f(t,x)$ щодо x означає існування такого числа $L > 0$, що

$$-L|z-y| \le f(t,z) - f(t,y) < L|z-y|, \tag{26.2}$$

$y, z \in S(x_0), t \in [t_0, t_1]$.

Як відомо, єдиність розв'язку задачі (26.1) можна забезпечити, використовуючи й інші властивості функції $f(t,x)$, відмінні від умови Ліпшиця, а також від деяких її узагальнень. Наприклад, як зазначено у [94] та в [63], незростання щодо x функції $f(t,x)$ у скалярному випадку забезпечує єдиність розв'язку на $[t_0, t_1]$ задачі (26.1), якщо на $[t_0, t_1]$ існують нижній і верхній її розв'язки. Справді, оскільки за означенням нижнього $y^*(t)$ і верхнього $z^*(t)$ розв'язків будемо мати $y^*(t) \le z^*(t)$, то, позначивши $w(t) = z^*(t) - y^*(t)$ і використовуючи незростання $f(t,x)$ щодо x, знайдемо

$$w'(t) = z^{*\prime}(t) - y^{*\prime}(t) = f(t, z^*(t)) - f(t, y^*(t)) \le 0.$$

Отже, $w(t_0) = 0$, $w'(t_0) \le 0$ при $t \in [t_0, t_1]$. Тому $w(t) \le 0$ $(t \in [t_0, t_1])$, тобто $z^*(t) \le y^*(t)$. Звідси і з означення $y^*(t)$, $z^*(t)$ випливає рівність $y^*(t) = z^*(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$, що й потрібно.

Наведене зауваження є приводом для того, щоб сформулювати загальніше твердження за слабкішого від умови Ліпшиця (26.2) припущення, яке назвемо умовою A_0.

Умова A_0. Якщо $y \le z$, $y, z \in S(x_0)$, $t \in [t_0, t_1]$, то

$$f(t,z) - f(t,y) \le l_1(t)(z - y), \tag{26.3}$$

де $l_1(t)$ – неперервна функція і $l_1(t) \ge 0$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Теорема 26.1. *Нехай дійсна функція $f(t,x)$ є неперервною в D і справджується умова A_0. Тоді задача (26.1) має єдиний при $t \in [t_0, T]$ розв'язок $x(t) \in C^1[t_0, T]$, де або $T = t_1$ або $t_0 < T < t_1$ і T є таким числом, що на $[t_0, T]$ існують нижній $y^*(t)$ і верхній $z^*(t)$ розв'язки в $C^1[t_0, T]$ задачі (26.1).*

Доведення. Якщо $y^*(t)$ є нижнім, а $z^*(t)$ є верхнім розв'язками задачі (26.1), то позначивши $w(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} (z_i^*(t) - y_i^*(t))$, будемо мати

$$w'(t) \le l_1(t) w(t). \tag{26.4}$$

Оскільки $w(t_0) = 0$, то з (26.4) випливає, що $w(t)$ є розв'язком задачі Коші

$$w'(t) = l_1(t) w(t) - \delta(t), \quad w(t_0) = 0 \tag{26.5}$$

з неперервною невід'ємною функцією $\delta(t)$. Звідси

$$w(t) = -\int_{t_0}^{t} \delta(s) e^{\int_s^t l_1(\tau)d\tau} ds \le 0. \tag{26.6}$$

Отже, $y^*(t) \ge z^*(t)$, а тому за означенням верхнього і нижнього розв'язків маємо $y^*(t) = z^*(t)$, що й потрібно.

Очевидно, що незростання $f(t,x)$ щодо x відповідає ситуації, коли в умовах теореми 26.1 можна взяти $l_1(t) \equiv 0$.

Вважатимемо далі, що функції $f = \{f_1, \dots f_N\}$, $x = \{x_1, \dots x_N\}$ є векторами у N-мірному евклідовому просторі R^N при $t \in [t_0, t_1]$, $s \in S(x_0) \subseteq R^N$. Нехай функція $f = f(t,x)$ є неперервною в $D = [t_0, t_1] \times S(x_0)$. Задачу (26.1) для цієї ситуації записуватимемо також у вигляді

$$x_i' = f_i(t, x_1, \dots, x_N), \quad x_i(t_0) = x_{i0} \quad \left(i = \overline{1,N}\right). \tag{26.7}$$

Будемо використовувати умову W із §25, яку доцільно подати у такому вигляді.

Умова W. З нерівності $u \le v \quad (u, v \in S(x_0))$ *випливають нерівності*

$$f_i(t,u) \le f_i\left(t, v^{[u_i]}\right) \quad \left(i = \overline{1,N}\right),$$

де $u = \{u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_N\}$, $v^{[u_i]} = \{v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \dots, v_N\}$, *причому співвідношення* $u \le v$ *розуміємо як сукупність нерівностей* $u_i \le v_i \quad \left(i = \overline{1,N}\right)$, *нерівність* $u < v$ *розуміємо як сукупність нерівностей* $u_i < v_i \quad \left(i = \overline{1,N}\right)$.

З умови W випливає, що задача 26.7 має нижній $y^*(t)$ і верхній $z^*(t)$ розв'язки в $C^1[t_0, T]$, де $T \in (0, t_1]$ і $[t_0, T]$ є тим сегментом, на якому означені $y^*(t)$, $z^*(t)$. Надалі задля зручності будемо ототожнювати $[t_0, T]$ і $[t_0, t_1]$.

Замість умови A_0 використовуватимемо загальнішу умову A.

Умова A. Якщо $y \le z$, $y, z \in S(x_0)$, *то при* $t \in [t_0, t_1]$ *справджується нерівність*

$$f(t,z) - f(t,y) \le L(t)(z - y), \tag{26.8}$$

де

$$L(t) = \{l_{ij}(t)\}_{j,i=\overline{1,N}}, \;\; l_{ij}(t) \ge 0 \;\; (t \in [t_0, t_1]) \tag{26.9}$$

з неперервними при $t \in [t_0, t_1]$ функціями $l_{ij}(t)$.

Теорема 26.2. *Нехай справджуються умови W та A. Тоді задача (26.7) має єдиний в $C^1[t_0, T]$ розв'язок.*

Доведення. Як зазначалося, умова W гарантує існування нижнього $y^*(t)$ і верхнього $z^*(t)$ розв'язків задачі (26.7) в $C^1[t_0, T]$. Позначимо

$$\begin{aligned} &l_1(t) = \max_{j=\overline{1,N}} \sum_{i=1}^{N} l_{ij}(t), \\ &w(t) = \sum_{i=1}^{N} (z_i^*(t) - y_i^*(t)). \end{aligned} \tag{26.10}$$

З означення $y^*(t)$, $z^*(t)$ та з умови A випливає нерівність (26.4), з якої, як і при доведенні теореми 26.1, випливає, що $y^*(t) = z^*(t)$ на тому проміжку $[t_0, T]$, на якому $y^*(t)$ і $z^*(t)$ існують. Теорему доведено.

Зауваження 26.1. *Результат теореми 26.2 не є новим у тому випадку, коли замість умови W функція $f(t,x)$ задовольняє умову ізотонності, тобто, коли з нерівності $u \le v$ випливає $f(t,u) \le f(t,v)$. В такому випадку, тобто, за поєднання монотонності $f(t,x)$ щодо x та умови A про односторонню ліпшицієвість, матимемо ситуацію, коли справджується умова Ліпшиця у звичайному розумінні.*

Теорема 26.2 допускає узагальнення таким чином. Вважатимемо, що функцію $f(t,x)$ можна подати у вигляді

$$f(t,x) = F(t,x,x) \quad (t \in [t_0, t_1], x \in S(x_0)) \tag{26.11}$$

таким способом, що $F(t,y,z)$ є неперервною в D за сукупністю аргументів функцією і для неї справджуються такі припущення.

Умова A_1. Якщо $y \le z$, $x, y, z \in S(x_0)$, то при $t \in [t_0, t_1]$ будемо мати

$$\begin{aligned} &F(t,z,x) - F(t,y,x) \le L_1(t)(z-y), \\ &-L_2(t)(z-y) \le F(t,x,z) - F(t,x,y) \end{aligned} \tag{26.12}$$

де

$$L_1(t) = \left\{l_{ij}^{(1)}(t)\right\}, \quad L_2(t) = \left\{l_{ij}^{(2)}(t)\right\}$$

є квадратними матрицями розмірності N з неперервними невід'ємними при $t \in [t_0, t_1]$ компонентами.

Умова W_1. З нерівностей $u \leq v$, $y \leq z$ $(u, v, y, z \in S(x_0))$ випливають нерівності

$$F_i(t, u, z) \leq F_i\left(t, v^{[u_i]}, y\right) \quad \left(i = \overline{1, N}\right). \tag{26.13}$$

Теорема 26.3. *Нехай справджуються умови A_1, W_1. Тоді існує T $(t_0 < T \leq t_1)$ таке, що на сегменті $[t_0, T]$ розв'язок системи (26.7) – єдиний.*

Доведення. Зазначимо спочатку, що число T визначає той проміжок, на якому стандартним способом можна довести (див., напр., [55]) існування крайнього в $C^1[t_0, T] \times C^1[t_0, T]$ розв'язку $(y^*(t), z^*(t))$ системи

$$\begin{array}{l} y'(t) = F(t, y(t), z(t)), \\ z'(t) = F(t, z(t), y(t)) \quad (z(t_0) = y(t_0) = x_0). \end{array} \tag{26.14}$$

При цьому зазначимо, не вдаючись до подробиць, що використовується тільки умова W_1. Як і при доведенні теореми 26.2 можна отримати нерівність (26.4), у якій $l_1(t)$ визначається – замість формул (26.10) – за формулою

$$l_1(t) = \max_{j=\overline{1,N}} \sum_{i=1}^{N} \left(l_{ij}^{(1)}(t) + l_{ij}^{(2)}(t)\right), \tag{26.15}$$

а $w(t)$, як і раніше, означає $w(t) = \sum\limits_{i=1}^{N} (z_i(t) - y_i(t))$

Міркуючи далі так само як і при доведенні теореми 26.2, підтверджуємо правдивість твердження теореми.

Отримані результати можна поширити на загальніші класи рівнянь, наприклад, на функціонально-диференціальні рівняння вигляду

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\tau(t))), \tag{26.16}$$

яке містить запізнення аргументу

$$\tau(t) = t - \Delta(t), \tag{26.17}$$

де $\Delta(t) \geq 0$, $\Delta(t) \leq t$ і $\Delta(t)$ є неперервною скалярною функцією. Вважатимемо, що задана дійсна неперервна при $t \in (-\infty, t_0]$ функція $\varphi(t)$ і шукатимемо розв'язок рівняння (26.16), який задовольняє умови

$$x(t) = \varphi(t) \quad (t \in (-\infty, t_0]) . \tag{26.18}$$

Вважатимемо, що задана функція $F(t, y, z, p, q)$ неперервна при $t \in [t_0, t_1)$, $y, z, p, q \in S(x_0)$ і для $t \in [t_0, t_1)$, $y, z \in S(x_0)$ маємо

$$F(t, y, y, p, p) = f(t, y, p) . \tag{26.19}$$

Нехай справджуються такі аналоги умов A_1 і W_1.

Умова A_2. Якщо $y \leq z$, $y, z, p, q \in S(x_0)$, $t \in [t_0, t_1)$, то

$$\begin{aligned}
&F(t, z, x, p, q) - F(t, y, x, p, q) \leq L_1(t)(z-y) ,\\
&F(t, x, p, z, q) - F(t, x, p, y, q) \leq L_3(t)(z-y) ,\\
&-L_2(t)(z-y) \leq F(t, x, z, p, q) - F(t, x, y, p, q) ,\\
&-L_4(t)(z-y) \leq F(t, x, p, q, z) - F(t, x, p, q, y)
\end{aligned}$$

з квадратними розмірності N матрицями $L_r(t)$ $\left(r = \overline{1,4}\right)$, що мають невід'ємні компоненти $l_{ij}^{(r)}$.

Умова W_2. З нерівності $u \leq v$ $(u, v \in S(x_0))$ випливають нерівності

$$\begin{aligned}
&F_i(t, u, x, p, q) \leq F_i\left(t, v^{[u_i]}, x, p, q\right) ,\\
&F_i(t, x, u, p, q) \geq F_i(t, x, v, p, q) ,\\
&F_i(t, x, p, u, q) \leq F_i(t, x, p, v, q) ,\\
&F_i(t, x, p, q, u) \leq F_i(t, x, p, q, v) \quad \left(i = \overline{1,N}\right)
\end{aligned}$$

при $t \in [t_0, t_1)$, $x, p, q \in S(x_0)$.

Доведення наступної теореми аналогічне до доведення теореми 26.3 і тому пропускаємо його.

Теорема 26.4. *Якщо справджуються умови A_2, W_2 та рівність (26.19), то задача (26.16), (26.18) має на деякому $[t_0, t_2) \subseteq [t_0, t_1)$ єдиний в $C^1[t_0, t_2)$ розв'язок.*

Подібні результати можна одержати і для скінчених систем загальнішого за (26.16) вигляду, наприклад, для систем

$$x'(t) = f(t, x(t), x(\tau_1(t)), \ldots, x(\tau_k(t))) ,$$

де $\tau_i(t) = t - \Delta_i(t)$, $\Delta_i(t)$ – невід'ємні неперервні при $t \in [t_0, t_1)$ $\left(i = \overline{1,k}\right)$ функції, для рівнянь

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \int\limits_{t_0}^{t} k(t, s, x(s))\, ds\right)$$

і т. п.

§27. Двосторонні диференціальні нерівності

Опираючись на наведені у §25 та §26 результати, будемо розглядати задачу Коші

$$x'(t) = F(t, x, x) = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{27.1}$$

вважаючи, що функція $F(t, y, z)$ є неперервна при $t \in [t_0, t_1]$, $y, z \in S(x_0)$, де $-\infty < t_0 < t_1 < \infty$, $S(x_0) = \left\{x |\, \|x - x_0\| \leq M, x, x_0 \in R^N\right\}$, R^N – евклідів простір розмірності N. Спочатку зупинимося на випадкові $N = 1$. Знову будемо використовувати умову A_0 із §26.

Умова A_0. Задана така невід'ємна неперервна при $t \in [t_0, t_1]$ дійсна функція $l_1(t)$, яка при $y \leq z$, $y, z \in S(x_0)$, $t \in [t_0, t_1]$ забезпечує нерівність

$$f(t, z) - f(t, y) \leq l_1(t)(z - y) \tag{27.2}$$

Теорема 27.1. *Нехай функція $f(t, x)$ є неперервною в області $D = [t_0, t_1] \times S(x_0)$ і справджується умова A_0. Тоді якщо виконуються співвідношення*

$$u(t_0) \leq v(t_0), \tag{27.3}$$

$$u'(t) \leq f(t, u(t)), \quad v'(t) \geq f(t, v(t)) \quad (t \in [t_0, t_1]) \tag{27.4}$$

для неперервно-диференційовних функцій $u(t)$, $v(t)$, то має місце нерівність

$$u(t) \leq v(t) \quad (t \in [t_0, t_1]). \tag{27.5}$$

Доведення. Якщо в (27.3) маємо строгу нерівність, то за неперервністю знайдеться правосторонній окіл точки t_0, у якому нерівність (27.5) правдива. Якщо ж у (27.3) маємо рівність, то множина таких t, при яких нерівність (27.5) справджується, є непорожньою, бо вона містить бодай одну точку $t = t_0$. Міркуючи від супротивного, тобто припускаючи, що знайдуться такі $t \in (t_0, t_1]$, при яких $u(t) > v(t)$, позначимо через D_0 множину всіх таких t, при яких $u(t) > v(t)$. Нехай t^* є точною нижньою гранню множини D_0. Очевидно, що $t^* \in [t_0, t_1]$ і $t^* \notin D_0$. Отже, нерівність (27.5) справджується при $t \in [t_0, t^*]$ (можливість $t_0 = t^*$ не виключається). За неперервністю знайдеться такий інтервал $(t^*, t_2) \quad (t_2 \leq t_1)$, що при $t \in (t^*, t_2)$ будемо мати $u(t) > v(t)$. Позначимо $w(t) = u(t) - v(t)$. Тоді $w(t) > 0$ при $t \in (t^*, t_2)$ і $w(t^*) = 0$. Для $t \in [t^*, t_2)$ скористаємось із (27.4) та з умови A_0 і отримаємо

$$\begin{aligned} w'(t) = u'(t) - v'(t) \leq f(t, u(t)) - f(t, v(t)) \leq \\ \leq l_1(t)(u(t) - v(t)) = l_1(t)\, w(t) \quad (t \in [t^*, t_2)). \end{aligned} \tag{27.6}$$

Звідси випливає, що $w(t)$ можна вважати на $[t^*, t_2)$ розв'язком задачі

$$w'(t) = l_1(t)\, w(t) - \delta(t), \quad w(t^*) = 0 \tag{27.7}$$

з неперервною невід'ємною при $t \in [t^*, t_2)$ функцією $\delta(t)$. Оскільки з (27.7), як і при доведенні теореми 26.1, випливає нерівність $w(t) \leq 0$ для $t \in [t^*, t_2)$, а за припущенням для $t \in [t^*, t_2)$ маємо $w(t) > 0$, то отримана суперечність є підставою вважати теорему доведеною.

Замість умови A_0, яка означає правосторонню ліпшицієвість $f(t, x)$, розглянемо ситуацію з лівосторонньою ліпшицієвістю функції $f(t, x)$.

Умова A_1. Якщо $y \leq z$, $y, z \in S(x_0)$, $t \in [t_0, t_1]$, то існує така невід'ємна функція $l_2(t)$, що

$$-l_2(t)(z - y) \leq f(t, z) - f(t, y). \tag{27.8}$$

Теорема 27.2. *Нехай $f(t, x)$ є неперервною в D і справджується умова A_1. Якщо неперервно-диференційовні функції $u(t)$, $v(t)$ задовольняють (27.3) та співвідношення*

$$u'(t) \leq f(t, v(t)), \quad v'(t) \geq f(t, u(t)) \quad (t \in [t_0, t_1]). \tag{27.9}$$

Тоді при $t \in [t_0, t_1]$ справджується оцінка (27.5).

Доведення. Міркуємо так само, як і при доведенні попередньої теореми, враховуючи, що замість (27.6) будемо мати

$$\begin{aligned} w'(t) = u'(t) - v'(t) \le f(t, v(t)) - f(t, u(t)) \le \\ \le l_2(t)(u(t) - v(t)) = l_2(t)\, w(t) \quad (t \in (t^*, t_2)), \end{aligned} \tag{27.10}$$

а в рівності (27.7) замість функції $l_1(t)$ фігурує $l_2(t)$. При цьому для $t \in [t^*, t_2)$ отримаємо $w'(t) \le 0$ всупереч припущенню, що $w'(t) > 0$ при $t \in (t^*, t_2)$, що підтверджує правдивість теореми.

Обидві наведені теореми є частковими випадками загальнішої теореми, у якій обидві умови A_0 та A_1 про односторонню ліпшицієвість функції $f(t, x)$ щодо x замінюємо загальнішою умовою A_2 часткової ліпшицієвості функції $f(t, x) = F(t, x, x)$.

Умова A_2. Задані такі невід'ємні неперервні при $t \in [t_0, t_1]$ функції $l_1(t)$, $l_2(t)$, що при $t \in [t_0, t_1]$, $y \le z$, $x, y, z \in S(x_0)$ маємо

$$\begin{aligned} F(t, z, x) - F(t, y, z) \le l_1(t)(z - y), \\ -l_2(t)(z - y) \le F(t, x, z) - F(t, x, y). \end{aligned} \tag{27.11}$$

Теорема 27.3. *Нехай $F(t, y, z)$ є неперервною при $t \in [t_0, t_1]$ $y, z \in S(x_0)$ і справджується умова A_2. Якщо неперервно диференційовні функції $u(t)$, $v(t)$ задовольняють співвідношення (27.3) при $t = t_0$, а при $t \in [t_0, t_2]$ справджуються нерівності*

$$\begin{aligned} u'(t) \le F(t, u(t), v(t)), \\ v'(t) \ge F(t, v(t), u(t)). \end{aligned} \tag{27.12}$$

Тоді при $t \in [t_0, t_1]$ має місце оцінка (27.5).

Доведення пропускаємо, оскільки воно тільки в подробицях відрізняється від доведення попередніх теорем. Зазначимо також, що теорему 27.3 можна отримати як частковий випадок з наступної теореми 27.4.

Перейдемо до розгляду рівняння (27.1), коли $N \ge 1$. Використовуватимемо умови A_1 та W_1 із §26, які подамо тут як умови A та W.

Умова W. З припущення $u \le v$, $y \le z$, $u, v, y, z \in S(x_0)$ випливає

$$F(t, u, z) \le F\left(t, v^{[u]}, y\right) \quad (t \in [t_0, t_1]), \tag{27.13}$$

де нерівність (27.13) розуміємо як сукупність нерівностей (26.13).

Умова А. Якщо $y \le z$, $x, y, z \in S(x_0)$, $t \in [t_0, t_1]$, то

$$\begin{aligned} &F(t, z, x) - F(t, y, z) \le L_1(t)(z - y), \\ &F(t, x, z) - F(t, x, y) \ge -L_2(t)(z - y) \end{aligned} \tag{27.14}$$

з тими самими матрицями $L_1(t) = \left\{ l_{ij}^{(1)}(t) \right\}$, $L_2(t) = \left\{ l_{ij}^{(2)}(t) \right\}$, елементи яких $l_{ij}^{(k)}(t)$ $\left(k = 1,\ 2;\ i, j = \overline{1, N}\right)$ є невід'ємними неперервними при $t \in [t_0, t_1]$ функціями.

Теорема 27.4. *Нехай справджуються умови W та A і $F(t, y, z)$ – неперервна при $t \in [t_0, t_1]$, $y, z \in S(x_0)$. Якщо при $t = t_0$ справджуються нерівності (27.3), а при $t \in [t_0, t_1]$ маємо (27.12) з неперервно диференційовними функціями $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_N(t)\}$, $v(t) = \{v_1(t), \ldots, v_N(t)\}$, то при $t \in [t_0, t_1]$ справджується оцінка (27.5), тобто,*

$$u_i(t) \le v_i(t) \quad \left(i = \overline{1, N}\right).$$

Доведення. Як і при доведенні теореми 27.1, будемо міркувати від супротивного. Позначимо через D_0 множину таких $t \in (t_0, t_1)$, для яких не справджується оцінка (27.5). Це означає, що принаймні для якогось одного значення індекса $i = \overline{1, N}$ будемо мати $u_i(t) > v_i(t)$ при $t \in D_0$. Нехай t^* – точна нижня грань множини D_0. Очевидно, що $t^* \notin D_0$. Розіб'ємо множину K значень індекса $i = \overline{1, N}$ на дві підмножини. До першої з них K_1 віднесемо ті значення i, для яких знайдеться таке $t_2 \in (t^*, t_1)$, що при $t \in (t^*, t_2)$ матимемо $u_i(t) > v_i(t)$. Існування такого інтервалу (t^*, t_2) забезпечується неперервністю $u(t)$ і $v(t)$ та скінченністю числа N. Решту значень індексу i віднесемо до множини K_2. Отже при $i \in K_2$ будемо мати $u_i(t) \le v_i(t)$ для $t \in [t_0, t_2]$. Для $i \in K_1$, $t \in (t^*, t_2)$ з умов А, W випливає

$$\begin{aligned} u_i'(t) - v_i'(t) = F_i\,&(t, u_1, \ldots u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots u_N; \\ &v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_N) - \\ -F_i\,&(Xt, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_N; \\ &u_1, \ldots u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots u_N) \le \\ \le \sum_{j \in K_1} &\left(l_{ij}^{(1)}(t) + l_{ij}^{(2)}(t) \right) (u_j(t) - v_j(t)). \end{aligned} \tag{27.15}$$

Відсутність у (27.15) доданків з індексами $j \in K_2$ викликана тим, що для індексів $j \in K_2$ використовуємо нерівності (27.13) з умови W. Позначимо

$$w(t) = \sum_{i \in K_1} (u_i(t) - v_i(t)), \tag{27.16}$$

$$l(t) = \max_{j \in K_1} \sum_{i \in K_1} \left(l_{ij}^{(1)}(t) + l_{ij}^{(2)}(t) \right). \tag{27.17}$$

Тоді з (27.15) отримуємо щодо $w(t)$ рівняння

$$w'(t) = l(t)\, w(t) - \delta(t) \quad (t \in [t^*, t_2]), \quad w(t^*) = 0 \tag{27.18}$$

з невід'ємною неперервною при $t \in [t^*, t_2]$ функцією $\delta(t)$. Розпорядившись (27.18) так само як ми розпорядилися рівностями (27.7) при доведенні теореми 27.1, матимемо нерівність $w(t) \leq 0$ при $t \in [t^*, t_2]$, яка суперечить припущенню про строгу нерівність $w(t) = \sum\limits_{i \in K_1} u_i(t) - v_i(t) > 0$ для $t \in (t^*, t_2)$, спричинену строгою додатністю при $t \in (t^*, t_2)$ кожного з доданків $u_i(t) - v_i(t)$ для $i \in K_1$. Отже, припущення про хибність твердження теореми призвело до суперечності й цим теорему доведено.

Частковий випадок цієї теореми отримується, якщо приймемо, що $F(t, y, z)$ в її умовах не залежить від z.

Теорема 27.5. *Нехай: 1) $f(t, x)$ – неперервна при $t \in [t_0, t_1]$, $x \in S(x_0)$; 2) з припущення $y \leq z$, $y, z \in S(x_0)$, $t \in [t_0, t_1]$ випливає, що*

$$f(t, y) \leq f\left(t, z^{[y]}\right);$$

3) якщо $y \leq z$, $y, z \in S(x_0)$, $t \in [t_0, t_1]$, то

$$f(t, z) - f(t, y) \leq L_1(t)(z - y),$$

де $L_1(t) = \left\{ l_{ij}^{(1)}(t) \right\}$; $l_{ij}^{(1)}(t)$ – невід'ємні неперервні при $t \in [t_0, t_1]$ функції $\left(i, j = \overline{1, N}\right)$; 4) справджуються нерівності (27.3), (27.4) з неперервно диференційовними функціями $u(t) = \{u_1(t), \ldots, u_N(t)\}$, $v(t) = \{v_1(t), \ldots, v_N(t)\}$. Тоді при $t \in [t_0, t_1]$ справджується твердження теореми 27.4, тобто, має місце оцінка (27.5).

Інший частковий випадок із теореми 27.4 отримується, якщо $F(t,y,z)$ не залежить від y.

Теорема 27.6. *Нехай: 1) виконана умова 1) теореми 27.5; 2) функція $f(t,x)$ не зростає щодо x; 3) якщо $y \le z$, $y,z \in S(x_0)$, $t \in [t_0,t_1]$, то*

$$-L_2(t)(z-y) \le f(t,z) - f(t,y),$$

де $L_2(t) = \left\{ l_{ij}^{(2)}(t) \right\}$; $l_{ij}^{(2)}(t)$ – неперервні невід'ємні при $t \in [t_0,t_2]$ функції $\left(i,j=\overline{1,N}\right)$; 4) справджуються нерівності (27.3), (27.9) з неперервно диференційовними функціями $u(t) = \{u_1(t),\dots,u_N(t)\}$, $v(t) = \{v_1(t),\dots,v_N(t)\}$. Тоді при $t \in [t_0,t_2]$ має місце оцінка (27.5).

Зазначимо, що теорема 27.6, на відміну від теореми 27.5, не містить нового результату, оскільки за цих умов функція $f(t,x)$ задовольняє умову Ліпшиця у звичайному розумінні й тому теорема 27.6 випливає із відповідних результатів із [57].

Зауваження 27.1. *Можна переконатися, що за виконання умов теореми 27.4 справджуються оцінки*

$$u(t) \le x^*(t) \le v(t) \tag{27.19}$$

на сегменті $[t_0,T] \subseteq [t_0,t_1]$, де $[t_0,T]$ визначається як сегмент, на якому завдяки теоремі 26.3 розв'язок $x^*(t)$ задачі (27.1) є єдиним. Доведення цього проводиться за тією самою схемою, за якою доведено теорему 27.4, враховуючи при цьому теорему 26.3.

Застосуємо дещо інший підхід до конструювання теорем про двосторонні диференціальні нерівності, який грунтується на використанні односторонньої і часткової ліпшицієвості в умовах таких теорем. Обмежимося задля спрощень викладу скалярним випадком $N=1$.

Теорема 27.7. *Нехай для неперервної при $t \in [t_0,t_1]$, $x \in S(x_0)$ функції $f(t,x)$ виконана умова A_0 і задані неперервно диференційовні функції $u(t)$, $v(t)$, для яких справджуються співвідношення*

$$u(t_0) \le x_0 \le v(t_0), \tag{27.20}$$

$$\begin{aligned} &u'(t) \le f(t,u(t)) - l_1(t)(v(t)-u(t)), \\ &v'(t) \ge f(t,v(t)) + l_1(t)(v(t)-u(t)), \quad (t \in [t_0,t_1]). \end{aligned} \tag{27.21}$$

Тоді на сегменті $[t_0, t_1]$ для єдиного розв'язку $x^*(t)$ задачі (27.1) мають місце оцінки (27.18).

Доведення. Зазначимо в першу чергу, що використанням тої чи іншої стандартної методики (див., напр., [92]) можна довести існування крайнього в $C^1[t_0, T]$ розв'язку $(y^*(t), z^*(t))$ системи

$$\begin{aligned} y(t) = f(t, y) - l_1(t)(z - y), \\ z(t) = f(t, z) + l_1(t)(z - y) \quad (y(t_0) = z(t_0) = x_0). \end{aligned} \tag{27.22}$$

Оскільки з умови A_0 і з означення крайнього розв'язку випливає

$$\begin{aligned} z^*(t) - y^*(t) = 2l_1(t)(z^*(t) - y^*(t)) + f(t, z^*(t)) - f(t, y^*(t)) \leq \\ \leq 3l_1(t)(z^*(t) - y^*(t)), \end{aligned}$$

то, позначивши $w(t) = z^*(t) - y^*(t)$, матимемо, що $w(t)$ є розв'язком рівняння

$$w(t) = a(t)w(t) + \delta(t) \tag{27.23}$$

з початковою умовою

$$w(a_0) = 0 \tag{27.24}$$

при $a_0 = t_0$, де $a(t) = 3l_1(t)$, а $\delta(t)$ є неперервною недодатньою функцією. Оскільки очевидно (див. також §26, доведення теореми 26.1), що $w(t) \leq 0$, то звідси випливає рівність $y^*(t) = z^*(t) \quad (t \in [t_0, T])$. Це означає, що функція $x^*(t) = y^*(t) = z^*(t) \quad \forall t \in [t_0, T]$ є єдиним розв'язком задачі (27.1) в класі функцій $C^1[t_0, T]$.

Переконаємося, що $u(t) \leq v(t) \quad (t \in [t_0, t_1])$. Для цього досить скористатися з умови A_0 та із співвідношень (27.20), (27.21), щоб отримати

$$v'(t) - u'(t) \geq 2l_1(t)(v(t) - u(t)) - [f(t, u(t)) - f(t, v(t))].$$

Якщо D_0 є множиною тих $t \in [t_0, t_1]$, для яких правдива протилежна до потрібної нерівності $u(t) \leq v(t)$ нерівність $u(t) > v(t)$, то з попередньої нерівності отримуємо

$$w'(t) \geq 3l_1(t)w(t), \tag{27.25}$$

де $w(t) = v(t) - u(t)$. Отже, $w(t)$ є розв'язком рівняння (27.23) з неперервною невід'ємною функцією $\delta(t)$ і початковою умовою (27.24) при $t = t^* \notin D_0$ та $a(t) = 3l_1(t)$. Тому подібним до попереднього способом отримуємо, що $w(t) = v(t) - u(t) \geq 0$ при $t \in D_0$. Це суперечить припущенню, що $u(t) > v(t)$ при $t \in D_0$ і тому підтверджено нерівність $u(t) \leq v(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$.

Приступимо тепер до доведення співвідношень (27.18). Знову міркуватимемо від супротивного. Задля конкретності припустимо, що на деякій множині $D_0 \subseteq (t_0, t_1]$ хибною є нерівність $u(t) \leq x(t)$, тобто, що при $t \in D_0$ маємо $x(t) < u(t)$. Враховуватимемо вже доведену нерівність $u(t) \leq v(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$. З припущення і умов теореми випливає

$$\begin{aligned} x'(t) - u'(t) &\geq l_1(t)(v(t) - u(t)) - [f(t, u(t)) - f(t, x(t))] \geq \\ &\geq l_1(t)(v(t) - u(t)) - l_1(t)(u(t) - x(t)) = \\ &= 2l_1(t)(x(t) - u(t)) + l_1(t)(v(t) - x(t)). \end{aligned}$$

Позначивши $a(t) = 2l_1(t)$, $w(t) = x(t) - u(t)$, і врахувавши, що $l_1(t)(v(t) - x(t)) \geq 0$ при $t \in [t_0, t_1]$, доходимо висновку, що функція $w(t)$ є розв'язком рівняння (27.24) з невід'ємною неперервною функцією $\delta(t)$ із початковою умовою (27.24) при $a_0 = t^*$. Очевидно, що для цього розв'язку маємо $w(t) \geq 0$ при $t \in D_0$. Це суперечить припущенню. Подібним способом отримується протиріччя, якщо припустити хибність правої з нерівностей (27.18). Цим теорему доведено.

Теорема 27.8. *Нехай виконана умова A_1, а функції $f(t, x)$, $u(t)$, $v(t)$ задовольняють ті самі вимоги, які постульовані умовами теореми 27.7 з тією відмінністю, що замість нерівностей (27.21) маємо нерівності*

$$\begin{aligned} u'(t) &\leq f(t, v(t)) - l_2(t)(v(t) - u(t)), \\ v'(t) &\geq f(t, v(t)) + l_2(t)(v(t) - u(t)). \end{aligned} \tag{27.26}$$

Тоді має місце твердження теореми 27.7.

Доведення можна провести за схемою, подібною на схему доведення теореми 27.7.

Теорема 27.9. *Нехай $F(t, y, z)$ є неперервною при $t \in [t_0, t_1]$, $y, z \in S(x_0)$ і справджується умова A_2. Якщо неперервно диференційовні функції $u(t)$, $v(t)$ задовольняють нерівності (27.20)* *і при* $t \in [t_0, t_1]$ - - *нерівності*

$$\begin{aligned} u'(t) &\leq F(t, u(t), v(t)) - (l_1(t) + l_2(t))(v(t) - u(t)), \\ v'(t) &\geq F(t, v(t), u(t)) + (l_1(t) + l_2(t))(v(t) - u(t)), \end{aligned} \tag{27.27}$$

то має місце твердження теореми 27.7.

Доведення. Спочатку підтвердимо нерівність (27.5) для $t \in [t_0, t_1]$. Як і при доведенні, наприклад, теореми 27.7 поозначимо через D_0 множину тих $t \in [t_0, t_1]$, при яких (27.5) не справджується, і через t^* точну нижню грань D_0, враховуючи, що $t^* \notin D_0$. З умови A_2, нерівностей (27.27) і з припущення, що D_0 – непорожня множина, одержимо

$$\begin{aligned} v'(t) - u'(t) \geq 2(l_1(t) + l_2(t))(v(t) - u(t)) + F(t, v(t), u(t)) - \\ -F(t, u(t), v(t)) \geq 3(l_1(t) + l_2(t))(v(t) - u(t)). \end{aligned}$$

Тому, як і при доведенні відповідного фрагменту теореми 27.7, запровадивши позначення $w(t) = v(t) - u(t)$, $a(t) = 3(l_1(t) + l_2(t))$, можемо розглянути рівняння (27.23) з неперервною невід'ємною функцією $\delta(t)$. Розв'язок $w(t)$ цього рівняння з початковою умовою (27.24), у якій $a_0 = t^*$, є невід'ємною функцією. Отже, отримуємо для $t \in D_0$ нерівність $u(t) \leq v(t)$, що суперечить з припущенням. Таким чином, справджується нерівність (27.5) для $t \in [t_0, t_1]$. З доведеного випливає, що нерівності (27.27) призводять до нерівностей (27.12). Це означає, що справджуються умови теореми 27.3, й тому покликанням на неї завершуємо доведення.

Зауваження 27.2. *Теорему 27.9 можна довести, не покликаючись на теорему 27.3. Для цього підходить схема доведення теореми 27.7.*

РОЗДІЛ X. ДВОСТОРОННІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ ТА СИСТЕМ АЛГЕБРАЇЧНИХ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

Оскільки теорія диференціальних рівнянь із запізненням аргументу часто використовує методику теорії звичайних диференціальних рівнянь без відхилення аргументу, то поширення основних тверджень про диференціальні нерівності на функціонально- диференціальні рівняння із запізненням аргументу не натикається на особливі перешкоди. Двосторонні функціонально-диференціальні нерівності для рівняння з відхиленням аргументу, яке не конче є рівнянням з післядією встановлені в [110] і наведені в §29; обгрунтування цих результатів ґрунтується на підході, який можна розглядати як застосування методики загальної теорії операторних нерівностей. Подібний спосіб використаний в §30 для систем алгебраїчних і трансцендентних нерівностей.

§28. Двосторонні оцінки розв'язків функціонально диференціальних рівнянь запізнюючого аргументу

Поширення наведених у §27 результатів на диференціальні рівняння із запізненням аргументу не натрапляє на принципові труднощі. Розглянемо, наприклад, рівняння вигляду

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t), x(\tau(t)), x(\tau(t))) \tag{28.1}$$

з неперервною дійсною функцією $\tau(t) = t - \Delta(t) \geq 0$, $\Delta(t) \geq 0$. Нехай $\varphi(t)$ є неперервною при $t \in (-\infty, t_0]$ дійсною функцією. Шукатимемо розв'язок $x(t)$ рівняння (28.1), який задовільняє початкову умову

$$x(t) = \varphi(t) \quad (t \in (-\infty, t_0]). \tag{28.2}$$

Аналоги умови A та умови W із §27 оформимо як окремі умови.

Умова A_τ. Якщо $y \leq z$, $p \leq q$, $y, z, p, q, s, x \in S(x_0)$, $t \in [t_0, t_1]$, то

$$\begin{gathered} F(t, z, x, q, s) - F(t, y, x, p, s) \leq L_1(t)(z - y) + M_1(t)(q - p), \\ F(t, z, x, s, q) - F(t, y, x, s, p) \geq -L_2(t)(z - y) - M_2(t)(q - p), \end{gathered} \tag{28.3}$$

де квадратні матриці

$$L_1(t) = \left\{l_{ij}^{(1)}(t)\right\}, \quad L_2(t) = \left\{l_{ij}^{(2)}(t)\right\},$$
$$M_1(t) = \left\{m_{ij}^{(1)}(t)\right\}, \quad M_2(t) = \left\{m_{ij}^{(2)}(t)\right\}$$

мають розмірність N, а їх компоненти є неперервними невід'ємними при $t \in [t_0, t_1]$ функціями.

Умова W_τ. З припущення $u \le v$, $y \le z$, $p \le q$, $s \le x$, $u, v, y, z, p, q, s, x \in S(x_0)$ випливає, що при $t \in [t_0, t_1]$ маємо

$$F(t, u, z, p, x) \le F\left(t, v^{[u]}, y, q, s\right), \tag{28.4}$$

де нерівність (28.4) і символ $v^{[u]}$ розуміємо так само, як це трактується у §§26, 27.

Наступна теорема є аналогом теореми 27.4 для задачі (28.1), (28.2) замість задачі (27.1).

Теорема 28.1. *Нехай справджуються умови A_τ, W_τ за припущення що $F(t, x, y, p, q)$ є неперервною за сукупністю аргументів функцією. Тоді із співвідношень*

$$u(t_0) \le x(t_0) \le v(t_0), \tag{28.5}$$

$$\begin{aligned} &u'(t) \le F(t, u(t), v(t), u(\tau(t)), v(\tau(t))), \\ &v'(t) \ge F(t, v(t), u(t), v(\tau(t)), u(\tau(t))) \quad (t \in [t_0, t_1]) \end{aligned} \tag{28.6}$$

випливають оцінки

$$u(t) \le x(t) \le v(t) \quad (t \in [t_0, t_1]) \tag{28.7}$$

для єдиного неперервно диференційовного розв'язку $x(t)$ задачі (28.1), (28.2), якщо $u(t)$, $v(t)$ є неперервно диференційовними на $[t_0, t_1]$ функціями.

Доведення подібне на доведення теореми 27.4.

Наступна теорема є аналогом теореми 27.9, і для її доведення теж можна скористатися з методики доведення теореми 27.9.

Теорема 28.2. *Нехай $F(t, y, z, p, q)$ є неперервною при $t \in [t_0, t_1]$, $y, z, p, q \in S(x_0)$ і справджуються умови A_τ, W_τ. Нехай неперервно диференційовні при $t \in [t_0, t_1]$ функції $u(t)$, $v(t)$, для яких* *справджуються при $t = t_0$ нерівності (28.5), задовольняють при $t \in [t_0, t_1]$ нерівності*

$$\begin{aligned}
&u'(t) \leq F(t, u(t), v(t), u(\tau(t)), v(\tau(t))) - \\
&(L_1(t) + L_2(t))(v(t) - u(t)) - (M_1(t) + M_2(t))(v(\tau(t)) - u(\tau(t))), \\
&v'(t) \geq F(t, v(t), u(t), v(\tau(t)), u(\tau(t))) + \\
&(L_1(t) + L_2(t))(v(t) - u(t)) + (M_1(t) + M_2(t))(v(\tau(t)) - u(\tau(t))).
\end{aligned}$$

Тоді мають місце оцінки (28.7) для єдиного неперервно диференційовного розв'язку $x(t)$ задачі (28.1), (28.2).

Розглянемо тепер інтегро-диференціальне рівняння вигляду

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \int_{t_0}^{t} k(t, s, x(s))\, ds\right) \tag{28.8}$$

з початковою умовою

$$x(t_0) = x_0. \tag{28.9}$$

Нехай справджуються такі аналоги умов A_τ, W_τ.

Умова A_s. Задані функції $F(t, y, z, p, q)$, $K(t, \xi, y, z)$, які є неперервними за сукупністю аргументів і для яких із співвідношень $t, \xi \in [t_0, t_1]$, $x, y, z, p, q \in S(x_0)$, $y \leq z$, $p \leq q$ випливають співвідношення (28.3) з матрицями $L_i(t)$, $M_i(t)$ $\quad (i = 1,\ 2)$ із умови A_τ, а також

$$\begin{aligned}
&K(t, \xi, z, x) - K(t, \xi, y, x) \leq K_1(t, \xi)(z - y), \\
&K(t, \xi, x, z) - K(t, \xi, x, y) \geq -K_2(t, \xi)(z - y),
\end{aligned}$$

де квадратні матриці $K_1(t, \xi)$, $K_2(t, \xi)$ розмірності N мають відповідно компоненти $k_{ij}^{(1)}(t, \xi)$, $k_{ij}^{(2)}(t, \xi)$, які є невід'ємними неперервними дійсними при $t, \xi \in [t_0, t_1]$ функціями.

Умова W_s. Справджується умова W_τ і, крім того, $K(t, s, y, z)$ не спадає щодо y, не зростає щодо z.

Теорема 28.3. *Нехай справджуються умови A_s, W_s. Нехай неперервно диференційовні функції $u(t)$, $v(t)$ задовольняють при*

$t \in [t_0, t_1]$ співвідношення

$$\begin{aligned} u'(t) &\leq F\left(t, u(t), v(t), \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s, u(s), v(s)\right) ds, \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s, v(s), u(s)\right) ds\right), \\ v'(t) &\geq F\left(t, v(t), u(t), \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s, v(s), u(s)\right) ds, \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s, u(s), v(s)\right) ds\right), \end{aligned}$$

а також – співвідношення (28.5). Тоді для єдиного неперервно диференційовного при $t \in [t_0, t_1]$ розв'язку $x(t)$ задачі (28.8), (28.9) мають місце оцінки (28.7), якщо справджуються рівності

$$\begin{aligned} &F\left(t, x, x, y, y\right) = f\left(t, x, y\right), \\ &K\left(t, s, x, x\right) = k\left(t, s, x\right) \end{aligned} \tag{28.10}$$

при $t, s \in [t_0, t_1]$, $x, y \in S(x_0)$.

Теорема 28.4. *Нехай справджуються рівності (28.10) та умови A_s, W_s і неперервно диференційовні функції $u(t)$, $v(t)$ задовольняють нерівності*

$$\begin{aligned} u'(t) \leq F&\left(t, u(t), v(t), \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s, u(s), v(s)\right) ds, \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s, v(s), u(s)\right) ds\right) - \\ &- \left(L_1(t)+L_2(t)\right)\left(v(t)-u(t)\right) - \left(M_1(t)+M_2(t)\right) \int\limits_{t_0}^{t} K_1\left(t, s\right)\left(v(s)-u(s)\right) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'(t) \geq F&\left(t, v(t), u(t), \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s, v(s), u(s)\right) ds, \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s, u(s), v(s)\right) ds\right) + \\ &+ \left(L_1(t)+L_2(t)\right)\left(v(t)-u(t)\right) + \left(M_1(t)+M_2(t)\right) \int\limits_{t_0}^{t} K_1\left(t, s\right)\left(v(s)-u(s)\right) ds, \end{aligned}$$

а при $t = t_0$ маємо співвідношення (28.5). Тоді мають місце оцінки (28.7) для єдиного неперервно диференційовного на $[t_0, t_1]$ розв'язку $x(t)$ задачі (28.8), (28.9).

Доведення теорем 28.4 та 28.5 теж можна реалізувати за схемою доведення теорем 27.4 і 27.9 .

§29. Двосторонні оцінки розв'язків безтипних функціонально-диференціальних рівнянь

В умовах теореми 25.8 істотньою є вимога про монотонність функції $f(t,x)$. Далі розглядатимемо ситуацію, за якої монотонність функції $f(t,x)$ щодо x не постулюється.

Розглянемо рівняння

$$x'(t) = f(t, x(\tau_1(t)), \dots, x(\tau_N(t))) \tag{29.1}$$

у напівупорядкованому банаховому просторі E. Будемо шукати неперервно-диференційовний обмежений на півосі $[0,\infty)$ розв'язок рівняння (29.1), який задовольняє початкову умову

$$x(0) = x_0. \tag{29.2}$$

Функції $t - \tau_i(t)$ можуть міняти знак на півосі $[0,\infty)$, тобто рівняння (29.1) може належати не тільки до запізнюючого типу, але й до мішаного і, зокрема, випереджаючого типу. Будемо вважати, що

$$0 \le \tau_i(t) \le \alpha(t) \quad \left(t \in [0,\infty),\ i = \overline{1,N}\right), \tag{29.3}$$

де $\alpha(t)$ має невід'ємну обмежену на $[0,\infty)$ похідну $\alpha'(t)$. Вважатимемо заданою функцію $F(t, y_1, \dots, y_N; z_1, \dots z_N)$, яка неперервна при $t \in [0,\infty)$, $y_i, z_i \in E$ $\left(i = \overline{1,N}\right)$, приймає значення із E і задовольняє такі умови.

1) *При* $t \in [0,\infty)$, $x_i \in E$ $\left(i = \overline{1,N}\right)$ *маємо* $F(t; x_1, \dots, x_N; x_1, \dots, x_N) = f(t, x_1, \dots, x_N)$.

2) *Якщо* $y_i \le u_i$, $z_i \ge v_i$ $\left(i = \overline{1,N}\right)$, $t \in [0,\infty)$, *то*

$$F(t; y_1, \dots, y_N; z_1, \dots z_N) \le F(t; u_1, \dots, u_N; v_1, \dots v_N). \tag{29.4}$$

3) *Існують неперервні на півосі* $[0,\infty)$ *функції* $l_i^{(1)}(t)$, $l_i^{(2)}(t)$ $\left(i = \overline{1,N}\right)$, *для яких*

$$\begin{gathered}\|F(t; u_1, \dots, u_N; v_1, \dots v_N) - F(t; y_1, \dots, y_N; z_1, \dots z_N)\| \le \\ \le \sum_{i=1}^{N} l_i^{(1)}(t)\,\alpha'(t)\,\|u_i - y_i\| + \sum_{i=1}^{N} l_i^{(2)}(t)\,\alpha'(t)\,\|v_i - z_i\|\end{gathered}$$

при $t \in [0,\infty)$, $\|y_i\| \le A$, $\|z_i\| \le A$, $\|u_i\| \le A$, $\|v_i\| \le A$ *(*$A < \infty$ $i = \overline{1,N}$*).*

4) *Справджується нерівність*

$$q < 1, \tag{29.5}$$

де

$$q = \sup_{t \ge 0} \frac{1}{\lambda} \left\{ \exp\left[\lambda \int\limits_t^{\alpha(t)} l(s)\, ds \right] - \exp\left[\lambda \int\limits_t^{\alpha(0)} l(s)\, ds \right] \right\},$$

$$l(t) = h\left[\alpha^{-1}(t)\right], \quad h(t) = \sum_{i=1}^{N} \left(l_i^{(1)}(t) + l_i^{(2)}(t) \right),$$

$\alpha^{-1}(t)$ *є оберненою до* $\alpha(t)$ *функцією.*

5) *Справджуються припущення*

$$L = \int\limits_0^\infty l(t)\, dt < \infty,$$

$$\sup_{t \ge 0} \|F(t; y_1, \ldots, y_N; z_1, \ldots z_N)\| < \infty$$

при $\|y_i\| \le A < \infty$, $\|z_i\| \le A < \infty$*(* $i = \overline{1,N}$*).*

Теорема 29.1. *Нехай виконані умови 1)-5). Якщо задані обмежені неперервно диференеційовні на півосі* $[0,\infty)$ *функції* $u(t)$, $v(t)$ *(із значеннями в* E*), для яких*

$$\begin{array}{l} u'(t) \le F(t; u(\tau_1(t)), \ldots, u(\tau_N(t)); v(\tau_1(t)), \ldots v(\tau_N(t))), \\ v'(t) \ge F(t; v(\tau_1(t)), \ldots v(\tau_N(t)); u(\tau_1(t)), \ldots, u(\tau_N(t))) \end{array} \tag{29.6}$$

при $t \in [0,\infty)$ *і при* $t = 0$ *маємо*

$$u(0) \le x_0 \le v(0), \tag{29.7}$$

то справедливі такі твердження: а) задача (29.1), (29.2) має єдиний обмежений неперервно диференційовний на $[0,\infty)$ *розв'язок* $x(t)$*; б)* *послідовності* $\{y_n(t)\}$ *та* $\{z_n(t)\}$, *утворені за допомогою формул*

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) = x_0 + \int\limits_0^t F(s; y_n(\tau_1(s)), \ldots, y_n(\tau_N(s)); \\ z_n(\tau_1(s)), \ldots, z_n(\tau_N(s)))ds, \\ z_{n+1}(t) = x_0 + \int\limits_0^t F(s; z_n(\tau_1(s)), \ldots, z_n(\tau_N(s)) \\ y_n(\tau_1(s)), \ldots, y_n(\tau_N(s)))ds \end{aligned} \tag{29.8}$$

з початковими наближеннями

$$y_0(t) = u(t), \quad z_0(t) = v(t) \tag{29.9}$$

рівномірно і монотонно не спадаючи та монотонно не зростаючи відповідно збігаються на півосі $t \in [0, \infty)$ *до розв'язку* $x(t)$; *в) справджуються оцінки*

$$u(t) \le x(t) \le v(t) \quad (t \in [0, \infty)). \tag{29.10}$$

Доведення. В основі обгрунтування теореми лежать міркування, що використовують спеціально вибрану норму функції $x(t)$ на півосі $[0, \infty)$, яку означимо (див. бібліографію в [48]) за формулою

$$\|x\|_0 = \sup_{t \ge 0} \{\exp[-\lambda p(t)]\} \|x(t)\|, \tag{29.11}$$

де $\|x(t)\|$ – норма в E функції $x(t)$ при фіксованому t, λ – дійсне додатнє число,

$$p(t) = \int\limits_0^t l(s)\, ds.$$

Запровадимо позначення

$$T(y, z) = x_0 + \int\limits_0^t F(s; y(\tau_1(s)), \ldots, y(\tau_N(s)), z(\tau_1(s)), \ldots, z(\tau_N(s)))ds. \tag{29.12}$$

З умов 1), 2), 4), 5) випливає, що

$$\|T(y,z) - T(u,v)\| \le$$

$$\le \int\limits_0^t \|F(s; y(\tau_1(s)), \ldots, y(\tau_N(s)), z(\tau_1(s)), \ldots, z(\tau_N(s))) -$$

$$-F(s; u(\tau_1(s)), \ldots, u(\tau_N(s)), v(\tau_1(s)), \ldots, v(\tau_N(s)))\| \, ds \le$$

$$\le \int\limits_0^t \sum_{i=1}^N l_i^{(1)}(s)\,\alpha'(s)\,\|y(\tau_i(s)) - u(\tau_i(s))\| ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \sum_{i=1}^N l_i^{(2)}(s)\,\alpha'(s)\,\|z(\tau_i(s)) - v(\tau_i(s))\| ds \le$$

$$\le \int\limits_0^t \sum_{i=1}^N l_i^{(1)}(s)\,\alpha'(s)\, e^{\lambda \int\limits_0^{\tau_i(s)} l(\xi)d\xi} e^{-\lambda \int\limits_0^{\tau_i(s)} l(\xi)d\xi} \|y(\tau_i(s)) - u(\tau_i(s))\| ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \sum_{i=1}^N l_i^{(2)}(s)\,\alpha'(s)\, e^{\lambda \int\limits_0^{\tau_i(s)} l(\xi)d\xi} e^{-\lambda \int\limits_0^{\tau_i(s)} l(\xi)d\xi} \|z(\tau_i(s)) - v(\tau_i(s))\| ds \le$$

$$\le \max\{\|y-u\|_0, \|z-v\|_0\} \int\limits_0^l h(s)\,\alpha'(s) \exp\left[\lambda \int\limits_0^{\alpha(s)} l(\xi)\,d\xi\right] ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left\{\exp\left[\lambda \int\limits_0^{\alpha(t)} l(s)\,ds\right] - \exp\left[\lambda \int\limits_0^{\alpha(0)} l(s)\,ds\right]\right\} \|(y,z)-(u,v)\|_0,$$

де $\|(y,z)-(u,v)\|_0 = \max\{\|y-u\|_0, \|z-v\|_0\}$. Завдяки банаховому принципові стиску з цього випливає збіжність послідовностей $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ до границь $y^*(t)$, $z^*(t)$, а також рівність цих границь $y^*(t) = z^*(t) = x(t)$. При цьому $x(t)$ є обмеженим розв'язком на півосі $[0,\infty)$, бо норма $\|\cdot\|_0$ і рівномірна норма $\|x\|_1 = \sup\limits_{t\ge 0}\|x(t)\|$ є, що очевидно, еквівалентними. Отже, твердження а) обгрунтоване. Твердження б) випливає з того, що умова 3) та (29.6), (29.7) забезпечують монотонну знизу збіжність до $x(t)$ послідовності $\{y_n(t)\}$ та монотонну зверху збіжність до $x(t)$ послідовності $\{z_n(t)\}$. Це, зокрема, означає, що справджуються нерівності

$$y_n(t) \leq y_{n+1}(t) \leq x(t) \leq z_{n+1}(t) \leq z_n(t) \quad (t \in [0, \infty)),$$

з яких випливають оцінки (29.10). Теорему доведено.

Зауваження 29.1. *При доведенні теореми використана методика міркувань із [45]. За її допомогою в [45] обгрунтована однозначна розв'язність задачі (29.1), (29.2).*

Зауваження 29.2. *Теорема 29.1 охоплює основний результат із [110].*

§30. Системи алгебраїчних і трансцендентних рівнянь

На таких системах зупинимося як на прикладі застосування результатів з попередніх розділів. Докладніший виклад про застосування деяких двосторонніх алгоритмів до них можна знайти у [49] та у [57] (див. [57, §§31-34]). Як відомо, розв'язання багатьох математичних задач тим чи іншим способом здебільшого призводить до потреби реалізації числових методів для систем алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь. Це стосується, зокрема, до різних задач для диференціальних рівнянь із звичайними та із частинними похідними, функціонально-диференціальних рівнянь, інтегральних і інтегро-диференціальних рівнянь, варіаційних задач і т. п. Проблемам, які стосуються їх наближеного розв'язання, присвячені численні дослідження. Бібліографію з цього приводу можна знайти, наприклад, в [79, 49].

Будемо вважати, що систему алгебраїчних або трансцендентних рівнянь подано у вигляді

$$x_i = f_i(x_1, \ldots, x_N) \quad \left(i = \overline{1, R}\right), \tag{30.1}$$

де R, N є натуральними числами або нескінченністю.

Спочатку припускатимемо, що задані функції F_i $(i = \overline{1,R})$, для яких

$$F_i\left(x_1,\ldots,x_N;x_1,\ldots,x_N\right) = f_i\left(x_1,\ldots,x_N\right) \quad \left(i=\overline{1,R}\right) \tag{30.2}$$

в тій області E_1, у якій означені функції f_i ($i = \overline{1,R}$), де E_1 – підмножина деякого векторного простору E розмірності $N_0 \geq \sup\{R,N\}$, елементами якого є вектори $X = \{x_1,\ldots,x_{N_0}\}$ з дійсними компонентами. Будемо вважати, що в E запроваджено напівупорядкованість, за якої нерівність $y \leq z$ рівносильна із системою нерівностей $y_i \leq z_i$ $\left(i=\overline{1,N_0}\right)$. Задля спрощень викладу приймемо, що $R = N$.

Теорема 30.1. *Нехай: 1) функції $F_i(y_1,\ldots,y_N;z_1,\ldots,z_N)$ $(i=\overline{1,N})$ не спадають щодо $y_1,\ldots,y_N$, не зростають щодо $z_1,\ldots,z_N$; 2) задані вектори $u=\{u_1,\ldots,u_N\}$, $v=\{v_1,\ldots,v_N\}\in E_1$, для яких*

$$\begin{aligned} &u_i \leq F_i\left(u_1,\ldots,u_N;v_1,\ldots,v_N\right), \\ &v_i \geq F_i\left(v_1,\ldots,v_N;u_1,\ldots,u_N\right) \quad \left(i=\overline{1,N}\right), \end{aligned} \tag{30.3}$$

причому послідовності векторів $y^n=\{y_1^n,\ldots,y_N^n\}$, $z^n=\{z_1^n,\ldots,z_N^n\}$ з E_1, утворені за допомогою формул

$$\begin{aligned} y_i^0 = u_i, \quad z_i^0 = v_i, y_i^{n+1} = F_i\left(y_1^n,\ldots,y_N^n;z_1^n,\ldots,z_N^n\right), \\ z_i^{n+1} = F_i\left(z_1^n,\ldots,z_N^n;y_1^n,\ldots,y_N^n\right)\left(i=\overline{1,N}\right), \end{aligned} \tag{30.4}$$

збігаються відповідно до векторів $y^*=\{y_1^*,\ldots,y_N^*\}$, $z^*=\{z_1^*,\ldots,z_N^*\}$, які є компонентами крайнього в E_1 розв'язку (y^*,z^*) системи рівнянь

$$\begin{aligned} &y_i = F_i\left(y_1,\ldots,y_N;z_1,\ldots,z_N\right), \\ &z_i = F_i\left(z_1,\ldots,z_N;y_1,\ldots,y_N\right) \quad \left(i=\overline{1,N}\right). \end{aligned} \tag{30.5}$$

Тоді для всякого розв'язку $x\in E_1$ системи (30.1) мають місце оцінки

$$u_i \leq x_i \leq v_i \quad \left(i=\overline{1,N}\right). \tag{30.6}$$

Ця теорема співпадає з теоремою 31.1 з [49]. Її можна отримати з теореми 19.5. Наступна теорема є частковим випадком з теореми 30.1.

Теорема 30.2. *Нехай задані функції* $G_i(x_1,\dots,x_N;x_1,\dots,x_N)$, $H_i(x_1,\dots,x_N;x_1,\dots,x_N)$ $\left(i=\overline{1,N}\right)$, *для яких справджуються умови: 1) якщо* $x\in E_1$, *то*

$$G_i(x_1,\dots,x_N;x_1,\dots,x_N)\le f_i(x_1,\dots,x_N)\le \\ \le H_i(x_1,\dots,x_N;x_1,\dots,x_N); \tag{30.7}$$

2) функції $G_i(y_1,\dots,y_N;z_1,\dots,z_N)$, $H_i(y_1,\dots,y_N;z_1,\dots,z_N)$ *не спадають щодо* y_j *не зростають щодо* z_j $\left(j=\overline{1,N}\right)$*; 3) вектори* $u,v\in E_1$ *задовольняють нерівності*

$$\begin{aligned} &u_i\le G_i(u_1,\dots,u_N;v_1,\dots,v_N),\\ &v_i\ge H_i(v_1,\dots,v_N;u_1,\dots,u_N)\quad \left(i=\overline{1,N}\right); \end{aligned} \tag{30.8}$$

4) при кожному $i=\overline{1,N}$ *послідовності* $\{y_i^n\}$, $\{z_i^n\}$, *побудовані за допомогою формул*

$$y_i^0=u_i,\quad z_i^0=v_i,$$

$$\begin{aligned} &y_i^{n+1}=G_i(y_1^n,\dots,y_N^n;z_1^n,\dots,z_N^n),\\ &z_i^{n+1}=H_i(z_1^n,\dots,z_N^n;y_1^n,\dots,y_N^n)\quad \left(i=\overline{1,N}\right), \end{aligned} \tag{30.9}$$

збігаються відповідно до границь y_i^*, z_i^*, *причому вектори* $y^*=\{y_1^*,\dots,y_N^*\}$, $z^*=\{z_1^*,\dots,z_N^*\}\in E_1$ *є компонентами крайнього в* E_1 *розв'язку системи рівнянь*

$$\begin{aligned} &y_i=G_i(y_i,\dots,y_N;z_1,\dots,z_N),\\ &z_i=H_i(z_1,\dots,z_N;y_i,\dots,y_N)\quad \left(i=\overline{1,N}\right); \end{aligned} \tag{30.10}$$

5) послідовності $\{y_i^n\}$, $\{z_i^n\}$, *побудовані за формулами (30.9) з початковими наближеннями*

$$y_i^0=z_i^0=x_i\quad \left(i=\overline{1,N}\right),$$

де x_i *компоненти розв'язку* $x=\{x_1,\dots,x_{N_0}\}\in E_1$ *система рівнянь (30.1), збігаються відповідно до компонент* φ_i^*, ψ_i^* *розв'язку* (φ^*,ψ^*) *системи рівнянь (30.10), де* $\varphi^*=\{\varphi_1^*,\dots,\varphi_N^*\}$, $\psi^*=\{\psi_1^*,\dots,\psi_N^*\}$. *Тоді для цього розв'язку* x *рівняння (30.1) мають місце оцінки (30.6).*

У тому випадку, коли G_i, H_i є лінійними функціями, тобто, якщо вони мають вигляд

$$G_i\left(y_i,\ldots,y_N;z_1,\ldots,z_N\right)=\sum_{j=1}^{N}g_{ij}^1y_j-\sum_{j=1}^{N}g_{ij}^2z_j+b_i^1,$$
$$H_i\left(y_i,\ldots,y_N;z_1,\ldots,z_N\right)=\sum_{j=1}^{N}h_{ij}^1y_j-\sum_{j=1}^{N}h_{ij}^2z_j+b_i^2,$$

де b_i^1, b_i^2, g_{ij}^1, g_{ij}^2, h_{ij}^1, h_{ij}^2 – дійсні числа і $g_{ij}^k \geq 0$, $h_{ij}^k \geq 0$ $\left(k=1,\ 2;\ i,j=\overline{1,N}\right)$, для виконання умов 3) і 4) досить, щоб був меншим за одиницю спектральний радіус $\rho\left(L\right)$ матриці $L=\{l_{ij}\}_{i,j=\overline{1,2N}}$, де

$$l_{pq}=\begin{cases} g_{ij}^1, \text{якщо} & p=i,\ q=j,\\ -g_{ij}^2, \text{якщо} & p=i,\ q=N+j,\\ h_{ij}^1, \text{якщо} & p=N+i,\ q=j,\\ -h_{ij}^2, \text{якщо} & p=N+i,\ q=N+j, \quad \left(i,j=\overline{1,N}\right).\end{cases}$$

Зупинимося на тому частковому випадкові, коли для системи рівнянь (30.1) маємо ситуацію, яка в абстрактному вигляді проаналізована у §21. Будемо вважати, що $E_1=E$ є банаховим цілком правильно напівупорядкованим простором E_N векторів з N дійсними координатами. Якщо N є скінченним числом, то можна вважати, що норма в E_N означена, наприклад, за однією з формул

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad\left(p\geq 1\right),\quad \|x\|=\max_{i=\overline{1,N}}|x_i|\,.$$

Для нескінченного N можна вважати, наприклад, що E_N співпадає з простором l^p, у якому норма означена за формулою

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad\left(p>1\right),$$

або за формулою

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}C_i^p\,|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad\left(p>1\right)$$

з додатними числами $C_i \quad \left(i = \overline{1, N}\right)$. Вважаючи, що справджуються співвідношення (30.2) і зважаючи на потребу розглядати також і систему (30.5), запровадимо в $E_N \times E_N$ норму пар $\|y, z\| \, (y, z \in E_N)$. Це можна зробити, як і в [55, 57], наприклад, одним із таких способів

$$\|y, z\| = \left(\|y\|^p + \|z\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1)\,, \tag{30.11}$$

$$\|y, z\| = \max\left\{\|y\|\,, \|z\|\right\}. \tag{30.12}$$

Це дає змогу застосувати до системи (30.1) результати із §21, використовуючи умову A: з існування такого дійсного числа $M > 0$, для якого $\|y, z\| \geq M$, випливає нерівність

$$\|F\,(y, z)\,, F\,(z, y)\| \leq \|y, z\|\,, \tag{30.13}$$

де $F\,(y, z) = \{F_1\,(y, z)\,, \ldots, F_N\,(y, z)\}$, $y = \{y_1, \ldots, y_N\}$, $z = \{z_1, \ldots, z_N\}$.

Теорема 30.3. *Нехай: 1) справджуються співвідношення (30.2) та умова 1) теореми 30.1; 2) задані вектори $u, v \in E_N$, які задовольняють співвідношення (30.3); 3) виконана умова A, тобто, при $\|y, z\| \geq M$ будемо мати нерівність (30.13). Тоді існує розв'язок $(y, z) \in E_N \times E_N$ системи рівнянь(30.5), для якого справджуються оцінки*

$$u_i \leq y_i, \quad v_i \geq z_i \tag{30.14}$$

і послідовності $\{y_i^n\}$ та $\{z_i^n\}$ збігаються відповідно до y_i та $z_i \quad \left(i = \overline{1, N}\right)$, якщо $y_i^0 = u_i$, $z_i^0 = v_i$.

Теорема 30.4. *Якщо справджуються умови теореми 30.3 і, крім того, система (30.1) має розв'язок $x \in E_N$, а система (30.5) може мати не більше як один розв'язок, то для єдиного розв'язку $x \in E_N$ системи (30.1) мають місце оцінки (30.6) і послідовності $\{y_i^n\}$, $\{z_i^n\}$ збігаються до компонент $x_i \quad \left(i = \overline{1, N}\right)$ цього розв'язку за умови вибору $y_i^0 = u_i$, $z_i^0 = v_i$.*

Зауваження 30.1. *Якщо в умовах теореми 30.3 функції $F_i\,(y, z) \quad \left(i = \overline{1, N}\right)$ не залежать від z, то умови її забезпечують існування бодай одного розв'язку системи рівнянь (30.1), причому послідовності $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ збігаються до розв'язків системи (30.1).*

Замість припущення про цілком правильну напівупорядкованість E_N можна скористатися із слабкішого припущення про правильну напівупорядкованість E_N.

Теорема 30.5. *Нехай E_N правильно напівупорядкований N-мірний простір ($N \leq \infty$) і нехай збіжність в E_N розглядається як покоординатна. Нехай: 1) справджуються умови 1) та 2) теореми 30.3; 3) замість умови A справджується припущення про існування такого числа $M > 0$, що з нерівності $|y_i| \geq M$ або з нерівності $|z_i| \geq M$ для якогось $i = \overline{1, N}$ випливає для того самого номера i нерівність*

$$|F_i\,(y_i, \ldots, y_N; z_1, \ldots, z_N)| < |y_i|$$

або нерівність

$$|F_i\,(z_1, \ldots, z_N; y_i, \ldots, y_N)| < |z_i|\,.$$

Тоді для всякого розв'язку $x \in E_N$ системи (30.1) мають місце оцінки

$$-M \leq x_i \leq M \quad \left(i = \overline{1, N}\right). \tag{30.15}$$

Умови цієї теореми забезпечують також збіжність послідовностей $\{y_i^n\}$ та $\{z_i^n\}$, побудованих за формулами (30.4) з початковими наближеннями $y_i^0 = -M$, $z_i^0 = M$, до компонент y_i та z_i розв'язку системи (30.5).

Теореми 30.3, 30.4 випливають безпосередньо з результатів §21. Тому їх доведення пропускаємо. Теорема 30.5 подана у [57] як теорема 33.2, для її доведення можна скористатися з ідей доведення результатів із §21.

Зауваження 30.2. *У скінченновимірному випадку $N < \infty$ з умов теорем 30.3, 30.5 випливає додатковий факт існування розв'язку $x = \{x_1, \ldots, x_N\}$ системи (30.1) за додаткового припущення про неперервність функцій F_i, бо в такому разі оператор, породжений правою частиною системи (30.1), є цілком неперервним й маємо підставу застовувати теорему Брауера про нерухому точку.*

Зауваження 30.3. *Наведені тут результати, що містяться у теоремах 30.3-30.5, допускають узагальнення у двох напрямах.*

В першому з них маємо на увазі, що замість умови (30.2) можна розглядати умову (30.7). Другий з можливих напрямків узагальнень стосується ситуації, коли в умовах теорем 30.3-30.5 замість припущення про гетеротонність оператора, породженого правою частиною системи (30.1), тобто, замість неспадання $F_i(y,z)$ *щодо* y *та незростання* $F_i(y,z)$ *щодо* z, *використовується часткова ліпшицієвість* $F_i(y,z)$. *Сказане стосується й тої ситуації, коли припущення (30.2) можна замінити припущенням (30.7), якщо взяти до уваги, що у цій ситуації йтиме мова про часткову ліпшицієвість функцій* G_i^1, G_i^2, H_i^1, H_i^2. *Обмежимося цим зауваженням, зважаючи на те, що докладніше формулювання і доведення відповідних узагальнень тут (як і в інших розділах) неоправдано збільшили б фізичний об'єм книги; можливість формулювання і доведення зазначених узагальнень можна використати також у ролі вправ.*

Зауваження 30.4. *Не вдаючись до подробиць, зазначимо, що в [29] та в [20] для системи (30.1) встановлені деякі результати, які отримуються як часткові випадки з теорем 30.3-30.5 та із результатів §21 за припущень, що* $f_i(x_1,\ldots,x_N)$ *не спадають щодо всіх аргументів* $\left(i=\overline{1,N}\right)$ *і що справджується припущення*

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\|f(x)\|=0, \tag{30.16}$$

де $f(x)=\{f_1(x_1,\ldots,x_N),\ldots,f_N(x_1,\ldots,x_N)\}$. *Зазначимо очевидне: умова А навіть у випадку монотонної* $f(x)$ *може справджуватись, коли*

$$\lim_{\|x\|\to\infty}\|f(x)\|\le 1,$$

а також і коли $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}\|f(x)\|$ *не існує.*

РОЗДІЛ XI. ДВОСТОРОННІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Чисельно-аналітичному методові А.М.Самойленка (див. [85]) присвячено чимало досліджень (див., напр., бібліографію в [85, 86]). Поєднанню ідеї цього методу з ідеєю побудови двосторонніх наближень до розв'язків періодичної крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь стосується повідомлення М.С.Курпеля [45] (див., також [57]). Розвиток започаткованого в [44] способу двосторонньої апроксимації розв'язків тих чи інших класів рівнянь можна знайти у багатьох дослідженнях (див., напр., [86, 88, 89]). Наведені у цьому розділі результати близькі до результатів із [88, 89] і частково опубліковані в [67].

§31. Двостороння апроксимація періодичних розв'язків диференціальних рівнянь

Використаний в [57] підхід із [45] до побудови двосторонніх наближень до періодичних розв'язків диференціальних рівнянь грунтується на чисельно-аналітичному методі А.М.Самойленка [85]. Методові А.М.Самойленка присвячені дослідження багатьох авторів (див., напр., [85, 86, 57]). Адаптація М.С.Курпелем [45, 57] чисельно-аналітичного методу А.М.Самойленка для двосторонньої апроксимації періодичних розв'язків диференціальних рівнянь із звичайними похідними досліджувалася в [88, 89], а для рівнянь з частинними похідними – в [86].

Для диференціального рівняння

$$x'(t) = f(t, x, x), \tag{31.1}$$

де $f(t, y, z) : (-\infty, \infty) \times [a, b] \times [a, b] \to E$, $a \le b$, $a, b \in E$, E – напівупорядкований простір, шукатимемо періодичний розв'язок, вважаючи функцію $f(t, y, z)$ неперервною за сукупністю аргументів, періодичною щодо t з періодом T. Дотримуючись символіки із [42, 52], позначатимемо $E_{t_0,T}$ множину всіх таких неперервних функцій $x(t)$, для яких

$$x(t_0) = x(t_0 + T) = x_0, \quad a \le x(t) \le b \quad (t \in (-\infty; +\infty)). \tag{31.2}$$

Вирізнимо такі припущення.

Умова 1) *Задані неперервні щодо t, y, z неспадні щодо y незростаючі щодо z функції $a_1(t,y,z)w$, $a_2(t,y,z)w$, які щодо w є лінійними додатніми неперервними операторами із значеннями в E і для яких з нерівності $y \le z \quad (y,z \in [a,b],\ t \in (-\infty,\infty))$ випливає*

$$\begin{gathered} -a_1(t,y,z)(z-y) \le f(t,z,x) - f(t,y,x), \\ f(t,x,z) - f(t,x,y) \le a_2(t,y,z)(z-y). \end{gathered} \tag{31.3}$$

Умова 2) *Задані $m, M \in E$, для яких*

$$\begin{aligned} & m \le -(a_1(t,y,z) + a_2(t,y,z))(z-y) + f(t,y,z) \le M, \\ & m \le (a_1(t,y,z) + a_2(t,y,z))(z-y) + f(t,z,y) \le M \end{aligned} \tag{31.4}$$

при $t \in (-\infty,\infty)$, $y,z \in [a,b]$, причому

$$a + \frac{1}{4}T(M-m) \le x_0 \le b - \frac{1}{4}T(M-m). \tag{31.5}$$

Позначимо

$$\begin{gathered}
F_1(t,y,z) = x_0 + \left(1 - \tfrac{t-t_0}{T}\right) \int\limits_{t_0}^{t} f(s, y(s), z(s))\, ds - \\
- \tfrac{t-t_0}{T} \int\limits_{t}^{t_0+T} f(s, z(s), y(s))\, ds - \left(1 - \tfrac{t-t_0}{T}\right) \times \\
\times \int\limits_{t_0}^{t} \left[a_1(s, z(s), y(s)) + a_2(s, z(s), y(s))\right] \times \\
\times (z(s) - y(s))\, ds + \tfrac{t-t_0}{T} \int\limits_{t}^{t_0+T} [a_1(s, z(s), y(s)) + \\
+ a_2(s, z(s), y(s))] (z(s) - y(s))\, ds, \\
F_2(t,z,y) = x_0 + \left(1 - \tfrac{t-t_0}{T}\right) \int\limits_{t_0}^{t} f(s, z(s), y(s))\, ds - \\
- \tfrac{t-t_0}{T} \int\limits_{t}^{t_0+T} f(s, y(s), z(s))\, ds + \left(1 - \tfrac{t-t_0}{T}\right) \times \\
\times \int\limits_{t_0}^{t} \left[a_1(s, z(s), y(s)) + a_2(s, z(s), y(s))\right] \times \\
\times (z(s) - y(s))\, ds + \tfrac{t-t_0}{T} \int\limits_{t}^{t_0+T} [a_1(s, z(s), y(s)) + \\
+ a_2(s, z(s), y(s))] (z(s) - y(s))\, ds.
\end{gathered} \tag{31.6}$$

Приймемо

$$\begin{gathered}
y_0 = x_0 - (t - t_0)\left(1 - \tfrac{t-t_0}{T}\right)(M - m), \\
z_0 = x_0 + (t - t_0)\left(1 - \tfrac{t-t_0}{T}\right)(M - m).
\end{gathered} \tag{31.7}$$

Розглянемо ітераційний процес

$$\begin{gathered}
y_{n+1}(t) = F_1(t, y_n, z_n), \\
z_{n+1}(t) = F_2(t, y_n, z_n) \quad (n = 0, 1, \ldots).
\end{gathered} \tag{31.8}$$

Теорема 31.1. *За припущень 1), 2) послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, побудовані за допомогою формул (31.7), (31.8) та (31.6), при кожному $n = 0, 1, \ldots$ задовольняють співвідношення*

$$\begin{gathered}
y_n(t), z_n(t) \in E_{t_0,T}, \\
y_n(t) \le y_{n+1}(t) \le z_{n+1}(t) \le z_n(t) \quad (t \in [t_0, t_0 + T]).
\end{gathered} \tag{31.9}$$

Доведення. Співвідношення (31.5), (31.7) та (31.8) для $n = 0$ призводять до нерівностей

$$y_0(t) \le y_1(t) \le z_1(t) \le z_0(t) \quad (t \in [t_0, t_0 + T]). \tag{31.10}$$

Тому можна скористатися з тих самих міркувань, які використані у §15 для доведення аналогів нерівностей вигляду (31.9).

Теорема 31.2. *Нехай справджуються умови теореми 31.1 і, крім того, має розв'язок $x^*(t) \in E_{t_0,T}$ рівняння*

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 + \left(1 - \tfrac{t-t_0}{T}\right) \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s))\, ds - \\ - \tfrac{t-t_0}{T} \int\limits_{t}^{t_0+T} f(s, x(s), x(s))\, ds. \end{aligned} \tag{31.11}$$

Тоді для $t \in [t_0, t_0 + T]$, $n = 0, 1, \ldots$ мають місце співвідношення

$$y_n(t) \le y_{n+1}(t) \le x^*(t) \le z_{n+1}(t) \le z_n(t). \tag{31.12}$$

Доведення. Маючи на увазі правдивість співвідношень (31.10), можна скористатися теоремами 15.1 та 15.2.

Подібним способом з покликанням на результати §15 можна переконатися у обґрунтованості такого твердження.

Теорема 31.3. *Нехай справджуються умови 1), 2) і простір E є правильно напівупорядкованим. Тоді для всякого розв'язку $x^*(t) \in E_{t_0,T}$ рівняння (31.11) мають місце при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$ оцінки*

$$\begin{aligned} y_n(t) \le y_{n+1}(t) \le y^*(t) \le x^*(t) \le z^*(t) \le \\ \le z_{n+1}(t) \le z_n(t), \end{aligned} \tag{31.13}$$

де $(y^*(t), z^*(t))$ – крайній в $E_{t_0,T}$ розв'язок системи

$$\begin{aligned} y(t) &= F_1(t, y, z), \\ z(t) &= F_2(t, z, y) \end{aligned} \tag{31.14}$$

з побудованими за формулами (31.6) операторами F_1, F_2.

Наступне припущення назвемо умовою 3).

Умова 3) *Задані лінійні неперервні додатні щодо* w *оператори* $\gamma_1(t,y,z)\,w$, $\gamma_2(t,y,z)\,w$, *неперервні щодо* t, y, z, *для яких із співвідношень* $y \le z$, $y,z \in [a,b]$, $t \in (-\infty,\infty)$ *випливають нерівності*

$$\begin{aligned} &f(t,z,x) - f(t,y,x) \le (-a_1(t,z,y) + \gamma_1(t,y,z))(z-y)\,, \\ &(a_2(t,z,y) - \gamma_2(t,y,z))(z-y) \le f(t,x,z) - f(t,x,y)\,. \end{aligned} \tag{31.15}$$

Теорема 31.4. *Нехай виконані умови 1)-3) і існує лінійний додатній щодо* w *оператор* $A(t,y,z)\,w$, *для якого при* $t \in [t_0, t_0+T]$, $y,z \in [a,b]$ *маємо*

$$\begin{gathered} Aw = A(t,y,z)\,w \ge \left(1 - \tfrac{t-t_0}{T}\right)\int\limits_{t_0}^{t}[a_1(s,z(s),y(s)) + \\ + a_2(s,z(s),y(s)) + \gamma_1(s,y(s),z(s)) + \gamma_2(s,y(s),z(s))] \times \\ \times w(s)\,ds + \tfrac{t-t_0}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}[a_1(s,z(s),y(s)) + a_2(s,z(s),y(s)) + \\ + \gamma_1(s,y(s),z(s)) + \gamma_2(s,y(s),z(s))]\,w(s)\,ds. \end{gathered} \tag{31.16}$$

Тоді з припущення

$$\lim_{n\to\infty} A^n(M-m) = \theta, \tag{31.17}$$

де границю розглядаємо у розумінні породженої напівупорядкованістю E *топології* (θ *– нульовий елемент в* E), *випливає існування єдиного розв'язку* $x^*(t) \in E_{t_0,T}$ *рівняння (31.11) і до* $x^*(t)$ *збігаються послідовності* $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$, *побудовані за формулами (31.7), (31.8), (31,9). При цьому має місце оцінка*

$$z_n(t) - y_n(t) \le \frac{1}{2}A^n(M-m) \quad (n = 0,1,\ldots) \tag{31.18}$$

та оцінки

$$z_n(t) - x^*(t) \le \tfrac{1}{2}A^n(M-m)\,,$$

$$x^*(t) - y_n(t) \le \tfrac{1}{2}A^n(M-m)\,.$$

Доведення можна провести за такою самою схемою, за якою доведено теорему 15.4.

Якщо, зокрема, E є напівупорядкованим банаховим простором, то умова (31.17) справджується за припущення, що

$$\|A(t,y,z)\| \le q < 1.$$

Для того, щоб рівняння (31.1) мало періодичний розв'язок, який є періодичним продовженням розв'язку $x^*(t)$ рівняння (31.11), необхідно і достатньо, щоб справджувалася рівність

$$\Delta(x_0, x^*) = 0, \tag{31.19}$$

де

$$\Delta(x_0, x) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t, x(t), x(t))\,dt. \tag{31.20}$$

Отже, йдеться про існування нулів функції $\Delta(x_0, x^*)$ як функції від x_0, якщо $x^* = x^*(t)$ є розв'язком рівняння (31.11).

Задля прикладу розглянемо докладніше частковий випадок, коли a_1, a_2 є нульовими операторами, тобто, випадок, коли $f(t,y,z)$ не спадає щодо y, не зростає щодо z. Цей випадок розглядався М.С.Курпелем в [45] (див. також [57, §30]). Наступна теорема отримується за цієї ситуації як наслідок з теореми 33.1.

Теорема 31.5 *(див. [57, теорема 30.1]). Нехай $f(t,y,z)$ не спадає щодо y, не зростає щодо z та справджуються співвідношення*

$$m \le f(t,y,z) \le M \tag{31.21}$$

при $y, z \in [a,b]$, $t \in (-\infty, \infty)$. Нехай послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ утворюються за допомогою формул (31.7) та формул

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= F(t, y_n, z_n), \\ z_{n+1}(t) &= F(t, z_n, y_n), \end{aligned}$$

де

$$F(t,y,z) = x_0 + \left(1 - \frac{t-t_0}{T}\right)\int\limits_{t_0}^{t} f(s, y(s), z(s))\,ds -$$

$$-\frac{t-t_0}{T}\int\limits_{t}^{t_0+T} f\left(s,z\left(s\right),y\left(s\right)\right)ds.$$

Тоді мають місце співвідношення (31.10).

Подібним способом можна отримати часткові випадки теорем 31.2-31.4 для виокремленого випадку, коли $f\left(t,y,z\right)$ є гетеротонною функцією щодо y, z.

Як зазначено в [45, 57], гетеротонну функцію $f\left(t,y,z\right)$ можна побудувати, наприклад, для такої немонотонної функції $g\left(t,x\right)$, для якої правдиві оцінки

$$-h\left(t,y\right)+h\left(t,z\right)\leq g\left(t,y\right)-g\left(t,z\right)\leq h\left(t,y\right)-h\left(t,z\right)$$

при $z\leq y$, де $h(t,x)$ - ізотонна по x . В такому випадку можна прийняти

$$f\left(t,y,z\right)=\frac{1}{2}\left(g\left(t,y\right)+h\left(t,y\right)\right)+\frac{1}{2}\left(g\left(t,z\right)-h\left(t,z\right)\right).$$

Очевидно, що сконструйована у такий спосіб функція $f\left(t,y,z\right)$ не спадає щодо y, не зростає щодо z.

Щодо побудови гетеротонних функцій достатньо загальні результати отримані в [93].

§32. Двостороння апроксимація розв'язків періодичної задачі керування

Нерідко задачі електро- і радіотехніки зводяться до дослідження періодичних розв'язків систем нелінійних диференціальних рівнянь, які містять невідомий параметр λ. Періодичні розв'язки доводиться шукати серед λ-параметричної множини розв'язків відповідної системи.

Під періодичною задачею керування (див. [85, 88]) розуміємо задачу про відшукання T-періодичних розв'язків системи диференціальних рівнянь

$$x'\left(t\right)=f\left(t,\ x,\lambda\right), \tag{32.1}$$

та значень параметра $\lambda \in J$, при яких ці розв'язки задовольняють умову

$$x(t_0) = x(t_0 + T) = x_0, \quad a \leq x(t) \leq b \quad (t \in (-\infty, \infty)). \tag{32.2}$$

Вважатимемо, що функція $f(t, x, \lambda)$ – визначена і неперервна в області $D = (-\infty; \infty) \times I \times J$, ($I = [a; b]$, $J = [c; d]$, $a, b, c, d \in E$, $a \leq b$, $c \leq d$) і періодична за t з періодом T.

Використовуючи методику, запропоновану в [88], вважаємо, що права частина рівняння (32.1) має вигляд

$$f(t, x, \lambda) = h(t, x, x, \lambda, \lambda) - A\lambda, \tag{32.3}$$

де A - ненульова стала матриця, для якої $A^{-1} > \theta$, і при цьому справджуються такі умови:

Умова 1) *функція $h(t, x, x, \lambda, \lambda)$ визначена і неперервна в області $(-\infty; \infty) \times I \times I \times J \times J$ і періодична за t з періодом T;*

Умова 2) *задані неперервні за сукупністю аргументів, незростаючі за y, η неспадні за z, μ функції $a_1(t, y, z)\, w$, $a_2(t, y, z)\, w$ та $k_1(t, \eta, \mu)\, \omega$, $k_2(t, \eta, \mu)\, \omega$, які щодо w та ω є лінійними неперервними додатними операторами і для яких зі співвідношень $y(t) \leq z(t)$, $\eta \leq \mu$ $(t \in [0, T]$, $x, y, z \in [a, b]$, $\lambda, \eta, \mu \in [c, d])$ випливають нерівності*

$$\begin{aligned} -a_1(t, y, z)(z - y) - k_1(t, \eta, \mu)(\mu - \eta) \leq \\ \leq h(t, z, x, \mu, \lambda) - h(t, y, x, \eta, \lambda), \\ h(t, x, z, \lambda, \mu) - h(t, x, y, \lambda, \eta) \leq \\ \leq a_2(t, y, z)(z - y) + k_2(t, \eta, \mu)(\mu - \eta). \end{aligned} \tag{32.4}$$

Скориставшись операторами (див. [88])

$$\begin{aligned} L[\varphi(t, x(t)); \psi(t, x(t))] = \left(1 - \tfrac{t}{T}\right) \int_0^t \varphi(s, x(s)) ds - \\ - \tfrac{t}{T} \int_t^T \psi(s, x(s)) ds, \end{aligned} \tag{32.5}$$

$$S[\varphi(t, x(t))] = T^{-1} A^{-1} \int_0^T \varphi(s, y(s)) ds, \tag{32.6}$$

визначимо послідовні наближення до розв'язку задачі (32.1), (32.2) за формулами

$$\begin{aligned}
&y_{n+1}(t) = L\left[F_1(t, y_n, z_n, \eta_n, \mu_n); F_2(t, y_n, z_n, \eta_n, \mu_n)\right] + x_0,\\
&z_{n+1}(t) = L\left[F_2(t, y_n, z_n, \eta_n, \mu_n); F_1(t, y_n, z_n, \eta_n, \mu_n)\right] + x_0,\\
&\eta_{n+1} = S\left[F_1(t, y_n, z_n, \eta_n, \mu_n)\right],\\
&\mu_{n+1} = S\left[F_2(t, y_n, z_n, \eta_n, \mu_n)\right],
\end{aligned} \tag{32.7}$$

де

$$\begin{aligned}
&F_1(t, y, z, \eta, \mu) = (a_1(t, y, z) + a_2(t, y, z))(y - z) +\\
&+ (k_1(t, \eta, \mu) + k_2(t, \eta, \mu))(\eta - \mu) + h(t, y, z, \eta, \mu),\\
&F_2(t, y, z, \eta, \mu) = (a_1(t, y, z) + a_2(t, y, z))(z - y) +\\
&+ (k_1(t, \eta, \mu) + k_2(t, \eta, \mu))(\mu - \eta) + h(t, z, y, \mu, \eta).
\end{aligned} \tag{32.8}$$

Теорема 32.1. *Нехай існують такі $y_0, z_0 \in [a; b]$, $\eta_0, \mu_0 \in [c; d]$, для яких, разом із y_1, z_1, η_1, μ_1, визначеними за формулами (32.7), (32.8), справджуються нерівності*

$$y_0 \le y_1 \le z_1 \le z_0, \tag{32.9}$$

$$\eta_0 \le \eta_1 \le \mu_1 \le \mu_0, \tag{32.10}$$

тоді при виконанні умов 1), 2) для послідовних наближень (32.7) (32.8) справджуються співвідношення

$$y_n \le y_{n+1} \le z_{n+1} \le z_n, \tag{32.11}$$

$$\eta_n \le \eta_{n+1} \le \mu_{n+1} \le \mu_n, \tag{32.12}$$

при $n = 0, 1, ...$

Доведення. При $n = 0$ співвідношення (32.11), (32,12) вірні за умовою теореми. Міркування аналогічні до тих, які використані для доведення нерівностей такого вигляду в §15 дозволяють довести, що нерівності (32.11), (32,12) мають місце для довільного $n = 1, 2, ...$

Нехай виконується

Умова 3) *задані $\underline{M}, \overline{M} \in E$ такі, що в області D справджується нерівність*

$$\underline{M} \le h(t, x, x, \lambda, \lambda) \le \overline{M}, \tag{32.13}$$

причому

$$a+\frac{T}{4}\left(\overline{M}-\underline{M}\right)\leq x_0\leq b-\frac{T}{4}\left(\overline{M}-\underline{M}\right), \tag{32.14}$$

$$c\leq A^{-1}\underline{M}\leq A^{-1}\overline{M}\leq d. \tag{32.15}$$

Тоді можна покласти

$$\begin{array}{l} y_0\left(t\right)=x_0-t\left(1-\frac{t}{T}\right)\left(\overline{M}-\underline{M}\right), \\ z_0\left(t\right)=x_0+t\left(1-\frac{t}{T}\right)\left(\overline{M}-\underline{M}\right), \\ \eta_0=c, \quad \mu_0=d. \end{array} \tag{32.16}$$

Теорема 32.2. *Якщо існує пара $\{x^*,\lambda^*\}$, $x^*\in[a;b]$, $\lambda^*\in[c;d]$, яка є розв'язком задачі (32.1), (32.2), і виконані умови 1)-3), то для послідовних наближень, визначених за формулами (32.16), (32.7) - (32.8), мають місце нерівності*

$$y_n\leq y_{n+1}\leq x^*\leq z_{n+1}\leq z_n, \tag{32.17}$$

$$\eta_n\leq \eta_{n+1}\leq \lambda^*\leq \mu_{n+1}\leq \mu_n, \tag{32.18}$$

$$n=0,1,...$$

Доведення теореми 32.2 провадиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 15.1 із §15.

Припустимо правдивість умови:

Умова 4) *Задані неперервні за сукупністю аргументів додатні при $t\in[0,T]$, $y,z\in[a,b]$, $\eta,\mu\in[c,d]$ дійсні функції $\gamma_1(t,y,z)\,w$, $\gamma_2(t,y,z)\,w$, $\delta_1(t,\eta,\mu)\,\omega$, $\delta_2(t,\eta,\mu)\,\omega$, які є лінійними неперервними додатними щодо w, ω операторами, і для яких зі співвідношень $y(t)\leq z(t)$, $\eta\leq\mu$ ($t\in[0,T]$, $x,y,z\in[a,b]$, $\lambda,\eta,\mu\in[a,b]$) випливають нерівності*

$$\begin{array}{l} h\left(t,z,x,\mu,\lambda\right)-h\left(t,y,x,\eta,\lambda\right)\leq\left(a_1\left(t,y,z\right)+\right. \\ \left.+\gamma_1\left(t,y,z\right)\right)\left(z-y\right)+\left(k_1\left(t,\eta,\mu\right)+\delta_1\left(t,\eta,\mu\right)\right)\left(\mu-\eta\right), \\ -\left(a_2\left(t,y,z\right)+\gamma_2\left(t,y,z\right)\right)\left(z-y\right)-\left(k_2\left(t,\eta,\mu\right)+\right. \\ \left.+\delta_2\left(t,\eta,\mu\right)\right)\left(\mu-\eta\right)\leq h\left(t,x,z,\lambda,\mu\right)-h\left(t,x,y,\lambda,\eta\right). \end{array} \tag{32.19}$$

Запровадимо позначення

$$q_x = \max_{\substack{t \in [0;T] \\ y,z \in [a;b]}} \left(3\left(a_1\left(t,y,z\right) + a_2\left(t,y,z\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \gamma_1\left(t,y,z\right) + \gamma_2\left(t,y,z\right)\right), \tag{32.20}$$

$$q_\lambda = \max_{\substack{t \in [0;T] \\ \eta,\mu \in [c;d]}} \left(3\left(k_1\left(t,\eta,\mu\right) + k_2\left(t,\eta,\mu\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \delta_1\left(t,\eta,\mu\right) + \delta_2\left(t,\eta,\mu\right)\right), \tag{32.21}$$

$$Q = \begin{pmatrix} Tq_x & Tq_\lambda \\ A^{-1}q_x & A^{-1}q_\lambda \end{pmatrix}. \tag{32.22}$$

Теорема 32.3. *Нехай справджуються умови 1)-4) та нерівність $\|Q\| \leq q < 1$. Тоді в області D задача (32.1), (32.2) має єдиний розв'язок (x^*, λ^*) до якого рівномірно щодо $t \in [0,T]$ збігаються послідовності $\{y_n, \eta_n\}$, $\{z_n, \mu_n\}$, визначені за формулами (32.7), (32.8), і при цьому справджуються співвідношення (32.17), (32.18).*

Доведення теореми можна провести, використовуючи міркування, подібні до використаних при доведенні теореми 15.4.

Зауваження 32.1. *Вимогу $A^{-1} > \theta$, як відмічено в [88], можна замінити слабшим припущенням. Нехай A - відмінна від нуля стала матриця, тоді, записавши A^{-1} у вигляді $A^{-1} = A_+^{-1} - A_-^{-1}$, де $A_+^{-1} \geq \theta$ $A_-^{-1} \geq \theta$, оператор S в (32.6) можна означити (див. [88]) за допомогою рівності*

$$S\left[\varphi\left(t,x\left(t\right)\right)\right] = T^{-1}\left(A_+^{-1}\int\limits_0^T \varphi\left(s,y\left(s\right)\right)ds \right.$$
$$\left. - A_-^{-1}\int\limits_0^T \varphi\left(s,y\left(s\right)\right)ds\right) \tag{32.23}$$

Приклад 32.1. Розглянемо задачу про відшукання 2π-періодичного розв'язку рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 0,015x^2 - 0,05\lambda\sin^2 t + \frac{1}{3}\left(0,5 + \cos t\right) - 5\lambda,$$

та значень параметра λ при яких справджується умова $x(0)=0$. Тут $t \in [0;2\pi]$, $x \in [-r;r]$, $\lambda \in [-\rho;\rho]$. Поклавши в (32.3) $A=5$, $h(t,y,z,\eta,\mu) = 0,015z^2 - 0,05\eta\sin^2 t + \frac{1}{3}(0,5+\cos t)$, в (32.4) приймемо $a_1(t,y,z) \equiv 0$, $k_1(t,\eta,\mu) = 0,05\sin^2 t$, $a_2(t,y,z) = 0,03r$, $k_2(t,\eta,\mu) \equiv 0$. За початкові наближення можна взяти

$$\begin{aligned}
&y_0 = -0,015r^2 t\left(1-\tfrac{t}{T}\right),\\
&z_0 = 0,015r^2 t\left(1-\tfrac{t}{T}\right),\\
&\eta_0 = -\rho, \quad \mu_0 = \rho.
\end{aligned}$$

Використовуючи ітераційні формули (32.7), (32.8) отримаємо

$$\begin{aligned}
&y_1 = \tfrac{1}{3}\sin t - \tfrac{\pi-t}{200\pi}\left(\left(t^2-\tfrac{t^3}{3\pi}\right)\left(0,09r^3-0,0225r^2\right)+5\rho\left(1-\tfrac{\sin 2t}{2}\right)\right)-\\
&-0,001t\left(0,3\pi r^3-0,075\pi r^2-25\rho\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&z_1 = \tfrac{1}{3}\sin t + \tfrac{\pi-t}{200\pi}\left(\left(t^2-\tfrac{t^3}{3\pi}\right)\left(0,09r^3-0,0225r^2\right)+5\rho\left(1-\tfrac{\sin 2t}{2}\right)\right)+\\
&+0,001t\left(0,3\pi r^3-0,075\pi r^2-25\rho\right),
\end{aligned}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{30} - 0,001\left(5\rho + \frac{\pi\left(6r^3-1,5r^2\right)}{100}\right),$$

$$\mu_1 = \frac{1}{30} + 0,001\left(5\rho + \frac{\pi\left(6r^3-1,5r^2\right)}{100}\right).$$

Точний розв'язок розглянутої задачі $x = \frac{1}{3}\sin t$, $\lambda = \frac{1}{30}$.

Побудований двосторонній ітераційний процес можна використати (див. [88]) для задачі про відшукання періодичних розв'язків, дослідженої у попередньому параграфі, тобто, для крайової задачі

$$x'(t) = f(t,x,x), \tag{32.24}$$

$$x(t_0) = x(t_0+T) = x_0, \quad a \le x(t) \le b \quad (t \in (-\infty,\infty)), \tag{32.25}$$

де $f(t,y,z) : \tilde{D} = (-\infty,\infty)\times[a,b]\times[a,b] \to E$, $a \le b$, $a,b \in E$, E – напівупорядкований банахів простір. Шукатимемо T – періодичний розв'язок рівняння (32.24), вважаючи функцію $f(t,y,z)$ неперервною за сукупністю аргументів, періодичною щодо t з періодом T.

Запишемо праву частину рівняння (32.24) у вигляді

$$f(t,y,z) = h(t,y,z) - Kz \tag{32.26}$$

де стала матриця K така, що $K > \theta$, $K^{-1} > \theta$.

Нехай справджуються такі умови.

Умова 5) *Задані неперервні за сукупністю аргументів незростаючі щодо y неспадні щодо z лінійні додатні, як оператори щодо w, функції $a_1(t,y,z)\,w$, $a_2(t,y,z)\,w$, для яких із співвідношень $y \le z$, $t \in [0;T]$, $y, z \in [a;b]$ випливають нерівності*

$$\begin{aligned} &-a_1(t,y,z)(z-y) \le f(t,z,x) - f(t,y,x), \\ &f(t,x,z) - f(t,x,y) \le a_2(t,y,z)(z-y). \end{aligned} \tag{32.27}$$

Умова 6) *Задані $m, M \in E$, для яких при $t \in [0;T]$, $y, z \in [a;b]$ справджуються співвідношення*

$$\begin{aligned} &m \le f(t,y,z) - (a_1(t,y,z) + a_2(t,y,z))(z-y) \le M, \\ &m \le f(t,y,z) + (a_1(t,y,z) + a_2(t,y,z))(z-y) \le M. \end{aligned} \tag{32.28}$$

Умова 7) *Задані $m_1, M_1 \in E$ такі, що в області $\tilde{D}$ справджуються нерівності*

$$\begin{aligned} &m_1 \le h(t,y,z) - (a_1(t,y,z) + a_2(t,y,z) + K)\,(z-y) \le M_1, \\ &m_1 \le h(t,y,z) + (a_1(t,y,z) + a_2(t,y,z) + K)\,(z-y) \le M_1 \end{aligned} \tag{32.29}$$

та

$$a + K^{-1}M_1 + \frac{5}{12}T(M-m) \le b + K^{-1}m_1 - \frac{5}{12}T(M-m). \tag{32.30}$$

Побудуємо двосторонній ітераційний процес за допомогою формул

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= \underline{x}_n^{(0)} + G_y(t, y_n, z_n), \\ z_{n+1}(t) &= \overline{x}_n^{(0)} + G_z(t, y_n, z_n), \end{aligned} \tag{32.31}$$

$$
\begin{aligned}
&\underline{x}_n^{(0)} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left\{K^{-1}\left(\left(a_1\left(t, y_n, z_n\right) + a_2\left(t, y_n, z_n\right) + K\right) \times\right.\right. \\
&\left.\left.\times\left(y_n - z_n\right) + h\left(t, y_n, z_n\right)\right) - G_z\left(t, y_n, z_n\right)\right\} dt, \\
&\overline{x}_n^{(0)} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left\{K^{-1}\left(\left(a_1\left(t, y_n, z_n\right) + a_2\left(t, y_n, z_n\right) + K\right)\times\right.\right. \\
&\left.\left.\times\left(z_n - y_n\right) + h\left(t, z_n, y_n\right)\right) - G_y\left(t, y_n, z_n\right)\right\} dt,
\end{aligned} \tag{32.32}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&G_y\left(t, y, z\right) = L\left[\left(a_1\left(t, y, z\right) + a_2\left(t, y, z\right)\right)\left(y - z\right) + \right. \\
&\left. + f\left(t, y, z\right); \left(a_1\left(t, y, z\right) + a_2\left(t, y, z\right)\right)\left(z - y\right) + f\left(t, z, y\right)\right], \\
&G_z\left(t, y, z\right) = L\left[\left(a_1\left(t, y, z\right) + a_2\left(t, y, z\right)\right)\left(z - y\right) + \right. \\
&\left. + f\left(t, z, y\right); \left(a_1\left(t, y, z\right) + a_2\left(t, y, z\right)\right)\left(y - z\right) + f\left(t, y, z\right)\right].
\end{aligned} \tag{32.33}
$$

Початкові наближення визначимо за формулами

$$
\begin{aligned}
&y_0\left(t\right) = K^{-1}m - \frac{1}{T}\left(Tt - t^2 + \frac{1}{6}T^2\right)\left(M - m\right), \\
&z_0\left(t\right) = K^{-1}M + \frac{1}{T}\left(Tt - t^2 + \frac{1}{6}T^2\right)\left(M - m\right),
\end{aligned} \tag{32.34}
$$

а $\underline{x}_0^{(0)}$ та $\bar{x}_0^{(0)}$ знаходимо з (32.32).

Наступне твердження отримується як наслідок теореми 32.1.

Теорема 32.4. *Для послідовних наближень, визначених за формулами (32.31) – (32.34), за виконання умов 5) - 7) справджуютьcя співвідношення*

$$
y_n \le y_{n+1} \le z_{n+1} \le z_n, \tag{32.35}
$$

$$
\underline{x}_n^{(0)} \le \underline{x}_{n+1}^{(0)} \le \bar{x}_{n+1}^{(0)} \le \bar{x}_n^{(0)}, \tag{32.36}
$$

$n = 0, 1, ...,$

Постулюємо виконання умови: 8) *Задані неперервні за сукупністю аргументів лінійні додатні, як оператори щодо w, функції $\gamma_1\left(t, y, z\right) w$, $\gamma_2\left(t, y, z\right) w$, для яких (разом із функціями $a_1\left(t, y, z\right) w$, $a_2\left(t, y, z\right) w$, заданими умовою 5) із співвідношень $y \le z$, $t \in [0; T]$, $y,\ z \in [a; b]$ випливають нерівності*

$$
\begin{aligned}
&f\left(t, z, x\right) - f\left(t, y, x\right) \le \left(a_1\left(t, y, z\right) + \gamma_1\left(t, y, z\right)\right)\left(z - y\right), \\
&-\left(a_2\left(t, y, z\right) + \gamma_2\left(t, y, z\right)\right)\left(z - y\right) \le f\left(t, x, z\right) - f\left(t, x, y\right).
\end{aligned} \tag{32.37}
$$

Позначимо

$$M_a = \max_{\substack{t\in[0;T]\\ y,z\in[a;b]}} \left(3\left(a_1\left(t,y,z\right)+a_2\left(t,y,z\right)\right)+\gamma_1\left(t,y,z\right)+\gamma_2\left(t,y,z\right)\right),$$

$$Q = K^{-1}M_a + E + TM_a, \tag{32.38}$$

де E - одинична матриця.

Теорема 32.5. *Нехай в області $\tilde{D}$ справджуються умови 5)-8), а також співвідношення $\|Q\| \leq q < 1$. Тоді в області $\tilde{D}$ існує єдиний розв'язок $x*$ задачі (32.24), (32.25), до якого рівномірно щодо $t \in [0,T]$ збігаються послідовні наближення (32.31) - (32.33). При цьому справджуються нерівності*

$$\begin{gathered} y_n \leq y_{n+1} \leq x^* \leq z_{n+1} \leq z_n \\ \underline{x}_n^{(0)} \leq \underline{x}_{n+1}^{(0)} \leq \bar{x}_{n+1}^{(0)} \leq x_0 \leq \bar{x}_n^{(0)}, \end{gathered} \tag{32.39}$$

$n = 0, 1, ...,$ *а також має місце оцінка*

$$z_n\left(t\right) - y_n\left(t\right) \leq q^n\left(\frac{5T}{6}\left(M-m\right) + K^{-1}\left(M_1 - m_1\right)\right). \tag{32.40}$$

Для доведення теореми досить зауважити, що за зазначених припущень алгоритм (32.31)-(32.33) можна вважати частковим випадком алгоритму (32.7)-(32.8).

РОЗДІЛ XII. ДВОСТОРОННІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ БАГАТОТОЧКОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Застосування двосторонніх методів до наближеного розв'язання крайових задач, як і первісний варіант чисельно-аналітичного методу А.М.Самойленка, використовує спосіб переходу від крайової задачі до інтегрального рівняння спеціального вигляду, який, як можна переконатися, означає зображення функції Гріна відповідної задачі у вигляді, зручному для застосування чисельно- аналітичного методу. В цьму розділі описану у попередньому розділі для періодичної задачі методику поширено на одну крайову задачу та на багатоточкову задачу Валле-Пуссена. Наведені тут результати опубліковані частково в [68-70] та в [116].

§33. Алгоритми двосторонньої апроксимації розв'язків лінійної двоточкової крайової задачі

У цьому параграфі розглянемо кілька способів побудови двосторонніх наближень до розв'язків крайової задачі

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, x\right), \tag{33.1}$$

$$\alpha x\left(0\right) + \beta x\left(T\right) = \gamma. \tag{33.2}$$

Тут x- елемент напівупорядкованого конусом додатних елементів простору $C([0;T], R^m)$ неперервних m-вимірних векторних функцій скалярного аргументу, $t \in [0;T]$, $f : D = [0;T] \times [a;b] \times [a;b] \to C([0;T], R^m)$ – неперервна за сукупністю аргументів функція $(a, b \in C([0;T], R^m))$, $\gamma - m$-вимірний сталий вектор, α і β- сталі матриці порядку $m \times m$.

Задача (33.1), (33.2) за дещо інших припущень досліджена в [74]. Спосіб побудови запропонованих в цьому розділі двосторонніх процесів а також методика їх дослідження використовують ідеї і методику досліджень із [101, 108] та із [57].

Для побудови ітерацій використовуватимемо еквівалентне до задачі (33.1), (33.2) інтегральне рівняння

$$x = (\alpha+\beta)^{-1}\gamma + (\alpha+\beta)^{-1}\alpha\int\limits_0^t f(s,x,x)\,ds + \\ + (\alpha+\beta)^{-1}\beta\int\limits_T^t f(s,x,x)\,ds \tag{33.3}$$

та оператор

$$\Lambda\left[\varphi(t)\ ;\psi(t)\right] = (\alpha+\beta)^{-1}\alpha\int\limits_0^t \varphi(s)\,ds + (\alpha+\beta)^{-1}\beta\int\limits_T^t \psi(s)\,ds. \tag{33.4}$$

Опишемо один спосіб побудови двосторонніх наближень до розв'язку інтегрального рівняння (33.3), що використовує конструкції із §13 і досліджений в [69]. Постулюємо виконання в області D таких умов.

Умова 1) *Нехай матриця* $\alpha+\beta$ *– неособлива, причому* $(\alpha+\beta)^{-1}\alpha \geq \Theta$, *і* $(\alpha+\beta)^{-1}\beta \geq \Theta$ *(Θ – нуль-матриця, а нерівності розуміємо як покомпонентні).*

Умова 2) *Задані матриці* $A_1(t,y,z) = \left\{a_{ij}^{(1)}(t,y,z)\right\}$, $B_2(t,y,z) = \left\{b_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right\}$ *($i,j=1,...,m$) неперервних за сукупністю аргументів неспадних щодо y незростаючих щодо z додатних при $t\in[0;T]$, $y,z\in[a;b]$ дійсних функцій такі, що при $y\leq z$, x, y, $z\in[a;b]$, $t\in[0;T]$ справджуються нерівності*

$$\begin{aligned} &A_1(t,y,z)(z-y) \leq f(t,z,x) - f(t,y,x)\,, \\ &f(t,x,z) - f(t,x,y) \leq -B_2(t,y,z)(z-y)\,; \end{aligned} \tag{33.5}$$

Умова 3) *кожна з нерівностей*

$$\begin{aligned} w \geq \Lambda\left[(A_1(t,y,z)+B_2(t,y,z))\,w; -(A_1(t,y,z)+\right. \\ \left.+B_2(t,y,z))\,w\right], \\ w \geq \Lambda\left[(A_1(t,y,z)-B_2(t,y,z))\,w; (A_1(t,y,z)-\right. \\ \left.-B_2(t,y,z))\,w\right] \end{aligned} \tag{33.6}$$

при $y \leq z$, $y, z \in [a;b]$, $w \in C_{R^m}[0;T]$, $t \in [0;T]$ *призводить до нерівності* $w \geq \theta$ *(*θ*- нульовий елемент простору* $C_{R^m}[0;T]$ *);*

Умова 4) *в області* D *справджується співвідношення*

$$|F(t,y,z)| \leq M, \tag{33.7}$$

де M *–* m*-вимірний сталий вектор з додатними компонентами, причому*

$$a + TM \leq (\alpha+\beta)^{-1}\gamma \leq b - TM. \tag{33.8}$$

Теорема 33.1. *Нехай виконані умови 1)-4), система рівнянь*

$$\begin{cases} y_{n+1} = (\alpha+\beta)^{-1}\gamma + \\ +\Lambda\left[F_1(t, y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n); F_2(t, y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n)\right], \\ z_{n+1} = (\alpha+\beta)^{-1}\gamma + \\ +\Lambda\left[F_2(t, y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n); F_1(t, y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n)\right], \end{cases} \tag{33.9}$$

де

$$F_1(t,u,v,y,z) = A_1(t,y,z)(u-y) - B_2(t,y,z)(v-z) + f(t,y,z),$$

$$F_2(t,u,v,y,z) = A_1(t,y,z)(v-z) - B_2(t,y,z)(u-y) + f(t,z,y),$$

при кожному $n = 0,1,2,...$ *має єдиний розв'язок* (y_{n+1}, z_{n+1}) *і рівняння (33.3) має хоча б один розв'язок* $x^* \in [a;b]$. *Тоді для послідовностей* $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *утворених із компонент розв'язків системи (33.9), справджуються співвідношення*

$$a \leq y_n \leq y_{n+1} \leq x^* \leq z_{n+1} \leq z_n \leq b, \tag{33.10}$$

$(n = 0,1,2,...)$, *починаючи з*

$$\begin{aligned} y_0 &= (\alpha+\beta)^{-1}\gamma - TM, \\ z_0 &= (\alpha+\beta)^{-1}\gamma + TM. \end{aligned} \tag{33.11}$$

Доведення теореми подібне за схемою до доведення теореми 13.2.

Припустимо, що виконана

Умова 5) *задані матриці* $A_2(t,y,z)=\left\{a_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right\}$, $B_1(t,y,z)=\left\{b_{ij}^{(1)}(t,y,z)\right\}$ *$(i,j=1..m)$ неперервних за сукупністю аргументів неспадних щодо y незростаючих щодо z додатних при $t\in[0;T]$ $y,z\in[a;b]$ дійсних функцій, такі, що нерівності $y\leq z$ спричинюють співвідношення*

$$\begin{aligned} &f(t,z,x)-f(t,y,x)\leq B_1(t,y,z)(z-y)\,,\\ &-A_2(t,y,z)(z-y)\leq f(t,x,z)-f(t,x,y)\,. \end{aligned} \tag{33.12}$$

Позначимо через $M_k=\left\{M_{i\,j}^{(k)}\right\}$, $m_k=\left\{m_{i\,j}^{(k)}\right\}$ $(k=1,2)$ матриці з елементами

$$\begin{aligned} M_{i\,j}^{(1)}&=\max_{t\in[0,T]}\left(A_1(t,b,a)+B_2(t,b,a)\right),\\ m_{i\,j}^{(1)}&=\min_{t\in[0,T]}\left(A_1(t,a,b)+B_2(t,a,b)\right),\\ M_{i\,j}^{(2)}&=\max_{t\in[0,T]}\left(A_2(t,b,a)+B_1(t,b,a)\right),\\ m_{i\,j}^{(2)}&=\min_{t\in[0,T]}\left(A_2(t,a,b)+B_1(t,a,b)\right). \end{aligned} \tag{33.13}$$

Теорема 33.2. *Нехай справджуються умови 1)-5), система інтегральних рівнянь (33.9) при кожному $n=0,1,2,\ldots$ має єдиний розв'язок, існує додатна обернена матриця $(E-M_1T)^{-1}$ і виконується нерівність $\|Q\|\leq q<1$, де*

$$\begin{aligned} Q=(E-M_1T)^{-1}\Big\{(\alpha+\beta)^{-1}\big((M_2-m_1)\,\alpha+\\ +(M_1-m_2)\,\beta\big)\Big\}\,, \end{aligned} \tag{33.14}$$

E – одинична матриця. Тоді існує єдиний на $[a;b]$ розв'язок $x^*(t)$ задачі (33.1), (33.2), до якого рівномірно щодо $t\in[0;T]$ збігаються послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ компонент розв'язків системи (33.9) і справджуються співвідношення (33.10).

Доведення теореми випливає з оцінок

$$\begin{aligned} \|z_{n+1}-y_{n+1}\|\leq \Big\|(E-M_1T)^{-1}\Big\{(\alpha+\beta)^{-1}\big((M_2-m_1)\,\alpha+\\ +(M_1-m_2)\,\beta\big)\Big\}\Big\|\,\|z_n-y_n\|=\|\,Q\|\cdot\|z_n-y_n\|\,. \end{aligned} \tag{33.15}$$

Приклад 33.1. Розглядаємо задачу

$$\frac{dx}{dt} = x^3,$$

$$x(0) + \sqrt{2}x(1) = \frac{3}{2}$$

в області $D = [0;1] \times [0;2]$. Вважаючи, що $f(t,y,z) \equiv f(t,y) = y^3$, в (33.5) приймемо $A_1(t,y,z) \equiv z^2$, тобто замість нерівностей (33.5) маємо нерівність

$$\left(z^2\right)(z-y) \le F(t,z) - F(t,y).$$

За початкові наближення можна прийняти $y_0(t) = \frac{t}{4}$, $z_0 = 1 + \frac{t}{4}$. Значення обчислених за допомогою алгоритму послідовних наближень (33.9) наведено в наступній таблиці.

T	x	y0	z0	y1	z1	y2	z2	y3	z3
0,0000	0,5000	0,0000	1,0000	0,0454	0,5737	0,3899	0,5710	0,4646	0,5430
0,1000	0,5130	0,0250	1,0250	0,0813	0,5996	0,4031	0,5815	0,4782	0,5547
0,2000	0,5270	0,0500	1,0500	0,1210	0,6283	0,4178	0,5930	0,4928	0,5672
0,3000	0,5423	0,0750	1,0750	0,1649	0,6603	0,4341	0,6058	0,5084	0,5808
0,4000	0,5590	0,1000	1,1000	0,2135	0,6959	0,4525	0,6201	0,5253	0,5956
0,5000	0,5774	0,1250	1,1250	0,2677	0,7357	0,4735	0,6365	0,5438	0,6119
0,6000	0,5976	0,1500	1,1500	0,3281	0,7806	0,4978	0,6556	0,5641	0,6298
0,7000	0,6202	0,1750	1,1750	0,3958	0,8312	0,5265	0,6782	0,5867	0,6500
0,8000	0,6455	0,2000	1,2000	0,4719	0,8886	0,5610	0,7058	0,6123	0,6731
0,9000	0,6742	0,2250	1,2250	0,5577	0,9539	0,6034	0,7403	0,6418	0,6999
1,0000	0,7071	0,2500	1,2500	0,6550	1,0286	0,6569	0,7849	0,6767	0,7321

Знаючи, що точний розглянутої розв'язок задачі $x^* = \frac{1}{\sqrt{4-2t}}$, за даними з таблиці наведемо наступні оцінки:

$$0,0521 \le x^* - y_1 \le 0,4546;$$

$$0,0502 \le x^* - y_2 \le 0,1101;$$

$$0,0304 \le x^* - y_3 \le 0,0354;$$

$$0,0737 \le z_1 - x^* \le 0,3215;$$

$$0,0578 \le z_2 - x^* \le 0,0778;$$

$$0,0250 \le z_3 - x^* \le 0,0430.$$

До апроксимації розв'язків задачі (33.1), (33.2) можна застосовувати аналог двостороннього алгоритму (31.8), який у порівнянні з алгоритмом (33.9) має перевагу в тому, що не вимагає розв'язування на кожному кроці ітераційного процесу системи інтегральних рівнянь.

Нехай виконується

Умова 6) *Задані матриці* $A_1(t,y,z) = \left\{a_{ij}^{(1)}(t,y,z)\right\}$, $A_2(t,y,z) = \left\{a_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right\}$ $(i,j = 1,...,m$ *) неперервних за сукупністю аргументів незростаючих за* y *неспадних за* z *додатних при* $y, z \in [a,b]$, $t \in [0,T]$ *дійсних функцій, для яких з нерівностей* $y \le z$ *випливають співвідношення*

$$\begin{aligned} -A_1(t,y,z)(z-y) &\le f(t,z,x) - f(t,y,x), \\ f(t,x,z) - f(t,x,y) &\le A_2(t,y,z)(z-y). \end{aligned} \qquad (33.16)$$

В цьому випадку для відшукання послідовних наближень до розв'язку задачі (33.1), (33.2) скористаємося формулами

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= \Lambda\left[F_1(t,y_n,z_n); F_2(t,y_n,z_n)\right] + (\alpha+\beta)^{-1}\gamma, \\ z_{n+1}(t) &= \Lambda\left[F_2(t,y_n,z_n); F_1(t,y_n,z_n)\right] + (\alpha+\beta)^{-1}\gamma, \end{aligned} \qquad (33.17)$$

де

$$\begin{aligned} F_1(t,y,z) &= (A_1(t,y,z) + A_2(t,y,z))(y-z) + f(t,y,z), \\ F_2(t,y,z) &= (A_1(t,y,z) + A_2(t,y,z))(z-y) + f(t,z,y). \end{aligned} \qquad (33.18)$$

Позначимо

$$M_A = \left\{m_{ij}^{(A)}\right\}, \qquad (33.19)$$

$$m_{ij}^{(A)} = \max_{\substack{t \in [0;T] \\ y,z \in [a;b]}} \left|a_{ij}^{(1)}(t,y,z) + a_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right|, \qquad (33.20)$$

$(i, j = 1, ..., m)$.

Припустимо, що виконані

Умова 7) *В області D справджуються співвідношення (33.7), причому*

$$a+T\left(M_A(b-a)+M\right)\leq(\alpha+\beta)^{-1}\gamma\leq b-T\left(M_A(b-a)+M\right), \qquad (33.21)$$

де елементи матриці M_A визначені співвідношеннями (33.20);

Умова 8) *задані матриці $\gamma_1(t,y,z)=\left\{\gamma_{ij}^{(1)}(t,y,z)\right\}$, $\gamma_2(t,y,z)=\left\{\gamma_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right\}$ $(i,j=\overline{1,m}$ $)$ неперервних за сукупністю аргументів додатних при $y,z\in[a,b]$, $t\in[0,T]$ дійсних функцій, для яких з нерівностей $y\leq z$ ($t\in[0,T]$, $x,y,z\in[a,b]$) випливають співвідношення*

$$\begin{aligned} &f(t,z,x)-f(t,y,x)\leq\left(-A_1(t,y,z)+\gamma_1(t,y,z)\right)(z-y),\\ &\left(A_2(t,y,z)-\gamma_2(t,y,z)\right)(z-y)\leq f(t,x,z)-f(t,x,y). \end{aligned} \qquad (33.22)$$

Нехай $Q=\{q_{ij}\}$ - числова матриця розміру $m\times m$, де

$$q_{ij}=\max_{\substack{t\in[0;T]\\ y,z\in[a;b]}}\Big(\Big(a_{ij}^{(1)}(t,y,z)+a_{ij}^{(2)}(t,y,z)\Big)+ +\gamma_{ij}^{(1)}(t,y,z)+\gamma_{ij}^{(2)}(t,y,z)\Big). \qquad (33.23)$$

Теорема 33.3. *Нехай в області D справджуються умови 1), 6)-8), а також має місце нерівність $\|Q\|\leq q<1$. Тоді на відрізку $[a;b]$ існує єдиний в D розв'язок x^* задачі (33.1), (33.2), до якого рівномірно щодо t збігаються послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, визначені за формулами (33.17), (33.18), починаючи з $y_0=a$, $z_0=b$. При цьому справджуються співвідношення*

$$a=y_0\leq y_n\leq y_{n+1}\leq x^*\leq z_{n+1}\leq z_n\leq z_0=b \qquad (33.24)$$

($t\in[0,T]$, $n=1,2,...$).

Доведення теореми проводиться за тією ж схемою, що і доведення теорем 15.4 та 31.4.

Приклад 33.2. Нехай рівняння (33.1) має вигляд

$$x' = a\,(t)\,x^2 + b\,(t)\,x + c\,(t)\,, \tag{33.25}$$

де $t \in [0;T]$, $x \in [0;x_0]$ $(x_0 > 0)$. Запишемо праву частину рівняння у вигляді $f\,(t,y,z) = a^+\,(t)\,z^2 - a^-\,(t)\,y^2 + b^+\,(t)\,z - b^-\,(t)\,y + c\,(t)$, де $a^+ = \frac{|a|+a}{2}$, $a^- = \frac{|a|-a}{2}$, $b^+ = \frac{|b|+b}{2}$, $b^- = \frac{|b|-b}{2}$. Тоді в (33.16) можна покласти $A_1\,(t,y,z) = 2a^-\,(t)\,z + b^-\,(t)$, $A_2\,(t,y,z) = 2a^+\,(t)\,z + b^+\,(t)$, а у (31.12) – $\gamma_1\,(t,y,z) \equiv A_1\,(t,y,z)$, $\gamma_2\,(t,y,z) \equiv A_2\,(t,y,z)$. Умова збіжності алгоритму (33.17), (33.18) у цьому випадку набуде вигляду

$$q = 2T \max_{\substack{t \in [0;T] \\ y,z \in [0;x_0]}} \left(2a^-\,(t) + b^-\,(t) + 2a^+\,(t) + b^+\,(t)\right) < 1.$$

Розглянемо алгоритм, що поєднує ідеї алгоритмів (33.9) та (33.17). Він виникає при застосуванні до задачі (33.1), (33.2) аналогів методу Чаплигіна із §14 і досліджений в [70].

Вважатимемо, що виконані

Умова 9) *задані матриці* $G_k\,(t,y,z) = \left\{g_{ij}^{(k)}\,(t,y,z)\right\}$, $\alpha_k\,(t,y,z) = \left\{\alpha_{ij}^{(k)}\,(t,y,z)\right\}$, $A_k\,(t,y,z) = \left\{a_{ij}^{(k)}\,(t,y,z)\right\}$, $(k = 1,2,\ i,j = \overline{1,m})$ *неперервних за сукупністю аргументів, незростаючих за* y *і неспадних за* z*, додатних при* $y,z \in [a,b]$ $\quad t \in [0,T]$ *дійсних функцій, для яких з нерівностей* $y \le z$ $(t \in [0,T] \quad x,y,z \in [a,b])$ *випливають співвідношення*

$$\begin{aligned} (G_1\,(t,y,z) + \alpha_1\,(t,y,z) - A_1\,(t,z,y))(z-y) \le \\ \le f\,(t,z,x) - f\,(t,y,x)\,, \\ f\,(t,x,z) - f\,(t,x,y) \le \\ \le -\left(G_2\,(t,y,z) + \alpha_2\,(t,y,z) - A_2\,(t,z,y)\right)(z-y)\,; \end{aligned} \tag{33.26}$$

Умова 10) *задані умовою 9) матриці* $G_k\,(t,y,z)$, $\alpha_k\,(t,y,z)$, *(*$k = 1,2$*) такі, що співвідношення* $y \le z$, $t \in [0;T]$, $x,y,z \in [a;b]$,

$$\begin{aligned} p \ge \Lambda\left[G_1\,(t,y,z)\,p + G_2\,(t,y,z)\,q;\right. \\ \left. -\left(G_1\,(t,y,z) + \alpha_1\,(t,y,z)\right)q - \left(G_2\,(t,y,z) + \alpha_2\,(t,y,z)\right)p\right], \\ q \ge \Lambda\left[\left(G_1\,(t,y,z) + \alpha_1\,(t,y,z)\right)q + \right. \\ \left. + \left(G_2\,(t,y,z) + \alpha_2\,(t,y,z)\right)p; -G_1\,(t,y,z)\,p - G_2\,(t,y,z)\,q\right] \end{aligned}$$

спричинюють нерівності $p \geq \theta$, $q \geq \theta$.

Теорема 33.4. *Нехай справджуються умови 1), 9), 10) і система*

$$\begin{cases} y_{n+1} = (\alpha+\beta)^{-1}\gamma + \\ +\Lambda\left[F_1\left(t, y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n\right); F_2\left(t, y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n\right)\right], \\ z_{n+1} = (\alpha+\beta)^{-1}\gamma + \\ +\Lambda\left[F_2\left(t, y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n\right); F_1\left(t, y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n\right)\right], \end{cases} \tag{33.27}$$

де

$$F_1(t,u,v,y,z) = G_1(t,y,z)(u-y) - G_2(t,y,z)(v-z) + \\ + (A_1(t,z,y) + A_2(t,z,y))(y-z) + f(t,y,z),$$

$$F_2(t,u,v,y,z) = (G_1(t,y,z) + \alpha_1(t,y,z))(v-z) - \\ -(G_2(t,y,z) + \alpha_2(t,y,z))(u-y) + \\ + (A_1(t,z,y) + A_2(t,z,y))(z-y) + f(t,z,y),$$

$$y_0 = a, \quad z_0 = b, \tag{33.28}$$

має єдиний розв'язок при кожному $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Тоді з припущення про існування розв'язку* $x^* \in [a; b]$ *задачі (33.1), (33.2) та з нерівностей*

$$y_0 \leq y_1 \leq x^* \leq z_1 \leq z_0 \tag{33.29}$$

випливають співвідношення

$$y_n \leq y_{n+1} \leq x^* \leq z_{n+1} \leq z_n. \tag{33.30}$$

Доведення. Схема доведення теореми подібна до доведення теореми 16.2.

Умова 11) *задані матриці* $\beta_k(t,y,z) = \left\{\beta_{ij}^{(k)}(t,y,z)\right\}$, $(k = 1, 2,$ $i, j = \overline{1, m})$ *неперервних за сукупністю аргументів незростаючих за* y *і неспадних за* z *додатних при* $y, z \in [a, b]$ $t \in [0, T]$ *дійсних функцій, для яких із співвідношень* $y \leq z$, $t \in [0, T]$, $x, y, z \in [a, b]$ *випливають нерівності*

$$f(t,z,x) - f(t,y,x) \leq \\ \leq (G_1(t,y,z) + \beta_1(t,y,z) - A_1(t,z,y))(z-y), \\ -(G_2(t,y,z) + \beta_2(t,y,z) - A_2(t,z,y))(z-y) \leq \\ \leq f(t,x,z) - f(t,x,y), \tag{33.31}$$

де $G_1(t,y,z)$, $G_2(t,y,z)$, $A_1(t,y,z)$, $A_2(t,y,z)$ задовольняють вимоги умови 9).

Позначимо через $G=\{g_{ij}\}$, $A=\{a_{ij}\}$, $B=\{b_{ij}\}$ сталі матриці, де

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \max_{\substack{t\in[0,T]\\ y,z\in[a,b]}} \left|g_{ij}^{(1)}(t,y,z)+g_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right|, \\ a_{ij} &= \max_{\substack{t\in[0,T]\\ y,z\in[a,b]}} \left|a_{ij}^{(1)}(t,y,z)+a_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right|, \\ b_{ij} &= \max_{\substack{t\in[0,T]\\ y,z\in[a,b]}} \left|\beta_{ij}^{(1)}(t,y,z)+\beta_{ij}^{(2)}(t,y,z)\right|. \end{aligned} \tag{33.32}$$

Теорема 33.5. *Нехай в області D справджуються умови 1), 9)-11); система (33.27) при кожному $n=0,1,2,\ldots$, $x_0=a$, $z_0=b$ має єдиний розв'язок, причому $y_0\le y_1\le z_1\le z_0$; існує додатна обернена матриця $(E-GT)^{-1}$ і справджується нерівність $\|Q\|\le q<1$, де $Q=(E-GT)^{-1}T(A+B)$, – E одинична матриця. Тоді існує єдиний на $[a,b]$ розв'язок x^* задачі (33.1), (33.2), до якого рівномірно щодо $t\in[0;T]$ збігаються послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ компонент розв'язків системи (33.27), і при цьому справджуються співвідношення (33.30).*

Доведення теореми випливає з оцінок

$$\begin{aligned} \max_{t\in[0;T]}|z_{n+1}(t)-y_{n+1}(t)| \le GT\max_{t\in[0;T]}|z_{n+1}(t)-y_{n+1}(t)|+ \\ +T(A+B)\max_{t\in[0;T]}|z_n(t)-y_n(t)|, \end{aligned} \tag{33.33}$$

тобто, при $(E-GT)^{-1}\ge\Theta$ маємо

$$\|z_{n+1}-y_{n+1}\|\le\left\|(E-GT)^{-1}T(A+B)\right\|\cdot\|z_n-y_n\|. \tag{33.34}$$

У випадку, коли функції $\alpha_{ij}^{(k)}(t,y,z)$ та $\beta_{ij}^{(k)}(t,y,z)$ $(k=1,2,$ $i,j=\overline{1,m})$ задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} \alpha_{ij}^{(1)}(t,y,z)+\alpha_{ij}^{(2)}(t,y,z)\le a_{ij}^{(0)}(z-y), \\ \beta_{ij}^{(1)}(t,y,z)+\beta_{ij}^{(2)}(t,y,z)\le b_{ij}^{(0)}(z-y), \end{aligned} \tag{33.35}$$

і справджується нерівність

$$\|Q_0\| \le q_0 < 1, \qquad (33.36)$$

де $Q_0 = (E - GT)^{-1} (A_0 + B_0) T$, $A_0 = \left\{a_{ij}^{(0)}\right\}$, $B_0 = \left\{b_{ij}^{(0)}\right\}$, $i, j = \overline{1, m}$, алгоритму (33.27) характерна квадратична швидкість збіжності ітерацій, оскільки в цьому випадку оцінку (33.34) можна замінити співвідношенням

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - y_{n+1}\| \le \left\|(E - GT)^{-1} (A_0 + B_0) T\right\| \|z_n - y_n\|^2 \le \\ \le q_0 \|z_n (t) - y_n (t)\|^2 . \end{aligned} \qquad (33.37)$$

§34. Застосування до багатоточкових крайових задач

У цьому параграфі досліджуватимемо алгоритми двосторонньої апроксимації розв'язків багатоточкових крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Численні роботи (див. [15, 30, 34, 35, 59, 88]), присвячені дослідженню таких задач, свідчать про інтерес до їх дослідження, спричинений попри теоретичне значення, ще й важливістю їх фізичної інтерпретації.

Розглянемо двосторонній алгоритм апроксимації розв'язків лінійної багатоточкової крайової задачі

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad (34.1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x(t_i) = \gamma, \quad 0 = t_1 < t_2 < ... < t_m = T, \qquad (34.2)$$

де розв'язок $x(t)$ є елементом простору $C_{R^m}[0;T]$, напівупорядкованого конусом додатних елементів. Тут $t \in [0;T]$, $f(t, x) : D = [0;T] \times [a;b] \to C_{R^m}[0;T]$ $(a, b \in C_{R^m}[0;T])$, $\gamma - m-$вимірний сталий вектор, α_i $(i = \overline{1, m})$ - сталі матриці порядку $m \times m$.

Для побудови двосторонніх наближень до розв'язку задачі (34.1), (34.2) скористаємось оператором

$$\Lambda_m \left[\varphi\left(t, x\left(t\right)\right); \psi\left(t, x\left(t\right)\right)\right] = \sum_{i=1}^{m} \beta^{-1} \alpha_i \int\limits_{t_i}^{t} \phi_{ij}\left(s, x\left(s\right)\right) ds, \qquad (34.3)$$

де $\phi_{ij}\left(t, x\right) = \begin{cases} \varphi\left(t, x\right), & \text{при} \quad j \geq i, \\ \psi\left(t, x\right), & \text{при} \quad j < i, \end{cases}$ при $t \in [t_j, t_{j+1}]$, $\beta = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i$.

Вважатимемо, що:

Умова 1) *матриця* $\beta = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i$ *– неособлива, причому* $\beta^{-1}\alpha_i > \theta$*;*

Умова 2) *задані матриці* $A_1\left(t, y, z\right) = \left\{a_{ij}^{(1)}\left(t, y, z\right)\right\}$*,* $A_2\left(t, y, z\right) = \left\{a_{ij}^{(2)}\left(t, y, z\right)\right\}$ $(i, j = 1, ..., m)$ *неперервних за сукупністю аргументів незростаючих за* y *неспадних за* z *невід'ємних при* $t \in [0; T]$*,* $y, z \in [a; b]$ *дійсних функцій, для яких, як для лінійних додатних щодо* w *операторів* $A_1\left(t, y, z\right) w$*,* $A_2\left(t, y, z\right) w$ *із співвідношень* $y \leq z$*,* $t \in [0; T]$*,* $x, y, z \in [a; b]$ *випливають нерівності*

$$\begin{aligned} -A_1\left(t, y, z\right)\left(z - y\right) &\leq F\left(t, z, x\right) - F\left(t, y, x\right), \\ F\left(t, x, z\right) - F\left(t, x, y\right) &\leq A_2\left(t, y, z\right)\left(z - y\right), \end{aligned} \qquad (34.4)$$

де $F\left(t, y, z\right)$ *– неперервна за сукупністю аргументів дійсна функція* $F : D' = [0; T] \times [a; b] \times [a; b] \to C_{R^m}[0; T]$ *така, що* $F\left(t, x, x\right) \equiv f\left(t, x\right)$*.*

Визначимо послідовні наближення за допомогою формул

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \Lambda_m \left[F_1\left(t, y_n, z_n\right); F_2\left(t, z_n, y_n\right)\right] + \beta^{-1}\gamma, \\ z_{n+1} &= \Lambda_m \left[F_2\left(t, y_n, z_n\right); F_1\left(t, z_n, y_n\right)\right] + \beta^{-1}\gamma, \end{aligned} \qquad (34.5)$$

$$\begin{aligned} F_1\left(t, y, z\right) &= \left(A_1\left(t, y, z\right) + A_2\left(t, y, z\right)\right)\left(y - z\right) + F\left(t, y, z\right), \\ F_2\left(t, y, z\right) &= \left(A_1\left(t, y, z\right) + A_2\left(t, y, z\right)\right)\left(z - y\right) + F\left(t, z, y\right). \end{aligned} \qquad (34.6)$$

Теорема 34.1. *Нехай для*

$$y_0 = a, \quad z_0 = b \qquad (34.7)$$

та y_1, z_1, *визначених за формулами (34.5), (34.6) справджуються нерівності*

$$y_0 \le y_1 \le z_1 \le z_0. \tag{34.8}$$

Тоді з виконання умов 1), 2) випливають нерівності

$$y_n \le y_{n+1} \le z_{n+1} \le z_n \tag{34.9}$$

для послідовних наближень, побудованих за формулами (34.5), (34.6) при будь-якому $n = 1, 2, ...$

Доведення. Умови теореми постулюють співвідношення (34.9) при $n = 0$. Оскільки можна записати $\Lambda_m [\varphi(t,x), \psi(t,x)] = L^+ [\varphi(t,x)] - L^- [\psi(t,x)]$, де $L^+ [\varphi(t,x)]$ та $L^- [\psi(t,x)]$ – лінійні додатні оператори, то для доведення нерівностей (34.9) можна використати міркування подібні до міркувань в доведенні теореми 15.2.

Припустимо, що:

Умова 3) *задані матриці* $\gamma_1 (t,y,z)$, $\gamma_2 (t,y,z)$ *неперервних за сукупністю аргументів невід'ємних при* $t \in [0;T]$, $y, z \in [a;b]$ *дійсних функцій* $\gamma_{ij}^{(1)} (t,y,z)$, $\gamma_{ij}^{(2)} (t,y,z)$, $(i,j = 1,2,...,m)$, *для яких (разом з матрицями* $A_1 (t,y,z)$, $A_2 (t,y,z)$, *заданими умовою 2)) із співвідношень* $y \le z$, $t \in [0;T]$, $x, y, z \in [a;b]$ *випливають нерівності*

$$\begin{aligned} &F(t,z,x) - F(t,y,x) \le (-A_1(t,y,z) + \gamma_1(t,y,z))(z-y), \\ &(A_2(t,y,z) - \gamma_2(t,y,z))(z-y) \le F(t,x,z) - F(t,x,y). \end{aligned} \tag{34.10}$$

Позначимо через A, G - сталі матриці порядку $m \times m$ з елементами

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \max_{\substack{t \in [0,T] \\ y,z \in [a,b]}} \left| a_{ij}^{(1)}(t,y,z) + a_{ij}^{(2)}(t,y,z) \right|, \\ g_{ij} &= \max_{\substack{t \in [0,T] \\ y,z \in [a,b]}} \left| \gamma_{ij}^{(1)}(t,y,z) + \gamma_{ij}^{(2)}(t,y,z) \right| \end{aligned} \tag{34.11}$$

відповідно.

Теорема 34.2. *Нехай в області* D *виконані умови 1)-3), для ітераційного процесу (34.5) (34.6) справджуються нерівності* $y_0 \le$

$y_1 \le z_1 \le z_0$ при $x_0 = a$, $z_0 = b$, а також нерівність $\|Q\| \le q < 1$ для матриці $Q = T\,(A+G)$. Тоді існує єдиний на $[a,b]$ розв'язок x^* задачі (34.1), (34.2), до якого рівномірно щодо $t \in [0;T]$ збігаються послідовності $\{y_n(t)\}$, $\{z_n(t)\}$ компонент розв'язків системи (34.5), і при цьому справджуються співвідношення

$$y_n \le y_{n+1} \le x^* \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{34.12}$$

Доведення теореми проводиться подібно додоведення теореми 15.4.

Дослідимо процес побудови двосторонніх наближень до розв'язків крайової задачі

$$x^{(m)}\,(t) = f\left(t, x\,(t)\,, x'\,(t)\,, \ldots, x^{(m-1)}\,(t)\right), \tag{34.13}$$

$$x^{(i-1)}\,(t_i) = r_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_m = T, \tag{34.14}$$

де $t \in [0;T]$, $x^{(i-1)} \in [a_i; b_i]$, $a_i, b_i \in C^{m-i-1}\,[0;T]$.

Задача (34.13), (34.14) для випадку $m > 2$ досліджувалася в [34]. Там, зокрема, доведено існування конструктивного розв'язку задачі за умови знакосталості похідних до $m-2$ порядку включно та досліджено можливість побудови двосторонніх наближень до цього розв'язку. Використовуючи для апроксимації розв'язків задачі (34.13), (34.14) двосторонній алгоритм (34.5), (34.6), можна отримати наступний результат. Нехай виконуються

Умова 4) *функція $f\,(t, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ має вигляд*

$$f\,(t, x_1, x_2, \ldots, x_m) \equiv F\,(t, x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_m, x_m),$$

причому ункція F неперервна за сукупністю аргументів;

Умова 5) *при $y\,(t) \le z\,(t)$, $t \in [0;T]$, $x_i, y_i, z_i \in [a_i; b_i]$ справджуються співвідношення*

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^{m} a_{1i}\,(t, y_i, z_i)\,(z_i - y_i) \le \\
&\le F\,(t, z_1, x_1, \ldots, z_m, x_m) - F\,(t, y_1, x_1, \ldots, y_m, x_m)\,, \\
&F\,(t, x_1, z_1, \ldots, x_m, z_m) - F\,(t, x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m) \le \\
&\qquad\qquad \le \sum_{i=1}^{m} a_{2i}\,(t, y_i, z_i)\,(z_i - y_i)
\end{aligned} \tag{34.15}$$

причому функції $a_{ji}(t, y_i, z_i)$, *(*$j = 1, 2,\ i = 1, 2, ..., m$*) є неперервними за сукупністю аргументів, незростаючими за* y_i*, неспадними за* z_i*, невід'ємними при* $t \in [0; T]$*,* $y_i, z_i \in [a_i; b_i]$*;*

Умова 6) *функція* $F(t, y_1, z_1, y_2, z_2, ..., y_m, z_m)$ *при* $y_i \leq z_i$*,* $t \in [0; T]$*,* $x_i, y_i, z_i \in [a_i; b_i]$ $(i = \overline{1, m})$ *задовольняє нерівності*

$$\begin{gathered} F(t, z_1, x_1, ..., z_m, x_m) - F(t, y_1, x_1, ..., y_m, x_m) \leq \\ \leq \sum_{i=1}^{m} \left(-a_{1i}(t, y_i, z_i) + \gamma_{1i}(t, y_i, z_i)\right)(z_i - y_i), \\ \sum_{i=1}^{m} \left(a_{2i}(t, y_i, z_i) - \gamma_{2i}(t, y_i, z_i)\right)(z_i - y_i) \leq \\ \leq F(t, x_1, z_1, ..., x_m, z_m) - F(t, x_1, y_1, ..., x_m, y_m), \end{gathered} \tag{34.16}$$

де $\gamma_{ji}(t, y_i, z_i)$ *(*$j = 1, 2,\ i = \overline{1, m}$*) є неперервними за сукупністю аргументів неспадними за* y_i*, незростаючими за* z_i*, невід'ємними при* $t \in [0; T]$*,* $y_i, z_i \in [a_i; b_i]$ *функціями.*

Запровадивши позначення

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ ... \\ z_m \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix}, \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ ... \\ r_m \end{pmatrix}, \tag{34.17}$$

$$\tilde{F}(t, Y, Z) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ ... \\ F(t, y_1, z_1, y_2, z_2, ..., y_m, z_m) \end{pmatrix}, \tag{34.18}$$

$$\tilde{\Lambda}_m\left[\tilde{\varphi}(t); \tilde{\psi}(t)\right] \equiv \begin{pmatrix} \int\limits_{t_1}^{t} \chi_{1j}(s)\, ds \\ \int\limits_{t_2}^{t} \chi_{2j}(s)\, ds \\ ... \\ \int\limits_{t_m}^{t} \chi_{mj}(s)\, ds \end{pmatrix}, \tag{34.19}$$

де $\chi_{i,j}(t) = \begin{cases} \varphi_i(t) & \text{при } j \geq i \\ \psi_i(t) & \text{при } j < i \end{cases}$, $t \in [t_j; t_{j+1}]$,

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ ... \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \ \tilde{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ ... \\ \psi_m \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{A}_i(t, Y, Z) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1}(t, y_1, z_1) & a_{i2}(t, y_2, z_2) & ... & a_{im}(t, y_m, z_m) \end{pmatrix}, \tag{34.20}$$

$(i = 1, 2)$ побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = \tilde{\Lambda}_m \Big[\Big(\tilde{A}_1(t, Z_n, Y_n) + \tilde{A}_2(t, Z_n, Y_n) \Big) (Y_n - Z_n); \\ \Big(\tilde{A}_1(t, Z_n, Y_n) + \tilde{A}_2(t, Z_n, Y_n) \Big) (Z_n - Y_n) \Big] + \\ + \tilde{\Lambda}_m \Big[\tilde{F}(t, Y_n, Z_n); \tilde{F}(t, Z_n, Y_n) \Big] + \tilde{\gamma}; \\ Z_{n+1} = \tilde{\Lambda}_m \Big[\Big(\tilde{A}_1(t, Z_n, Y_n) + \tilde{A}_2(t, Z_n, Y_n) \Big) (Z_n - Y_n); \\ \Big(\tilde{A}_1(t, Z_n, Y_n) + \tilde{A}_2(t, Z_n, Y_n) \Big) (Y_n - Z_n) \Big] + \\ + \tilde{\Lambda}_m \Big[\tilde{F}(t, Z_n, Y_n); \tilde{F}(t, Y_n, Z_n) \Big] + \tilde{\gamma}; \end{aligned} \tag{34.21}$$

Теорема 34.3. *Нехай справджуються умови 4)-6), і мають місце співвідношення*

$$Y_0 \le Y_1 \le Z_1 \le Z_0, \tag{34.22}$$

для $Y_0 = A$, $Z_0 = B$ *та* Y_1, Z_1, *визначених за формулами (34.21)і має місце нерівність*

$$\left| T(\tilde{a}_m + \tilde{\gamma}_m) \right| < 1, \tag{34.23}$$

де

$$\tilde{a}_m = \max_{\substack{t \in [0;T] \\ z_m, y_m \in [a_m; b_m]}} \left| a_{1m}(t, y_m, z_m) + a_{2m}(t, y_m, z_m) \right|,$$

$$\tilde{\gamma}_m = \max_{\substack{t \in [0;T] \\ z_m, y_m \in [a_m; b_m]}} \left| \gamma_{1m}(t, y_m, z_m) + \gamma_{2m}(t, y_m, z_m) \right|.$$

Тоді існує єдиний на $[a_1; b_1]$ розв'язок x^* задачі (34.13), (34.14), до якого рівномірно щодо $t \in [0;T]$ збігаються послідовності $\left\{ y_1^{[n]} \right\}$, $\left\{ z_1^{[n]} \right\}$ перших компонентів послідовних наближень (34.21), і при цьому справджуються співвідношення

$$Y_n \le Y_{n+1} \le X^* \le Z_{n+1} \le Z_n \quad (n = 0, 1, 2, ..., t \in [0;T]). \tag{34.24}$$

Доведення. Задачу (34.13), (34.14) можна звести до задачі (34.1), (34.2), записавши рівняння (34.13) у вигляді системи

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3(t), \\ \quad . \ . \ . \\ \frac{dx_{m-1}}{dt} = x_m(t), \\ \frac{dx_m}{dt} = f(t, x_1(t), x_2(t), ..., x_m(t)). \end{cases} \tag{34.25}$$

Використовуючи позначення (34.17), (34.18), отримаємо

$$\frac{dX}{dt} = \tilde{F}(t, X, X), \tag{34.26}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X(t_i) = \tilde{\gamma}, \tag{34.27}$$

де матриці α_i утворені з елементів $\alpha_{kl}^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad k = l = i, \\ 0 & \text{при} \quad k, \, l \neq i. \end{cases}$

Можна переконатися, що виконання умов 4)-6) та нерівності (34.23) для задачі (34.13), (34,14) забезпечує виконання умов теореми 34.2 для задачі (34.26), (34.27), тому доведення можна завершити покликанням на теорему 34.2.

Розглянемо багатоточкову задачу з крайовими умовами Валле-Пуссена

$$x^{(m)} = h(t, x, x) - \sum_{k=0}^{m-1} q_k(t) x^{(k)}, \tag{34.28}$$

$$x(t_i) = x_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \quad 0 = t_1 < t_2 < ... < t_m = T, \qquad (34.29)$$

$h(t, x, x) \;:\; D = [0; T] \times [a; b] \times [a; b] \rightarrow [a; b]$, $q_k \in C^{m-k-1}[0; T]$, $a, b \in C^m[0; T]$. Еквівалентне до задачі(34.28), (34.29) інтегральне рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{gathered} x = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_{m,i}(t)}{P_{m,i}(t_i)} \left(\int_{t_i}^{t} \frac{(t_i-s)^{m-1}}{(m-1)!} h(s, x, x)\, ds - \right. \\ \left. - \sum_{p=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t} \frac{(t_i-s)^{m-p-1}}{(m-p-1)!} Q_p(s)\, x ds \right) + x_0(t), \end{gathered} \qquad (34.30)$$

де $P_{m,i}(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (t - t_j)$, $Q_p(t) = \sum_{k=p}^{m-1} \left((-1)^{k-p} q_k^{(k-p)}(t)\, C_k^p \right)$,

$x_0(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{P_{m,i}(t)}{P_{m,i}(t_i)}$ (C_k^p - біноміальні коефіцієнти). Для побудови двосторонніх наближень до розв'язків задачі (34.28), (34.29) скористаємося операторами

$$L_m[\varphi(t, x(t)); \psi(t, x(t))] = $$
$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \frac{P_{m,i}(t)}{P_{m,i}(t_i)} \int_{t_i}^{t} \frac{(t_i-s)^{m-1}}{(m-1)!} \xi_{i+j}(s, x(s))\, ds, \\ \text{якщо} \quad \text{m - непарне}, \\ \sum_{i=1}^{j} \frac{P_{m,i}(t)}{P_{m,i}(t_i)} \int_{t_i}^{t} \frac{(t_i-s)^{m-1}}{(m-1)!} \xi_{i+j-1}(s, x(s))\, ds + \\ + \sum_{i=j+1}^{m} \frac{P_{m,i}(t)}{P_{m,i}(t_i)} \int_{t_i}^{t} \frac{(t_i-s)^{m-1}}{(m-1)!} \xi_{i+j}(s, x(s))\, ds, \\ \text{якщо} \quad \text{m - парне}, \end{cases} \qquad (34.31)$$

де $\xi_k(t, x(t)) = \begin{cases} \varphi(t, x(t)), & \text{якщо} \quad k - \text{парне}, \\ \psi(t, x(t)), & \text{якщо} \quad k - \text{непарне}, \end{cases}$

$t \in [t_j; t_{j+1}]$, $j = \overline{1, m-1}$ та

$$\begin{gathered} \Psi_m[u(t), v(t)] = \\ = \sum_{i=1}^{j} \frac{P_{m,i}(t)}{P_{m,i}(t_i)} \int_{t_i}^{t} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{(t_i-s)^{m-p-1}}{(m-p-1)!} Q_p(s)\, w_{i+j+m+p+1}(s) ds + \\ + \sum_{i=j+1}^{m} \frac{P_{m,i}(t)}{P_{m,i}(t_i)} \int_{t_i}^{t} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{(t_i-s)^{m-p-1}}{(m-p-1)!} Q_p(s)\, w_{i+j}(s) ds, \end{gathered} \qquad (34.32)$$

де $w_k(t) = \begin{cases} u(t), & \text{якщо } k - \text{парне}, \\ v(t), & \text{якщо } k - \text{непарне}, \end{cases} \quad t\in[t_j;t_{j+1}],\ j=\overline{1,m-1}.$

Нехай мають місце такі припущення.

Умова 7) *Коефіцієнти* $q_k(t)$ *є* k- *разів неперервно-диференційовними функціями, такими, що функції* $Q_p(t)$ *обмежені і зберігають на* $[0;T]$ *знак. Для конкретності візьмемо* $0 \le Q_p(t) \le M_p$.

Умова 8) *Задані неперервні за сукупністю аргументів, додатні при* $t \in [0;T]$, $y,z \in [a;b]$ *незростаючі за* y *неспадні за* z *функції* $a_1(t,y,z)$, $a_2(t,y,z)$ *такі, що із співвідношень* $y(t) \le z(t)$, $t \in [0;T]$, $x,y,z \in [a;b]$ *випливають нерівності*

$$\begin{gathered} a_1(t,y,z)(z-y) \le h(t,z,x) - h(t,y,x), \\ h(t,x,z) - h(t,x,y) \le a_2(t,y,z)(z-y). \end{gathered} \tag{34.33}$$

Умова 9) *Задані неперервні за сукупністю аргументів невід'ємні при* $t \in [0;T]$, $y,z \in [a;b]$ *функції* $\gamma_1(t,y,z)$, $\gamma_2(t,y,z)$, *для яких разом із функціями* $a_1(t,y,z)$, $a_2(t,y,z)$, *заданими умовою 8) із співвідношень* $y(t) \le z(t)$, $t \in [0;T]$, $x,y,z \in [a;b]$ *випливають нерівності*

$$\begin{gathered} h(t,z,x) - h(t,y,x) \le (\gamma_1(t,y,z) - a_1(t,y,z))(z-y), \\ (a_2(t,y,z) - \gamma_2(t,y,z))(z-y) \le h(t,x,z) - h(t,x,y). \end{gathered} \tag{34.34}$$

Визначимо послідовні наближення за допомогою формул

$$\begin{aligned} & y_{n+1}(t) = \Psi_m[y_n(t);z_n(t)] + x_0(t) + \\ & + L_m[F_1(t,y_n,z_n);F_2(t,y_n,z_n)], \\ & z_{n+1}(t) = \Psi_m[z_n(t);y_n(t)] + x_0(t) + \\ & + L_m[F_2(t,y_n,z_n);F_1(t,y_n,z_n)], \end{aligned} \tag{34.35}$$

де

$$\begin{gathered} F_1(t,y,z) = (a_1(t,y,z) + a_2(t,y,z))(y-z) + h(t,y,z), \\ F_2(t,y,z) = (a_1(t,y,z) + a_2(t,y,z))(z-y) + h(t,z,y). \end{gathered} \tag{34.36}$$

Теорема 34.4. *Нехай справджуються умови 7)-9), а для* $y_0 = a$, $z_0 = b$ *та* y_1, z_1, *визначених за формулами (34.35), (34.36), справджуються співвідношення* $y_0 \le y_1 \le z_1 \le z_0$ *та має місце нерівність*

$$\tilde{P}_m \left(\frac{1}{m!} \bar{P}_{m,0} (A + G) + \sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{(m-p)!} \bar{P}_{m,p} M_p \right) < 1, \qquad (34.37)$$

де $\tilde{P}_m = \max\limits_{t \in [0,T]} |P_m(t)|$, $\bar{P}_{m,p} = \max\limits_{t \in [0,T]} \sum\limits_{i=1}^{m} \left| \frac{(t_i - t)^{m-p-1}}{P_{m,i}(t_i)} \right|$, $P_m(t) = \prod\limits_{i=1}^{m} (t_i - t)$, $A = \max\limits_{\substack{t \in [0,T] \\ y,z \in [a,b]}} |a_1(t,y,z) + a_2(t,y,z)|$, $G = \max\limits_{\substack{t \in [0,T] \\ y,z \in [a,b]}} |\gamma_1(t,y,z) + \gamma_2(t,y,z)|$. *Тоді на сегменті* $[a,b]$ *існує єдиний розв'язок* x^* *задачі (34.28), (34.29) , до якого рівномірно щодо* $t \in [0;T]$ *збігаються послідовні наближення* $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, *побудовані за формулами (34.35), (34.36), і при цьому справджуються співвідношення*

$$y_n \le y_{n+1} \le x^* \le z_{n+1} \le z_n \quad (n = 0, 1, 2, ...). \qquad (34.38)$$

Для доведення теореми досить зазначити, що

$$L_m [\varphi(t); \psi(t)] = L_m^+ [\varphi(t)] - L_m^- [\psi(t)], \qquad (34.39)$$

та

$$\Psi_m [u(t); v(t)] = \Psi_m^+ [u(t)] - \Psi_m^- [v(t)], \qquad (34.40)$$

де оператори $L_m^+ [w(t)]$, $L_m^- [w(t)]$, $\Psi_m^+ [w(t)]$, $\Psi_m^- [w(t)]$ є лінійними додатними щодо w.

Один із часткових випадків алгоритму (34.35), (34.36) досліджено в [66] (див. також [88, 116]).

РОЗДІЛ XIII. АГРЕГАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНІ МЕТОДИ

Терміном "агрегаційно-ітеративні методи"окреслюємо групу ітераційних методів, які охоплюють методи ітеративного агрегування (див. [42]) та деякі інші методи, які можна об'єднати за допомогою методики їх дослідження, запропонованої в [104-107] і використаної, зокрема, в [O1 - O4]. Методи ітеративного агрегування виникли в 60-і роки минулого століття у зв'язку зі спеціальними задачами математичної економіки, зокрема, з рівняннями міжгалузевого балансу. Як підкреслено в [42], ці методи недосліджені і умови їх збіжності невідомі, хоча численні приклади підтверджують, що вони часто збігаються в ситуації, коли інші методи, зокрема, звичайний метод послідовних наближень, незастосовні [42]. В [42] наведений один результат щодо найпростішого так званого однопараметричного методу ітеративного агрегування для рівняння $x = Ax + b$ в банаховому просторі. Серед найістотніших вимог щодо цього методу в [42] фігурують, зокрема, припущення про знакосталість оператора A і вільного члена b та про нерівність $\rho(A) < 1$ для спектрального радіуса $\rho(A)$ оператора A. Тому оправданою можна вважати доцільність розгляду агрегаційно-ітеративних методів у цій книзі. Щодо загальніших багатопараметричних методів ітеративного агрегування в [42] ніяких результатів не наведено. Запропонована в [104 - 107] і використана в [O1 - O4] методика не використовує жодних обмежень як щодо знакосталості A та b і не передбачає нерівності $\rho(A) < 1$. Ця методика придатна і для багатопараметричних методів, а також дозволяє конструювати нові ітераційні методи, зокрема, поєднуючи ідеї методів ітеративного агрегування з ідеями інших ітераційних методів. Зазначене підтверджує спорідненість агрегаційно- ітеративних методів з проекційно-ітеративними методами (див. [43, 61, 90]), що зауважено також в [42]. Зауважимо, що з-поміж агрегаційно-ітеративних методів можна виокремити спеціальний їх різновид, коли йдеться про агрегування щодо оператора A_1 у рівнянні $x = A_1x + A_2x + b$, де оператор A_1 отримується з оператора $A = A_1 + A_2$ за допомогою оператора проектування.

§35. Агрегаційно-ітеративні аналоги методу Я.Д.Мамедова

Суть описаного в [42] методу Я.Д.Мамедова для лінійного операторного рівняння вигляду

$$x = A_1 x + A_0 x + b \quad (b \in E) \tag{35.1}$$

з лінійними неперервними операторами $A_1, A_0 : E \to E$, де E– банахів простір, зводиться до наступного. Нехай оператор A_1 має скінченну розмірність (див. [42, стор. 150]), а оператор A_0 має малий спектральний радіус. Припускаємо існування обмеженого оператора $(I - G)^{-1}$, де

$$G = I + A_0 + ... + A_0^{k-1} \quad (k < \infty), \tag{35.2}$$

I– тотожний оператор в E. Рівняння (35.1) подамо у еквівалентному вигляді

$$x = GA_1 x + A_0^k x + Gb \tag{35.3}$$

При цьому розмірності операторів GA_1 і A_1 співпадають (див. [42, стор. 150]). Метод Я.Д.Мамедова описується ітераційною процедурою вигляду

$$x_{n+1} = GA_1 x_{n+1} + A_0^k x_n + Gb \tag{35.4}$$

Використовуючи запропонований в [104-107] підхід до побудови і дослідження агрегаційно-ітеративних методів, будемо розглядати систему, яка утворюється приєднанням до (35.3) системи лінійних алгебраїчних рівнянь щодо $y_1, ..., y_N$ ($N < \infty$ вигляду

$$y_i = \lambda_i y_i - \left(\varphi_1^*, A_0^k x\right) - (\varphi_0^*, Gb) \quad (i = \overline{1, N}), \tag{35.5}$$

вважаючи заданими дійсні числа $\lambda_i \neq 1$ і відповідні до них елементи $\varphi_i^* \in E^*$, де E^* – спряжений до E банахів простір. Через (φ_i^*, x) позначаємо значення лінійних функціоналів φ_i^* на елементах $x \in E$. За допомогою рівностей

$$(\varphi_i^*, x) + y_i = 0 \quad (i = \overline{1, N}) \tag{35.6}$$

означимо підпростір ε_0 банахового простору $E \times R^N$, у якому норму $\|x, y\|$ означимо як евклідову норму упорядкованих пар $\{\|x\|, |y|\}$ ($x \in$

$E, y \in R^N$) з нормами $\|x\|$ і $|y|$ відповідно в E і R^N, R^N– евклідів простір розмірності N.

Побудуємо ітераційних процес, який можна вважати одним з агрегаційно-ітеративних аналогів методу Я.Д.Мамедова. Використовуємо формули

$$x_{n+1} = GA_1x_n + A_0^kx_n + \sum_{j=1}^{N} a_j^{(n)} \left(y_{jn} - y_{jn+1}\right) + Gb, \qquad (35.7)$$

$$y_{in+1} = \lambda_i y_{in+1} - \left(\varphi_1^*, A_0^kx_n\right) - \left(\varphi_i^*, Gb\right) \quad (i = \overline{1, N}), \qquad (35.8)$$

означаючи a_j за формулами

$$a_j^{(n)} = \frac{GA_1x_n}{\left(\varphi_j^*, x_n\right)} \quad \left(j = \overline{1, N}, \quad n = 0, 1, ...\right). \qquad (35.9)$$

Припускатимемо, що оператор A_1 вибраний в такий спосіб, що

$$\left(GA_1\right)^* \varphi_i^* = \lambda_i \varphi_i^* \quad (i = \overline{1, N}) \qquad (35.10)$$

для спряженого з GA_1оператора $(GA_1)^*$ і що

$$\left(\varphi_1^*, a_i^{(n)}\right) = \lambda_i \quad \left(i = \overline{1, N};\, n = 0, 1, ...\right), \qquad (35.11)$$

$$\left(\varphi_1^*, a_i^{(n)}\right) = 0 \quad (i, j = \overline{1, N},\ i \neq j;\ n = 0, 1, ...). \qquad (35.12)$$

Можна встановити такі два факти (див.[104, 105]).

Лема 35.1. *Якщо $\{x, y\}$ ($x \in E$, $y \in R^N$) є розв'язком системи рівнянь(35.3), (35.5), то$\{x, y\} \in \varepsilon_0$.*

Доведення. Із (33.3) і (33.5), враховуючи (33.10) отримуємо

$$\left(\varphi_i^*, x\right) + y_i = \left(\varphi_1^*, GA_1x\right) + \left(\varphi_i^*, A_0^kx\right) + \left(\varphi_i^*, Gb\right) + \lambda_i y_i -$$

$$-\left(\varphi_i^*, A_0^kx\right) - \left(\varphi_i^*, Gb\right) = \lambda_i y_i + \left(\left(GA_1\right)^* \varphi_i^*, x\right) = \lambda_i \left(\left(\varphi_i^*, x\right) + y_i\right).$$

Це при $\lambda_i \neq 1$ $\left(i = \overline{1, N}\right)$ призводить до потрібних рівностей (35.6).

Лема 35.2. *Якщо* $\{x_0, y_0\} \in \varepsilon_0$*, то для* $n = 0, 1, ...$ *матимемо* $\{x_n, y_n\} \in \varepsilon_0$.

Доведення. Застосовуючи індукцію, з припущення $(\varphi_i^*, x_n) + y_{in} = 0$ та приймаючи до уваги співвідношення (35.9)-(35.12), одержуємо

$$(\varphi_i^*, x_{n+1}) + y_{in+1} = (\varphi_1^*, GA_1 x) + \left(\varphi_i^*, A_0^{kx} x\right) + \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi_i^*, a_j^{(n)}\right) \times$$

$$\times (y_{jn} - y_{jn+1}) + (\varphi_i^*, Gb) + \lambda_i y_{in+1} - \left(\varphi_i^*, A_0^k x_n\right) - (\varphi_i^*, Gb) =$$

$$= ((GA_1)^* \varphi_i^*, x_n) + \lambda_i y_{in} - \lambda_i y_{in+1} + \lambda_i y_{in+1} = \lambda_i ((\varphi_i^*, x_n) + y_{in}) = 0$$

що й потрібно довести.

Зазначимо, що припущення $\{x_0, y_0\} \in \varepsilon_0$ не містить насправді жодних обмежень щодо вибору $x_0 \in E$, оскільки за довільного $x_0 \in E$, можна вибрати y_0 так, щоб при $x = x_0$, $y_i = y_0$ рівність (35.6) справджувалася.

З наведених лем випливають рівності

$$(\varphi_i^*, x_n - x) + y_{in} - y_i = 0 \quad (i = \overline{1, N}; n = 0, 1, ...), \tag{35.13}$$

які використаємо для обґрунтування достатніх умов збіжності алгоритму (35.7)-(35.9).

Із (35.6) і (35.8) отримуємо також

$$y_{in+1} - y_i = -\frac{1}{1 - \lambda_i} \left(\varphi_i^*, A_0^k (x_n - x)\right) \qquad (i = \overline{1, N};\ n = 0, 1, ...). \tag{35.14}$$

Завдяки (35.13), (35.14) з рівностей (35.3), (35.5), (35.7), (35.8) знаходимо

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x = GA_1 (x_n - x) - \sum_{j=1}^{N} \tfrac{GA_j x_n}{(\varphi_j^*, x_n)} \left(\varphi_j^*, x_n - x\right) + \\ + A_0^k (x_n - x) + \sum_{j=1}^{N} \tfrac{GA_1 x_n}{(1-\lambda_j)(\varphi_j^*, x_n)} \left(\varphi_j^*, A_0^k (x_n - x)\right). \end{aligned} \tag{35.15}$$

Якщо, зокрема,

$$GA_1 x = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \psi_j \left(\varphi_j^*, x\right), \tag{35.16}$$

то за припущення, що

$$(\varphi_i^*, \Psi_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = \overline{1, N}), \tag{35.17}$$

для $a_j^{(n)}$ матимемо

$$a_j^{(n)} = \lambda_j \psi_j \quad (j = \overline{1, N}; n = 0, 1, ...), \tag{35.18}$$

причому справджується умова (35.10).

Теорема 35.1. *Нехай справджуються припущення (35.10)-(35.17) і* $\{x_0, y_0\} \in \varepsilon_0$. *Тоді для збіжності послідовності* $\{x_n\}$, *утвореної за допомогою алгоритму (35.7)-(35.9) до єдиного в* E *розв'язку* x *рівняння (35.3) достатньо, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус* $\rho(H)$ *оператора* H, *означеного за формулою*

$$Hx = A_0^k x + \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_j} \psi_j \left(\varphi_j^*, A_0^k x\right) \tag{35.19}$$

Доведення. Скористаємося з рівності (35.15), маючи на увазі (35.16)-(35.18). Матимемо

$$x_{n+1} - x = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \psi_j \left(\varphi_j^*, x_n - x\right) - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \psi_j \left(\varphi_j^*, A_0^k (x_n - x)\right) +$$

$$+ A_0^k (x_n - x) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_j} \psi_j \left(\varphi_j^*, A_0^k (x_n - x)\right) = H (x_n - x).$$

Отримана рівність є підставою вважати теорему доведеною.

Зауважимо, що, запровадивши позначення A_{1j} через рівності

$$\lambda_j \psi_j \left(\varphi_j^*, x\right) = GA_{1j} x, \tag{35.20}$$

оператор Hx можна подати у вигляді

$$Hx = A_0^k x + \sum_{j=1}^{N} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_j} G A_{1j} A_0^k x. \tag{35.21}$$

Теорема 35.2. *Нехай справджуються припущення (35.10)-(35.12), (35.16), (35.17), (35.20) і, крім того, маємо*

$$\left(\varphi_j^*, A_0^k x\right) = 0 \quad (j = \overline{1, N};\ x \in E).$$

Тоді для збіжності послідовності $\{x_n\}$ до єдиного в E розв'язку рівняння (35.3) достатньо, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус $\rho\left(A_0^k\right)$ оператора A_0^k.

Доведення. Достатньо, що з огляду на припущення (35.20) оператор H, означений за (35.19), має вигляд

$$H = A_0^k$$

Таким чином, потрібне міркування зводиться до застосування теореми 35.1.

Сформульовані в теоремах 35.1 і 35.2 результати є новими як при $N > 1$ так і при $N = 1$. Задля прикладу опишемо докладніше випадок $N = 1, G = I$.

Приклад 35.1. При $N = 1, G = I$, система (35.5) матиме вигляд

$$y_1 = \lambda_1 y_1 - (\varphi_1^*, A_0 x) - (\varphi_1^*, b)$$

ітераційні формули (35.7), (35.8) запишуться як формули

$$x_{n+1} = A_1 x_n + A_0 x_n + a_0^{(n)} (y_{1n} - y_{1n+1}) + b,$$

$$y_{1\ n+1} = \lambda_1 y_{1\ n+1} - (\varphi_1^*, A_0 x_n) - (\varphi_1^*, b).$$

Формули (35.9)-(35.12) зводяться до формул

$$a_1^{(n)} = \frac{A_1 x_n}{(\varphi_1^*, x_n)};\ A_1 \varphi_1^* = \lambda_1 \varphi_1^*;\ \left(\varphi_1^*,\ a_1^{(n)}\right) = \lambda_1\ \ (n = 0, 1, ...).$$

Множина ε_0 замість (35.6) означується за допомогою рівності

$$(\varphi_1^*, x) + y_1 = 0.$$

Припущення (35.16)-(35.18) у цьому випадку означають, що

$$A_1x = \lambda_1\psi_1(\varphi_1, x), \quad (\varphi_1^*, \psi_1) = 1; \quad a_1^{(n)} = \lambda_1\psi_1 \quad (n = 0, 1, ...).$$

Для означеного за (35,19) оператора H будемо мати

$$Hx = A_0^k x + \frac{\lambda_j}{1-\lambda_j}\psi_1(\varphi_1^*, A_0x),$$

а для оператора H в умовах теореми 35.2 матимемо $H = A_0$.

Алгоритм (35.7), (35.8) має істотно обмежені можливості для використання. Це зумовлено насамперед тим, що припущення (35.10)-(35.12) передбачають діагональну структуру матриці $\Lambda = diag(\lambda_1, ..., \lambda_N)$. Запропонований в [107] підхід до конструювання і дослідження агрегаційно-ітеративних методів дає можливість побудувати загальніші і водночас привабливіші для практичних застосувань агрегаційно-ітеративні аналоги методу Я.Д. Мамедова. Одну з таких можливостей реалізуємо наступним способом.

Як і раніше, вважаємо, що за допомогою означеного за (35.2) оператора рівняння (35.1) подане у вигляді (35.3). Припускатимемо, що задані $\varphi_i, \varphi_i \in E$ $(i = \overline{1,N})$, для яких маємо

$$(GA_1^*)\varphi_i^* = \sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\varphi_j^* \; \left(i, j = \overline{1,N}\right), \tag{35.22}$$

а також, що задані елементи $a_j^{(n)} \in E$ і числа $\alpha_{ij}^{(n)}$, для яких справджуються співвідношення

$$\left(\varphi_i^*, a_j^{(n)}\right) + \alpha_{ij}^{(n)} = \lambda_{ij}\left(i, j = \overline{1,N};\, n = 0, 1, ...\right). \tag{35.23}$$

При заданих λ_{ij}, $a_j^{(n)}$ та φ_i^* числа $\alpha_{ij}^{(n)}$ визначаються цими рівностями. Будемо вважати, що існують обернені матриці $(I_N - \Lambda_N)^{-1}$ та $\left(I_N - \Lambda_N + \alpha^{(n)}\right)^{-1}$. Рівняння (35.3) розглядатимемо разом з рівнянням

$$y_i = \sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}y_j - \left(\varphi_i^*, A_0^k x\right) - (\varphi_i^*, Gb) \quad \left(i = \overline{1,N}\right) \tag{35.24}$$

щодо вектора $y = \{y_1, ..., y_N\}^T$, T – символ транспонування. Тут I_N – одинична матриця в R^N.

Для множини ε_0, означеної за рівностями (35.6), зберігається твердження леми 35.1. Справді, з (35.3), (35.24) та (35.22) знаходимо

$$(\varphi_i^*, x) + y_i = (\varphi_i^*, GA_1 x) + \left(\varphi_i^*, A_0^k x\right) + (\varphi_i^*, Gb) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j -$$
$$- \left(\varphi_i^*, A_0^k x\right) - (\varphi_i^*, Gb) = ((GA)^* \varphi_i^*, x) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij}.$$

Невиродженість матриці $(I - \Lambda)$ дає підставу вважати потрібне твердження доведеним.

Приймемо

$$y_{in+1} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_{jn+1} - \left(\varphi_i^*, A_0^k x_n\right) + \\ + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}^{(n)} (y_{jn} - y_{jn+1}) - (\varphi_i^*, Gb). \tag{35.25}$$

Для ітераційного процесу (35.7), (35.25) з $a_{ij}^{(n)}$, $\alpha_{ij}^{(n)}$, λ_{ij}, що задовольняють (35.22) і (35.23), зберігає силу твердження леми 35.2. Для обґрунтування цього досить взяти до уваги співвідношення

$$(\varphi_i^*, x_{n+1}) + y_{n+1} = (\varphi_i^*, GA_1 x_n) + \left(\varphi_i^*, A_0^k x_n\right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi_i^*, a_j^{(n)}\right) (y_{jn} - y_{jn+1}) + (\varphi_i^*, Gb) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_{jn+1} -$$
$$- \left(\varphi_i^*, A^k x_n\right) + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}^{(n)} (y_{jn} - y_{jn+1}) - (\varphi_i^*, Gb) =$$
$$= ((GA_1)^* \varphi_i^*, x_n) + \sum_{j=1}^{N} \left[\left(\varphi_i^*, a_j^{(n)}\right) + \alpha_{ij}^{(n)}\right] y_{jn} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \left[\lambda_{ij} - \left(\varphi_i^*, a_j^{(n)}\right) + \alpha_{ij}^{(n)}\right] y_{jn+1} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \left[(\varphi_i^*, x_n) + y_{ij}\right] = 0,$$

які випливають із співвідношень (35.7), (35.25) при врахуванні (35.22), (35.23) та принципу індукції.

Завдяки наведеним двом фактам про леми 35.1 і 35.2 для алгоритму (35.7), (35.25) матимемо рівності (35.13).

Для отримання теореми, що узагальнюють теореми 35.1 і 35.2 і містять достатні умови збіжності алгоритму (35.7), (35.25), доцільно, використовуючи оператор $S_N : E \to R^N$, який описується формулами

$$S_N = \{(\varphi_1^*, x), ..., (\varphi_N^*, x)\}^T \tag{35.26}$$

(T– символ транспонування), подати рівності (35.13), (35.24), (35.25) відповідно у вигляді

$$S_N (x_n - x) + y_n - y = \theta_N, \tag{35.27}$$

$$y = \Lambda_N y - S_N A_0^k x - S_N b, \tag{35.28}$$

$$y_{n+1} = \Lambda_N y_{n+1} - S_N A_0^k x_n + \alpha^{(n)} (y_n - y_{n+1}) - S_N G b. \tag{35.29}$$

де через $\alpha^{(n)}$ позначена матриця $\alpha^{(n)} = \left\{\alpha_{ij}^{(n)}\right\}$, θ_N – нульовий вектор в R^N. Доданок

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}^{(n)} (y_{jn} - y_{jn+1})$$

запишемо як „добуток” $\alpha^{(n)} (y_n - y_{n+1})$ й тому (35.7) запишемо у вигляді

$$x_{n+1} = G A_1 x_n - A_0^k x_n + a^{(n)} (y_n - y_{n+1}) + G b. \tag{35.30}$$

Оскільки при цьому, як можна переконатися безпосередньо, справджується рівність

$$S_N \left(a^{(n)} (y_n - y_{n+1})\right) = \left(S_N a^{(n)}\right) (y_n - y_{n+1}),$$

то писатимемо також

$$\left(S_N a^{(n)}\right) (y_n - y_{n+1}) = S_N a^{(n)} (y_n - y_{n+1}).$$

При цьому рівності (35.23) можна записати як рівність

$$S_N a^{(n)} + \alpha^{(n)} = \Lambda_N. \tag{35.31}$$

Отже, досліджуватимемо збіжність ітераційного процесу (35.7), (35.25), записуючи його у вигляді (35.29), (35.30). Із (35.28), (35.29), використовуючи (35.27), знаходимо

$$y_{n+1}-y = \Lambda\left(y_{n+1}-y\right)-S_N A_0^k\left(x_n-x\right)+\alpha^{(n)}\left(y_n-y\right)-\alpha^{(n)}\left(y_{n+1}-y\right),$$

тобто

$$y_{n+1}-y = -\left(I_N-\Lambda_N+\alpha^{(n)}\right)^{-1} S_N A_0^k\left(x_n-x\right)+\left(I_N-\Lambda_N+\alpha^{(n)}\right)^{-1}\times$$

$$\times\alpha^{(n)}\left(y_n-y\right) = -\left(I_N-\Lambda_N+\alpha^{(n)}\right)^{-1} S_N A_0^k\left(x_n-x\right)-$$

$$-\left(I_N-\Lambda_N+\alpha^{(n)}\right)^{-1}\alpha^{(n)} S_N\left(x_n-x\right).$$

Таким чином,

$$y_{n+1}-y = -\left(I_N-\Lambda_N+\alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(S_N A_0^k+\alpha_n S_N\right)\left(x_n-x\right). \tag{35.32}$$

Це дозволяє із (35.3) і (35.30), використовуючи (35.32), одержати

$$\begin{gathered}
x_{n+1}-x = GA_1\left(x_n-x\right)+A_0^k\left(x_n-x\right)+a^{(n)}\left(y_n-y\right)- \\
-a^{(n)}\left(y_{n+1}-y\right) = GA_1\left(x_n-x\right)+A_0^k\left(x_n-x\right)+ \\
+a^{(n)} S_N\left(x_n-x\right)+a^{(n)}\left(I_N-\Lambda_N+\alpha^{(n)}\right)^{-1}\times \\
\times\left(S_N A_0^k+\alpha^{(n)} S_N\right)\left(x_n-x\right) = \left[GA_1+A_0^k+a^{(n)} S_N+\right. \\
\left.+a^{(n)}\left(I_N-\Lambda_N+\alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(S_N A_0^k+\alpha^{(n)} S_N\right)\right]\left(x_n-x\right).
\end{gathered} \tag{35.33}$$

Позначивши

$$\begin{gathered}
H_\omega^{(n)} = \left[GA_1+A_0^k-a^{(n)} S_N+\right. \\
\left.+a^{(n)}\left(I_N-\Lambda_N+\alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(S_N A_0^k+\alpha^{(n)} S_N\right)\right]\omega,
\end{gathered} \tag{35.34}$$

рівність (35.33) запишемо у вигляді

$$x_{n+1}-x = H^{(n)}\left(x_n-x\right) \qquad (n=0,1,\ldots). \tag{35.35}$$

Теорема 35.3. *Якщо* $\{x_0, y_0\} \in \varepsilon_0$,

$$\left\| H^{(n)} \right\| \leq q < 1, \tag{35.36}$$

то послідовність $\{x_n\}$*, утворена за допомогою алгоритму (35.29), (35.30) з* $\Lambda_N, a^{(n)}, \alpha^{(n)}$*, що задовольняють (35.31), збігається до єдиного в* E *розв'язку рівняння (35.1) не повільніше за геометричну прогресію із знаменником* q*.*

Доведення. Твердження теореми є наслідком попередніх міркувань і рівності (35.35).

У тому частковому випадку, коли в (35.31) маємо

$$\alpha_{ij}^{(n)} = 0 \left(i, j = \overline{1, N};\ n = 0, 1, ...\right),$$

тобто,

$$S_N a^{(n)} = \Lambda_N, \tag{35.37}$$

для оператора $H^{(n)}$в (35.35) будемо мати

$$H^{(n)}\omega = \left[GA_1 + A_0^k - a^{(n)} S_N + a^{(n)} \left(I_N - \Lambda_N\right)^{-1} S_N A_0^k\right] \omega. \tag{35.38}$$

В цьому випадку в алгоритмі (35.30), (35.29) формулу (35.29) потрібно замінити формулою

$$y_{n+1} = \Lambda_N y_{n+1} - S_N A_0^k x_n - S_N Gb. \tag{35.39}$$

Теорема 35.4. *Нехай справджуються умови теореми 35.3 із заміною (35.31) на (35.37). Якщо при цьому*

$$a^{(n)} S_N = GA_1, \tag{35.40}$$

то для збіжності послідовності $\{x_n\}$*, утвореної за допомогою формул (35.30), (35.29), до розв'язку* x *рівняння (35.1) достатньо, щоб справджувалася умова (35.36) з оператором*

$$H_\omega^{(n)} = \left[A_0^k + a^{(n)} \left(I_N - \Lambda_N\right)^{-1} S_N A_0^k\right] \omega. \tag{35.41}$$

Ця збіжність не повільніша за збіжність геометричної прогресії з знаменником q*.*

Доведення. Достатньо зауважити, що рівність (35.34) за цих припущень має вигляд (35.41). Тому можна застосувати теорему 35.3.

Теорема 35.5. *Нехай* $\{x_0, y_0\} \in \varepsilon_0$ *і мають місце співвідношення (35.26), (35.37), оператори* $A_1, a^{(n)}$*вибрані таким способом, що*

$$GA_1 x = \sum_{j=1}^{N} \Psi_j \left(\varphi_j^*, x\right) (x \in E), \qquad (35.42)$$

$$a^{(n)} \left(I_N - \Lambda_N\right)^{-1} S_N \omega = \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta_j}{\Delta} \Psi_j \left(\varphi_j^*, \omega\right) (\omega \in E), \qquad (35.43)$$

де $\Psi_j \in E$ $(j = \overline{1, N})$, Δ *– детермінант матриці* $I_N - \Lambda_N$, Δ_j *– відповідні детермінанти у формулах Крамера для системи*

$$\left(I_N - \Lambda_N\right) y = \theta_N \quad \left(y \in R^N\right). \qquad (35.44)$$

Тоді для збіжності процесу (35.30), (35.29) до єдиного в E *розв'язку рівняння (35.1) достатньо, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус оператора*

$$H\omega = A_0^k \omega + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta_j}{\Delta} \Psi_j \left(\varphi_j^*, \omega\right). \qquad (35.45)$$

Доведення. В структурі оператора (35.45) не фігурує ітераційний індекс n. Тому рівності (35.35) зводяться до рівності

$$x_{n+1} - x = H\left(x_n - x\right).$$

Звідси випливає твердження теореми.

Приклад 35.2. Якщо $N = 1$, $G = I$, тобто $k = 0$, то з результатів цього підрозділу отримуються ті ж самі результати, які наведені у прикладі 35.1. Якщо ж $k > 0$, то при $N = 1$ і при $N > 1$, встановлені в цьому підрозділі результати, є загальнішими за результати прикладу 35.1.

§36. Застосування одного агрегаційно-ітеративного аналогу методу Я.Д.Мамедова до лінійних інтегральних рівнянь

Для наближеного розв'язання лінійних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду скористаємося із способу, в основі якого лежить поєднання ідеї методу Я.Д.Мамедова (див. [42], стор. 150) та ідей методів ітеративного агрегування (див. [42], стор. 155-158). Застосуємо підхід до дослідження методів ітеративного агрегування, запропонований в [104, 105], який дає можливість побудувати і дослідити на збіжність клас деяких агрегаційно-ітеративних методів, що охоплює самі методи ітеративного агрегування та деякі інші методи, зокрема, окремі різновиди проекційно-ітеративних методів [61].

Будемо розглядати рівняння

$$x(t) = \int\limits_a^b K_0\left(t,s\right) x\left(s\right) ds + \sum_{j=1}^{N} \int\limits_a^b a_i\left(t\right) b_i(s) x\left(s\right) ds + b\left(t\right) \qquad (36.1)$$

з інтегровними з квадратом функціями $K_0\left(t,s\right)$, $a_i\left(t\right)$, $b_i\left(t\right)$ та $b\left(t\right)$ при $t, s \in (a;b)$, припускаючи, що $N < \infty$. Оператор G означимо за формулою

$$\begin{aligned} Gx = x(t) + \int\limits_a^b K_0(t,s)x(s)ds + \int\limits_a^b K_0^{(1)}\left(t,s\right)x(s)ds + \ldots + \\ + \int\limits_a^b K_0^{(N)}\left(t,s\right)x(s)ds, \end{aligned} \qquad (36.2)$$

де

$$\begin{aligned} K_0^{(1)}\left(t,s\right) &= \int\limits_a^b K_0(t,\xi)K_1(\xi,s)d\xi, \ldots, \\ K_0^{(k)}\left(t,s\right) &= \int\limits_a^b K_0\left(t,\xi\right) K_0^{(k-1)}\left(\xi,s\right) d\xi, \quad (k = \overline{1,N}), \end{aligned} \qquad (36.3)$$

$$K_1\left(t,s\right) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t) b_i(s). \qquad (36.4)$$

Ядра (36.3) – вироджені. Для них можна отримати

$$\begin{gathered}K_0^{(i)}(t,s)=\sum_{j=1}^{N}h_j^{(i)}(t)b_j(s),\quad h_j^{(1)}(t)=\int_a^b K_0(t,s)a_j(s)ds,\\ h_j^{(i)}(t)=\int_a^b K_0(t,s)\,h_j^{(i-1)}(s)\,ds,\quad (i,j=\overline{1,N}).\end{gathered}\tag{36.5}$$

Поєднання (36.3) - (36.5) призводить до висновку, що формулу (36.2) можна подати у вигляді

$$Gx=x(t)+\sum_{j=1}^{N}\int_a^b g_j(t)b_j(s)x(s)ds,\tag{36.6}$$

де функції $g_j(t)$ отримуються після перегрупування доданків в (36.2) і перепозначень через $g_j(t)$ відповідних сум функцій $h_j^{(i)}(t)$. Очевидно, що $g_j(t)$ залежать тільки від t.

Отже, рівняння (36.1) можна подати у вигляді

$$x(t)=\sum_{j=1}^{N}\int_a^b g_j(t)b_j(s)x(s)ds+\int_a^b k_{0N}(t,s)\,x(s)ds+f(t),\tag{36.7}$$

де $f(t)=Gb$, k_{0N} є N-м ітерованим ядром від $K_0(t,s)$.

Будемо припускати наступне, використовуючи методику побудови і дослідження агрегаційно-ітеративних методів, створену в [104] (див. також [105]).

Умова А. Задані дійсні числа $\lambda_i\neq 1$ $(i=\overline{1,N})$ *і має місце умова*

$$\int_a^b g_i(t)\,b_j(t)dt=\begin{cases}\lambda_i, & i=j,\\ 0, & i\neq j\quad i,j=\overline{1,N}.\end{cases}$$

Умова Б. Задані функції $\psi_i(t)\in L^2(a,b)$, *для яких маємо*

$$\int_a^b \psi_i(t)\,b_j(s)ds=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j\quad i,j=\overline{1,N}.\end{cases}\tag{36.8}$$

Задля спрощення викладу вважатимемо, що функції $g_i(t)$ і $a_i(t)$ співпадають при $t \in (a,b)$ майже всюди.

З приєднанням до рівняння (36.7) системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$y_i=\lambda_i y_i-\int\limits_a^b b_i(t)dt\int\limits_a^b k_{0N}(t,s)x(s)ds-\int\limits_a^b b_i(t)f(t)dt\ (i=\overline{1,N}) \tag{36.9}$$

створюємо ситуацію, у якій простір $L^2 = L^2(a,b)$ занурюємо в простір $\varepsilon = L^2 \times R^N$. Простір ε можна вважати гільбертовим, запровадивши норму в E, як евклідову норму двовимірного вектора норм $\|x(t)\|$ та $|y|$ у L^2 та R^N відповідно.

Як і в [104, 105], фундаментальна роль при дослідженні збіжності алгоритму

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) = \sum_{j=1}^{N}\int\limits_a^b g_i(t)b_i(s)ds + \int\limits_a^b k_{0N}(t,s)x_n(s)ds+ \\ +\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\psi_j(t)(y_{jn}-y_{jn+1})+f(t), \end{aligned} \tag{36.10}$$

$$y_{in+1}=\lambda_i y_{in+1}-\int\limits_a^b b_i(t)dt\int\limits_a^b k_{0N}(t,s)x_n(s)ds-\int\limits_a^b b_i(t)f(t)dt \tag{36.11}$$

належить підпросторові ε_0 простору ε, де ε_0 означуємо як сукупність пар $\{x(t), y\}$ $\ x(t) \in L^2$, $y \in R^N$), для яких

$$\int\limits_a^b b_i(t)x(t)dt + y_i = 0 \quad (i=\overline{1,N}). \tag{36.12}$$

При дослідженні збіжності алгоритму (36.10), (36.11) опиратимемося на такі два факти (див.[104, 105]), доведення яких пропускаємо, бо для їх обгрунтування використовуються такі самі міркування, що й при доведенні лем 1 і 2 із [104].

Перший з них стверджує, що при λ_i $(i=\overline{1,N})$ розв'язок $\{x(t), y\}$ в ε належить підпросторові ε_0.

Другий з них означає, що вибір $\{x(t)_0, y_0\}$ з підпростору ε_0 призводить до того, що для кожного $n = 0, 1, \ldots$ матимемо, що $\{x(t)_n, y_n\} \in \varepsilon_0$. Зазначимо при цьому, що припущення $\{x(t)_0, y_0\} \in \varepsilon_0$ не обмежує довільності вибору $x_0(t) \in L^2$, бо за довільного $x(t) = x_0(t)$, можна вибрати y_0 так, щоб справджувалися рівності (36.12) при $x(t) = x_0(t)$, $y = y_0$.

Наслідком цих двох фактів матимемо рівності

$$y_{in} - y_i = -\int_a^b b_i(t)(x_n(t) - x(t))dt = 0 \quad (i=\overline{1,N}). \tag{36.13}$$

З іншого боку із (36.9) і (36.11) випливає

$$y_{in+1} - y_i = -\frac{1}{1-\lambda_i}\int_a^b b_i(t)dt\int_a^b k_{0N}(t,s)(x_n(s) - x(s))ds. \tag{36.14}$$

Використовуючи (36.7) і (36.10), знаходимо

$$x_{n+1}(t) - x(t) = \sum_{j=1}^{N}\int_a^b g_i(t)b_i(s)(x_n(s) - x(s))ds + \int_a^b k_{0N}(t,s)(x_n(s) -$$

$$- x(s))ds + \sum_{j=1}^{N}\lambda_j\psi_j(t)(y_{jn} - y_j) - \sum_{j=1}^{N}\lambda_j\psi_j(t)(y_{jn+1} - y_j).$$

Звідси у поєднанні з (36.13) і (36.14) отримуємо

$$x_{n+1}(t) - x(t) = \sum_{j=1}^{N}\int_a^b g_i(t)b_i(s)(x_n(s) - x(s))ds + \int_a^b k_{0N}(t,s)(x_n(s) -$$

$$- x(s))ds + \sum_{j=1}^{N}\lambda_j\psi_j(t)\int_a^b b_j(s)(x_n(s) - x(s))ds +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\frac{\psi_j(t)}{1-\lambda_j}\int_a^b b_j(s)ds\int_a^b k_{0N}(s,\xi)(x_n(\xi) - x(\xi))d\xi,$$

тобто,

$$x_{n+1}(t) - x(t) = \sum_{j=1}^{N} \int_a^b [g_i(t) - \lambda_j \psi_j(t)] b_j(s)(x_n(s) - x(s))ds +$$
$$+ \int_a^b [k_{0N}(t,s) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\psi_j(t)}{1-\lambda_j} \Phi_j(s)](x_n(s) - x(s))ds, \tag{36.15}$$

де

$$\Phi_j(t) = \int_a^b k_{0N}(s,t) b_j(s) ds \quad (j = \overline{i, N}). \tag{36.16}$$

Теорема 36.1. *Якщо справджуються умови А і Б, то для збіжності послідовності $\{x_n(t)\}$, отриманої за допомогою алгоритму (36.10), (36.11) до єдиного в L^2 розв'язку $x(t)$ рівняння (36.1) достатньо, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус $\rho(H)$ оператора*

$$\begin{aligned} Hx = \sum_{j=1}^{N} \int_a^b [g_i(t) - \lambda_j \psi_j(t)] b_j(s) x(s) ds + \\ + \int_a^b [k_{0N}(t,s) + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{1-\lambda_j} \psi_j(t) \Phi_j(s)] x(s) ds, \end{aligned} \tag{36.17}$$

породженого правою частиною рівності (36.15), де $\Phi_j(t)$ означені за (36.16).

Доведення. Обгрунтуванням є попередні міркування, які призводять до (36.15).

Теорема 36.2. *Нехай справджуються умови теореми 36.1 і функції $b_j(t)$ ортогональні до ядра $k_{0N}(t,s)$. Тоді для збіжності послідовності $\{x_n(t)\}$ до єдиного в L^2 розв'язку $x(t)$ рівняння (36.1) достатньо, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус $\rho(H_1)$ оператора H_1, означеного за допомогою формули*

$$H_1 x = \sum_{j=1}^{N} \int_a^b [g_i(t) - \lambda_j \psi_j(t)] b_j(s) x(s) ds + \int_a^b k_{0N}(t,s) x(s) ds. \tag{36.18}$$

Доведення. Обгрунтуванням зводиться до констатації того, що можна застосувати теорему 36.1 з оператором H_1, який отримується з оператора H у формулі (36.17) для $\varPhi_j(t) = 0$.

Теорема 36.3. *Нехай справджуються умови теореми 36.1 і, крім того, мають місце рівності*

$$g_i(t) = \lambda_j \psi_j(t) \quad (j = \overline{1, N}). \tag{36.19}$$

Тоді для збіжності послідовності $\{x_n(t)\}$ до единого в L^2 розв'язку $x(t)$ рівняння (36.1) достатньо, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус $\rho(H_2)$ оператора H_2, означеного за допомогою формули

$$H_2 x = \int\limits_a^b [k_{0N}(t,s) + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{1-\lambda_j} \psi_j(t) \varPhi_j] x(s) ds. \tag{36.20}$$

Доведення. Достатньо зауважити, що рівності (36.19) перетворюють формулу (36.17) у формулу (36.20).

Теорема 36.4. *Нехай справджуються умови теореми 36.2 і мають місце рівності (36.19). Тоді послідовність $\{x_n(t)\}$ збігається до розв'язку $x(t)$ рівняння (36.1) , якщо менший від одиниці спектральний радіус оператора H_3, що співпадає з оператором, який означений доданком*

$$H_3 x = \int\limits_a^b k_{0N}(t,s) x(s) ds. \tag{36.20}$$

у рівності (36.7). При цьому послідовність $\{x_n(t)\}$, побудована за допомогою алгоритму (36.10), (36.11) співпадає з послідовністю $\{x_n(t)\}$, отриманою за допомогою методу послідовних наближень

$$x_{n+1}(t) = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_a^b g_j(t) b_j(s) x_n(s) ds + \int\limits_a^b k_{0N}(t,s) x_n(s) ds + f(t) \tag{36.20}$$

із спільним для обидвох випадків початковим наближенням $x_0(t)$.

Доведення. Твердження теореми мають вигляд доконаного факту, якщо зауважити, що справджуються умови як теореми 36.2 так і теореми 36.3 і, крім того, рівності (36.11) матимуть вигляд

$$y_{in+1} = \frac{1}{1-\lambda_i} \int_a^b b_i(t) f(t) dt \quad (i = \overline{1,N};\ n = 0,1,\ldots)$$

У зв'язку з цим формули (36.17) мають вигляд (36.18). Теорему доведено.

§37. Застосування до систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Практична реалізація наближених методів за допомогою сучасних обчислювальних засобів тим чи іншим способом найчастіше зводиться до систем рівнянь, в яких невідомі є числами. Тому доцільно описати схему застосування агрегаційно-ітеративних методів до систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглядатимемо рівняння

$$x = A_0 x + \sum_{j=1}^{N} A_j x + b \tag{37.1}$$

в дійсному гільбертовому просторі E. Припускатимемо, що оператори A_j мають вигляд

$$A_j x = \psi_j \left(\varphi_j, x\right) \quad (j = \overline{1,N}, \psi_j, \varphi_j \in E), \tag{37.2}$$

де через (φ_j, x) позначений скалярний добуток елементів φ_j, $x \in E$. Позначимо

$$(\varphi_i, \psi_j) = \lambda_{ij} \quad (i, j = \overline{1,N}). \tag{37.3}$$

Замість (37.1) запишемо

$$x = A_0 x + \sum_{j=1}^{N} \psi_j \left(\varphi_j, x\right) + b \tag{37.4}$$

і приєднаємо до цього рівняння систему рівнянь

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} - (\varphi_i, A_0 x) - (\varphi_i, b) \quad (i = \overline{1, N}) \tag{37.5}$$

з додатковими невідомими дійсними числами y_i.

Підпростір $\varepsilon_0 \subset E \times R^N$ означуємо як сукупність таких $x \in E$, $y \in R^N$, R^N – евклідів простір розмірності N, які задовольняють співвідношення

$$(\varphi_i, x) + y_i = 0 \quad (i = \overline{1, N}). \tag{37.6}$$

Можна переконатися, що за припущення, що $\det (I_N - \Lambda_N) \neq 0$, де I_N – одинична матриця в R^N, $\Lambda_N = \{\lambda_{ij}\}$, має місце твердження леми 35.1.

Справді, із (37.4), (37.5) випливає

$$(\varphi_i, x) + y_i = (\varphi_i, A_0 x) + \left(\varphi_i, \sum_{j=1}^{N} \psi_j (\varphi_j, x)\right) + (\varphi_i, b) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j -$$

$$- (\varphi_i, A_0 x) - (\varphi_i, b) = \sum_{j=1}^{N} (\varphi_i, \psi_j) (\varphi_j, x) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \left[(\varphi_j, x) + y_j\right].$$

Звідси випливає рівність (37.6) завдяки невиродженості матриці $I_N - \Lambda_N$, що й потрібно було довести.

Задамо дійсні числа $\alpha_{ij}^{(n)}$ і елементи $a_j^{(n)} \in E$ $(i, j = \overline{1N}; n = 0, 1, ...)$ і, позначаючи $a^{(n)} = \left\{a_1^{(n)}, ..., a_j^{(n)}\right\}$, запровадимо запис

$$a^{(n)} z = \sum_{j=1}^{N} a_j^{(n)} z_j, \tag{37.7}$$

де $z = \{z_1, ..., z_N\} \in R^N$.

Розглянемо ітераційний процес, побудований за допомогою формул

$$x_{n+1} = A_0 x_n + \sum_{j=1}^{N} \psi_j (\varphi_j, x_n) + \sum_{j=1}^{N} a_j^{(n)} (y_{jn} - y_{jn+1}) + b, \tag{37.8}$$

$$
\begin{gathered}
y_{in+1} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_{jn+1} + (\varphi_i, A_0 x_n) + \\
+ \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}^{(n)} \left(y_{jn} - y_{jn+1} \right) - (\varphi_i, b) \quad (i = \overline{1, N}).
\end{gathered}
\tag{37.9}
$$

За припущень, що

$$
\det \left(I_N - \Lambda_N + \alpha^{(n)} \right) \neq 0, \tag{37.10}
$$

де $\Lambda_N = \{\lambda_{ij}\}$, $\alpha^{(n)} = \left\{ \alpha_{ij}^{(n)} \right\}$, та що

$$
\left(\varphi_i, a_j^{(n)} \right) + \alpha_{ij}^{(n)} = \lambda_{ij} \quad (i, j = \overline{1, N};\ n = 0, 1, ...), \tag{37.11}
$$

зберігається твердження леми 35.2.

Справді. Співвідношення (37.8), (37.9) і (37.3), (37.11) дають підставу для викладок

$$
\begin{gathered}
(\varphi_i, x_{n+1}) + y_{in+1} = (\varphi_i, A_0 x_n) + \left(\varphi_i, \sum_{j=1}^{N} \psi_j \left(\varphi_j, x_n \right) \right) \times \\
\times \left(\varphi_i, \sum_{j=1}^{N} a_j^{(n)} \left(y_{jn} - y_{jn+1} \right) \right) + (\varphi_i, b) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_{jn+1} - (\varphi_i, A_0 x_n) + \\
+ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{(n)} \left(y_{jn} - y_{jn+1} \right) - (\varphi_i, b) == \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi_i, \psi_j \right) \left(\varphi_j, x_n \right) + \\
+ \sum_{j=1}^{N} \left(\varphi_i, a_j^{(n)} \right) \left(y_{jn} - y_{jn+1} \right) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_{jn+1} + \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}^{(n)} \left(y_{jn} - y_{jn+1} \right) = \\
= \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \left(\varphi_j, x_n \right) + \sum_{j=1}^{N} \left(\lambda_{ij} - \alpha_{ij}^{(n)} \right) \left(y_{jn} - y_{jn+1} \right) + \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_{jn+1} + \\
+ \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}^{(n)} \left(y_{jn} - y_{jn+1} \right) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \left(\varphi_j, x_n \right) + \sum_{j=1}^{N} \left(\lambda_{ij} - \alpha_{ij}^{(n)} + \alpha_{ij}^{(n)} \right) y_{jn} +
\end{gathered}
$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\left(-\lambda_{ij}+\alpha_{ij}^{(n)}+\lambda_{ij}-\alpha_{ij}^{(n)}\right)y_{jn+1}=\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\left[(\varphi_j,x_n)+y_{jn}\right].$$

Тому з припущення, що $\{x_n, y_n\} \in \varepsilon_0$ випливає, що $\{x_{n+1}, y_{n+1}\} \in \varepsilon_0$. Таким чином з принципу індукції випливає висновок, що твердження леми 35.2 має місце.

Оскільки із (37.4) і (37.5) з урахуванням (37.8), (37.9), тверджень лем 35.1 і 35.2 отримуємо

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x=A_0\,(x_n-x)+\sum_{j=1}^{N}\left(\psi_j-a_j^{(n)}\right)(\varphi_j,x_n-x)-\\ -\sum_{j=1}^{N}a_j^{(n)}\,(y_{jn+1}-y_j), \end{aligned} \tag{37.12}$$

то для дослідження збіжності ітераційного процесу (37.8), (37.9) досить розв'язати щодо $y_{in+1}-y_i$ $(i=\overline{1,N})$ систему

$$\begin{aligned} y_{in+1}-y_i-\sum_{j=1}^{N}\left(\lambda_{ij}-\alpha_{ij}^{(n)}\right)(y_{jn+1}-y_j)=\\ =-\left(\varphi_i,A_0\,(x_n-x)\right)-\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}^{(n)}\,(\varphi_j,x_n-x), \end{aligned} \tag{37.13}$$

яка є наслідком співвідношення (37.5), (37.9). Цей розв'язок можна подати, взагалі кажучи, у вигляді

$$y_{in+1}-y_i=-\left(h_i,x_n-x\right)\quad(i=\overline{1,N}),$$

де $h_i \in E$ визначаються із (37.13) однозначно. Враховуючи це, із (37.12) одержимо

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x=A_0\,(x_n-x)+\sum_{j=1}^{N}\left(\psi_j-a_j^{(n)}\right)(\varphi_j,x_n-x)+\\ +\sum_{j=1}^{N}a_j^{(n)}\,(h_j,x_n-x). \end{aligned} \tag{37.14}$$

Терема 37.1. *Якщо для операторів H_n, породжених правою частиною рівностей (37.14) маємо*

$$\|H_n\|\le q<1,\quad(n=0,1,...),\tag{37.15}$$

то ітерації x_n збігаються до розв'язку x рівняння (37.4) не повільніше від геометричної прогресії із знаменником q.

Перевірка умов (37.15) спрощується, якщо зробити деякі додаткові припущення. Зокрема, у випадку, коли

$$a_j^{(n)} = \psi_j \quad (j = \overline{1,N};\ n = 0,1,...), \tag{37.16}$$

із (37.3), (37.11) випливає, що $\alpha_{ij}^{(n)} = 0$ при $i,j = \overline{1,N}$; $n = 0,1,....$ Тоді із (37.12) і (37.13) відповідно випливають рівності

$$\begin{aligned} &x_{n+1} - x = A_0\,(x_n - x) - \sum_{j=1}^{N} \psi_j\,(y_{jn+1} - y_j), \\ &y_{in+1} - y_i - \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij}\,(y_{jn+1} - y_j) = -\,(\varphi_i, A_0\,(x_n - x)) \quad (i = \overline{1,N}). \end{aligned} \tag{37.17}$$

Виокремимо у цій ситуації два спеціальні випадки. У першому з них додатково постулюємо діагональність матриці $\Lambda_N = \{\lambda_{ij}\}$. Система (37.17) розпадається тоді на N незалежних одне від одного рівнянь щодо $y_{in+1} - y_i$

$$(y_{in+1} - y_i)\,(1 - \lambda_{ij}) = -\,(\varphi_i, A_0\,(x_n - x)) \quad (i = \overline{1,N}). \tag{37.18}$$

Вважатимемо, що $\lambda_{ii} \neq 1$ при $(i = \overline{1,N})$. Завдяки (37.17) із (37.18) випливає

$$x_{n+1} - x = A_0\,(x_n - x) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{1 - \lambda_{ii}} \psi_i\,(\varphi_i, A_0\,(x_n - x)).$$

Теорема 37.2. *Якщо справджуються умови теореми 37.1 і мають місце співвідношення (37.16), то для збіжності ітерацій x_n до розв'язку рівняння (37.4) достатньо, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус $\rho\,(H)$ оператора*

$$Hw = A_0 w + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{1 - \lambda_{ii}} \psi_i\,(\varphi_i, A_0 w) \quad (w \in E). \tag{37.19}$$

Очевидно, що за вдалого вибору φ_i, ψ_i та A_0 спектральний радіус оператора H може бути меншим від спектрального радіуса оператора

A. Зокрема, у другому спеціальному випадку, який отримаємо у особливій ситуації з розглянутого першого випадку, припустимо, що разом з припущенням про діагональний вигляд матриці Λ справджується умова

$$(\varphi_i, A_0\,(x_n - x)) = 0 \quad (i = \overline{1, N}). \tag{37.20}$$

Оскільки у цій ситуації можна вважати, що множина ε_0 визначається рівностями

$$(\varphi_i, x) + \frac{(\varphi_i, b)}{1 - \lambda_{ii}} = 0 \quad (i = \overline{1, N};\ x \in E), \tag{37.21}$$

то ε_0 є підпростором в E. Рівність (37.20) означає, що підпростір $\varepsilon_0 \subseteq E$ є ортогональним до підпростору $\varepsilon_1 = E \backslash \varepsilon_0$, породженого рівностями

$$(A_0^* \varphi_i, x) \quad (i = \overline{1, N}),$$

де A_0^* – спряжений з A_0 оператор. В такому разі для оператора Hw, означеного за (37.19) матимемо

$$Hw = A_0 w (w \in E).$$

Для рівняння (37.4) можна задати $a_j^{(n)}$, λ_{ij}, $\alpha_{ij}^{(n)}$ різними способами, підпорядковуючи їх вимозі, щоб справджувалися рівності (37.11) та щоб були невиродженими матриці $I_N - \Lambda_N$ та $I_N - \Lambda_N + \alpha^{(n)}$. Зокрема, наприклад, для $a_j^{(n)}$ та $\alpha_{ij}^{(n)}$ можна прийняти

$$a_j^{(n)} = \psi_j - \frac{A_0 x_n}{(\varphi_j, x_n)}, \quad \alpha_{ij}^{(n)} = \frac{(\varphi_i, A_0 x_n)}{(\varphi_j, x_n)} \tag{37.22}$$

При цьому умова (37.11) очевидно справджується.

Зазначимо, що при виборі елементів $a_j^{(n)}$ за формулами (37.16) ітераційний процес (37.8), (37.9) можна подати як один з різновидів проекційно-ітеративних методів, докладно досліджених для лінійних рівнянь вигляду (37.1) А.Ю. Лучкою (див. [61]). Йдеться про те, що вважаючи, що

$$A_j = P_j A,$$

де P_j – проектори, котрі проектують простір E на підпростори $E_j \in E$. Ітераційний процес (37.8), (37.9) відповідає проекційно-ітеративному методові, який описують формули

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{N} A_j x_{n+1} + A_0 x_n + b \quad (n = 0, 1, ...), \tag{37.23}$$

причому мається на увазі той частинний випадок, коли E_j мають одиничну розмірність.

Зауважимо, не зупиняючись на докладному викладі, що аналоги ітераційного процесу (37.8), (37.9) можна побудувати і для тої ситуації, коли E_j мають розмірність більшу за одиницю. При цьому методику, використану для дослідження алгоритму (37.8), (37.9), можна поширити на аналоги цього методу з підпросторами E_j неодиничної розмірності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Азбелев Н. В. О границах применимости теоремы С. А. Чаплыгина // ДАН СССР. – 1953. – Т. 89, №4. – С. 589-591.
2. Азбелев Н. В., Максимов П. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1991.– 278 с.
3. Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф. Задача Коши для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, №9. – С. 1542-1552.
4. Азбелев Н. В., Рахматуллина Л. Ф. К вопросу о функционально-дифференциальных неравенствах и монотонных операторах // Функционально-дифференциальные уравнения. – Пермь. – 1987. – С. 3-11.
5. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. Об интегральных неравенствах. I // Мат. сб. – 1962. – Т. 56, №3. – С. 325-342.
6. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б. Об одном методе оценок решений уравнений // Волжский мат. сб. – 1965. – Вып. 6. – С. 3-9.
7. Ахмеров Р. Р., Родкина А. Е. Дифференциальные неравенства и структура интегральной воронки систем функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, №5. – С. 797-806.
8. Бабкин Б. Н. Об одной модификации метода С. А. Чаплыгина приближенного интегрирования // ДАН СССР. – 1949. – Т. 67, №2. – С. 213-216.
9. Бабкин Б. Н. Приближенное интегрирование систем обыкновенных уравнений первого порядка методом С. А. Чаплыгина // Известия АН СССР. Сер. мат. – 1954. – Т. 18, №5. – С. 477-484.
10. Бабкин Б. Н. К теореме С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах // Мат. сб. – 1958. – Т. 46, №4. – С. 389-398.
11. Балуев А. Н. К абстрактной теории метода С. А. Чаплыгина // ДАН СССР. – 1952. – Т. 83, №6. – С. 781-784.

12. Балуев А. Н. О методе С. А. Чаплыгина // Вестник Ленинград. ун-та. – 1956. – №13. – С. 27-42.

13. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства.– М.: Мир, 1965. – 276 с.

14. Беллман Р., Каллаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968.– 183 с.

15. Бессмертных Г.А., Левин А.Ю. О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной // ДАН СССР. – 1962. – Т. 114, №3. – С. 471-474.

16. Бондаренко В. А. Об интегральных неравенствах с немонотонными функциями // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, №3. – С. 565-567.

17. Бондаренко В. А. Интегральные неравенства для уравнения Вольтерра в банаховом пространстве с конусом // Мат. заметки. – 1971. – Т. 9, №3. – С. 151-160.

18. Валеев К. Г. Обобщение леммы Гронуолла-Беллмана // Укр. мат. журн. – 1973. – Т. 25, №4. – С. 518-521.

19. Витюк А. Н. К вопросу о приближенном интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе метода С. А. Чаплыгина // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, №7. – С. 923-928.

20. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: Физматгиз, 1961. – 407 с.

21. Далецкий Ю. Л. Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

22. Дашко О. М. Використання напівліпшицієвості в теорії двосторонніх диференціальних нерівностей // Вісник ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – №337. – С. 309-312.

23. Дубровский В. М. Системы нелинейных интегральных уравнений // Успехи мат. наук. – 1949. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 176-177.

24. Жданов Г. М. О приближенном решении систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи мат. наук. – 1961. – Т. 16. – Вып. 1. – С. 143-148.

25. Жуковский Н. Е. Геометрическое доказательство первой и второй теорем С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах // Собр. соч., М.: Гостехиздат. – 1948. – Т. 1. – С. 568-577.

26. Жуковский Е. С. Об интегральных неравенствах в пространствах суммируемых функций // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, №4. – С. 580-584.

27. Задирака К. В. Приближенное интегрирование линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами методом С. А. Чаплыгина // Укр. мат. журн. – 1952. – Т. 4, №3. – С. 299-311.

28. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 741 с.

29. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 546 с.

30. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та. – 1975. – 352 с.

31. Ковач Ю. И. Приближенное решение одной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в неявном виде с отклоняющимся аргументом // Мат. физика. – 1974. – Вып. 15. – С. 65-74.

32. Ковач Ю. И., Маринец В. В. Некоторые методы построения двусторонних приближений к решению дифференциальных уравнений с запаздыванием // Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений.– Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1971. – С. 202-225.

33. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 447 с.

34. Колосов А.И. Об одном класе краевых задач, приводимых к уравнению с гетеротонным оператором // Дифференц. уравнения. – 1985. – № 11. – С. 1884-1891.

35. Колосов А. И., Ли Мун Су. О двусторонней сходимости метода последовательных приближений // Математический сборник. – Киев: Наук. думка. – 1976. – С. 178-181.

36. Комленко Ю. В. К вопросу о методе Чаплыгина для задачи Коши // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, №7. – С. 903-907.

37. Копач М. И. О двусторонних интегральных неравенствах Вольтерра с немонотонными операторами // Укр. мат. журн. – 1983. – Т. 35, №6. – С. 696-701.

38. Копач М. І. Про узагальнення нерівностей Гронуола і Ведрофа // Вісник ДУ "Львівська політехніка" Прикладна математика. – 1998. – №337.– С. 329-332.

39. Копач М. І. Двосторонні інтегральні нерівності з багатьма незалежними змінними для рівнянь з частковою ліпшицієвістю // Вісник НУ "Львівська політехніка" Прикладна математика. – 2000. – №411.– С. 183-192.

40. Красносельский М. А. Некоторые задачи нелинейного анализа // Успехи мат. наук. – 1954. – Т. 9, Вып. 3. – С. 57-114.

41. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 455 с.

42. Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В. Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 255 с.

43. Курпель Н. С. Проекционно-итеративные методы решения систем уравнений. – Киев: Наук. думка, 1968. – 243 с.

44. Курпель М. С. Про деякі модифікації методу С. О. Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А.. – 1969. – №4. – С. 303-306.

45. Курпель Н. С. О двусторонних приближениях к периодическим решениям дифференциальных уравнений // Тр. V Международной конф. по нелинейным колебаниям. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. – Т. 1. – С. 348-352.

46. Курпель Н. С. Некоторые модификации и обобщения метода С. А. Чаплыгина // Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1971. – С. 51-72.

47. Курпель Н.С., Гресько Е.В. Об одном обобщении теоремы А.Тарского о неподвижной точке // Известия вузов. – 1978. – Т. 5. – С. 135-137.

48. Курпель Н. С., Гречко В. И. О некоторых модификациях метода С. А. Чаплыгина для уравнений в полуупорядоченных пространствах // Укр. мат. журн. – 1973. – Т. 25, №1. – С. 39-45.

49. Курпель Н. С., Курченко Т. С. Двусторонние методы решения систем уравнений. – Киев: Наук. думка, 1975. – 184 с.

50. Курпель Н. С., Майборода И. Н. Об одном способе построения двусторонних приближений к решению уравнений // Укр. мат. журн. – 1976. – Т. 28, №5. – С. 602-610.

51. Курпель Н. С., Охрончук В. И. О дифференциальных неравенствах в банаховых пространствах // Методы приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973. – С. 124-129.

52. Курпель Н. С., Тивончук В. И. Об одном двустороннем методе приближенного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1975. – Т. 27, №4. – С. 528-534.

53. Курпель Н.С., Тивончук В.И. Построение монотонных процессов последовательных приближений с помощью модификаций алгоритма М. Пиконе // Изв. вузов. Математика. – 1977. – №6. – С. 126-130.

54. Курпель Н. С., Шпортюк Г. А. О двустороннем методе решения операторых уравнений // Нелинейные краевые задачи математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973. – С. 386-390.

55. Курпель Н. С., Шувар Б. А. Об операторных и интегральных неравенствах.– Укр. мат. журн. – 1973. – Т. 25, №3. – С. 386-390.

56. Курпель Н. С., Шувар Б. А. Один клас операторних рівнянь і двосторонні операторні нерівності // Проекційно-ітеративні методи розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь. – Київ: Ін-т математики АН УРСР. – 1974. – С. 86-92.

57. Курпель Н. С., Шувар Б. А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. – Киев: Наук. думка, 1980. – 267 с.

58. Курпель Н. С., Шувар Б. А. О двусторонних операторных неравенствах для уравнений типа Вольтерра // Нелинейные краевые задачи математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1973. – С. 264-282.

59. Левин А. Ю. Оценка функции с монотонно расположенными нулями последовательных производных // Мат. сб. – 1964. – Т. 64, №3. – С. 396-409.

60. Лузин Н. Н. О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина. – Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6, Вып. 6. – С. 3-27.

61. Лучка А. Ю. Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.

62. Майборода И. Н. Об одном проекционно-итеративном способе построения двусторонних приближений к решениям операторных уравнений. – Укр. мат. журн. – 1976. – Т. 28, №6. – С. 735-744.

63. Мамедов Я. Д. Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Баку: Маариф, 1974. – 176 с.

64. Мамедов Я. Д., Аширов С. А. Нелинейные уравнения Вольтерра. – Ашхабад: Ылым, 1977. – 176 с.

65. Мартынюк А. А., Гутовски Р. Интегральные неравенства и устойчивость движения. – Киев: Наук. думка, 1978. – 272 с.

66. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.

67. Ментинський С. М. Двосторонні алгоритми дослідження розв'язків періодичної крайової задачі // Вісник ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – №337.– С. 356-359.

68. Ментинський С.М. Двосторонні алгоритми для апроксимації розв'язків m-точкової задачі для одного класу нелінійних диференціальних рівнянь // Вісник ДУ "Львівська політехніка". – 1999. – № 364. – С. 283-287.

69. Ментинський С.М. Двостороння апроксимація розв'язків крайової задачі для звичайного диференціального рівняння першого порядку // Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2000. – № 407. – С. 226-230.

70. Ментинський С.М. Застосування двосторонніх ітерацій до наближеного розв'язання крайових задач // Вісник НУ "Львівська політехніка". – 2000. – № 411. – С. 254-258.

71. Ментинський С.М. Двостороння апроксимація розв'язків багатоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння з параметрами // Укр. мат. журн.- 2005.- т. 57, №1.- с. 125-130.

72. Мигович Ф. М., Шувар Б. А. Застосування деяких модифікацій методу Чаплигіна до інтегральних рівнянь типу Вольтерра в просторі Банаха // Проекційно-ітеративні методи розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь. – Київ: Ін-т математики АН УРСР. – 1974. – С. 131-135.

73. Михайлов М. Н., Подгорнов В. В. О дифференциальных неравенствах с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, №9. – С. 1183-1989.

74. Нестеренко Л. И. Об одном двустороннем методе решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. – 1980. – № 11. – С. 18-21.

75. Обшта А.Ф. Створення діагностичного образу енергетичного об'єкта в режимі прямого часу // Моделювання та інформаційні технології. – Київ: Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. С. Г. Пухова. – 2004. – Вип. 27. – С. 55-61.

76. Обшта А.Ф. Агрегаційно-ітеративні аналоги методу Мамедова розрахунку моделей просторових віброобразів складних енергетичних вузлів // Моделювання та інформаційні технології. – Київ: Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. С. Г. Пухова. – 2004. – Вип. 28. – С. 43-51.

77. Обшта А.Ф. Прогнозування змін параметрів роботи турбіни на основі аналізу віброобразів // НАН України. Збірник наукових праць. Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. С. Г. Пухова. – Київ: – 2004. – Вип. 26. – С. 63-69.

78. Обшта А.Ф. Проблема модифікації діагностичної моделі на основі розв'язку оберненої задачі з використанням виміряних даних // НАН України. Збірник наукових праць. Ін-т проблем моделювання в енергетиці ім. С. Г. Пухова. – Київ: – 2004. – Вип. 27. – С. 63-67.

79. Ортега Д., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975. – 558 с.

80. Охрончук В. И. О дифференциальных неравенствах второго порядка в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1975. – Т. 27, №1. – С. 117-121.

81. Панов Ю. Д. О применении метода академика С. А. Чаплыгина к решению интегральных уравнений.– Изв. АН СССР. Сер. 7, 1934, №6, С. 843-886

82. Петров А. И. Несколько замечаний относительно дифференциальных неравенств // Изв. вузов. Математика. – 1965. – №4. – С. 58-63.

83. Покорний Ю. В. О В-положительных и В-монотонных операторах // Проблемы математического анализа сложных систем. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-т. – 1976. – Вып. 1. – С. 58-63.

84. Ручинский В. С. К вопросу об оценках решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1975. – №6. – С. 91-98.

85. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 277 с.

86. Самойленко А. М., Ткач Б. П. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.

87. Слугин С. Н. К теории методов Ньютона и Чаплыгина // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120, №3. – С. 472-474.

88. Собкович Р. И. Двусторонний метод исследования некоторых краевых задач с параметрами.– Киев: Изд-е Ин-та математики АН УССР (Препринт), 1981, 36 с.

89. Собкович Р. И., Шувар Б. А. Двусторонние приближения к периодическим решениям систем дифференциальных уравнений с параметрами // Нелинейные динамические процессы физики и механики. – Киев: Наук. думка. – 1981. – С. 138-145.

90. Соколов Ю.В. Метод осреднения функциональных поправок. – Киев: Наук. думка, 1967. – 336 с.

91. Трауб Дж. Итерационные методы решения уравнений. – М.: Мир, 1985. – 264 с.

92. Филатов А. Н., Шарова Л. В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 152 с.

93. Фолькман П. Заметка об интегральных неравенствах типа Вольтерра // Укр. мат. журн. – 1984. – Т. 35, №3. – С. 393-395.

94. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1973. – 720 с.

95. Цалюк З. Б. Функциональные неравенства Вольтерра // Изв. вузов. Математика, 1969. – №3. – С. 86-95.

96. Цалюк З. Б. О некоторых многомерных интегральных неравенствах // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, №10. – С. 1828-1830.

97. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 102 с.

98. Шувар Б. А. О принципе мажорант для операторных уравнений // Методы приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Институт математики АН УССР. – 1973. – С. 262-270.

99. Шувар Б. А. Системы двусторонних интегро-дифференциальных неравенств нейтрального типа // Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений. – Киев: Институт математики АН УССР. – 1980.

100. Шувар Б. А. Двусторонние оценки решений уравнений с обобщенно монотонно изображаемыми операторами // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, № 2. – Киев: 1980. – С.

101. Шувар Б. А. Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах // Второй симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. т. 1. – Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР. – 1981. – С. 68-73.

102. Шувар Б. А. Об одном способе построения двусторонних приближений к периодическим решениям дифференциальных уравнений // 9-я международная конференция по нелинейным колебаниям. – Киев: Ин-т матем. АН УССР. – 1984. – С. 375.

103. Шувар Б. А. Интегральные неравенства типа Бихари и Вендроффа // Укр. мат. журн. – 1984. – Т. 36, №4. – С. 532-536.

104. Шувар Б. А. О сходимости однопараметрического метода итеративного агрегирования для систем линейных алгебраических уравнений. – Львов: Львовский политехнический ин-т. – 1988. – ДЕП. в Укр НИИНТИ 10.08.88, №1471-Ук88. – 11 с.

105. Шувар Б. А. О сходимости многопараметрических вариантов метода итеративного агрегирования // Вестник Львовс. политехн. ин-та. – 1989. – № 232. – С. 140-142.

106. Шувар Б. А. Про нетрадиційні умови збіжності методу послідовних наближень для систем лінійних алгебраїчних рівнянь // Вісник Львівськ. політехн. ін-ту.– 1990. – С. 112-113.

107. Шувар Б. А. Про ітеративне агрегування і метод послідовних наближень // Вісник Львівськ. політехн. ін-ту 1991. – № 250. – С. 139-141.

108. Шувар Б. А. Квазічаплигінські алгоритми та аналоги монотонного методу Ньютона // Вісник ДУ "Львівська політехніка". – 1998. – №337.– С. 310-312.

109. Шувар Б. А., Бойцун С. А. Один способ построения двусторонних приближений к решениям уравнений. – Киев: ДЕП в УкрНИИНТИ, 1984. – 21 с.

110. Шувар Б. А., Дудка Н. А. О двусторонних функционально-дифференциальных неравенствах в банаховом пространстве // ДАН УССР. Сер. А. – 1989. – №11. –

111. Шувар Б. А., Копач М. И. О двусторонних интегральных неравенствах типа Вольтерра со многими независимыми переменными // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 33, №6. – С. 848-833.

112. Шувар Б. А., Копач М. И. Многомерные аналоги неравенства Гронуолла-Беллмана // ДАН УССР. Сер. А. – 1983. – №4. – С. 32-35.

113. Шувар Б. А., Копач М. И. Двусторонние интегральные неравенства со многими независимыми переменными // ДАН УССР. Сер. А. – 1984. – №18. – С. 18-21.

114. Шувар Б. А., Копач М. И. Двусторонние операторные неравенства с немонотонными операторами // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №1. – С. 1-4.

115. Шувар Б. А., Копач М. И. Двусторонние процессы последовательных приближений к решениям уравнений // Укр. мат. журн. – 1983. – Т. 35, №6. – С. 662-665.

116. Шувар Б. А. Ментинський С. М. Двосторонні алгоритми для апроксимації розв'язків задачі Валле-Пуссена // Математичні методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – Т. 47, №3. – С. 33-36.

117. Шувар Б.А., Ментинський С.М. Двостороння апроксимація розв'язків крайових задач. // Укр. мат. журн.- 2005.- т. 57, №2.- с. 284-288.

118. Cafiero F. Su due teoremi di confronto relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordinare // Boll. Un. Math. Ital. – 1958. – №3. – P. 124-148.

119. Corduneanu Andrian. A note on the Gronwall inequality in two independent variables // J. Integral Equat. – 1982. – V. 4, №3. – P. 271-476.

120. Elsner L. Quasimonotonie und Ungleichungen in halfgeordneten Räumen // Linear Algebra and its Appl. – 1934. – V. 8, №3. – S. 289-261.

121. Gutowski R. Etude d'une inequalitie integrale nonlineare en deux variables // Ann. pol. math. – 1977. – V. 35, №3. – P. 247-252.

122. Kwapisz M. On a certain method of succesive aproximations // Collog. Math. – 1967. – V. 16. – P. 147-162.

123. Lakshmikantham V., Leela S. Differential and integral inequalities: Theorie and applications. Vol. 1. – New York: Akad. press, 1969. – 390 p.

124. Mitrinovic D. S. Analitic inequalities. – Berlin: Acad. press, 1970. – 704 p.

125. Rabczuk R. Elementy nierównoszi rózniczkowych. – Warszawa: PKN, 1976. – 276 s.

126. Rasmussen R. M. Gronwall's inequality for functions of two independent variables // J. Math. Anal. and Appl. – 1976. – V. 55, №2. – P. 407-417.

127. Quade W. Ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen zur Lösung von $y' = f(x, y)$ // Math. Zeit. – 1942. – V. 28.– S. 724-208.

128. Picone M. Sull' eguazione integrale non lineare di Volterra // Ann. mat. Pura ed appl. – 1960. – V. 40. – P. 1-10.

129. Picone M. Sull' eguazione integrale non lineare di seconde specie di Fredholm // Math. Z. – 1960. – V. 74, № 2. – P. 119-128.

130. Schmidt J. W. Über lineare Ungleichungen vor Gronwalschen Typ // Beitrag. Numer. Math. – 1976. – V. 5. – S. 171-188.

131. Schmidt J. W., Schneider H. Monoton einschlißende Ferfahren bei additiv zeruegbazen Gleichungen // Z. angew Math. and Mech. – 1983. – V. 63, №1. – S. 3-11.

132. Stuart C. A. Integral equations with gecreasing nonlinearities and applications // J. Different. Equat. – 1975. – V. 18, №1. – P. 202-207.

133. Szarski J. Differential inequalities. – Warszawa: PWN, 1965. – 248 p.

134. Volkman P. Gowöhnliche Differentailgleichungen mit quasimonoton wachsenden Funktionen in topologischen Vektorräumen // Math. Z. – 1979. – 127, №2. – S. 157-164.

135. Walter W. Differential and integral inequalities. – Berlin etc.: Springer, 1970. – 355 p.

136. Wazewski T. Systémes équations et des inégalites differentielles ordinares aux deuxiémef members monotones et leurs applications // Ann. Soc. Pol. Math. – 1950. – V. 23. – P. 112-116.

137. Ziebur A. D. On the Gronwall-Bellman lemma // J. Math. Anal. and Appl. – 1968. – V. 22, №5. – P. 92-95.

138. Yong E. C. Gronwall's inequality in n independent variables // Proc. Amer. Mat. Soc. – 1973. – V. 41, №1. – P. 241-244.